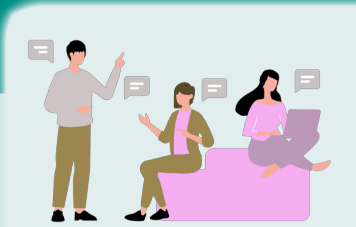
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

7ª época • Nº 9 • 17 de julio de 2025



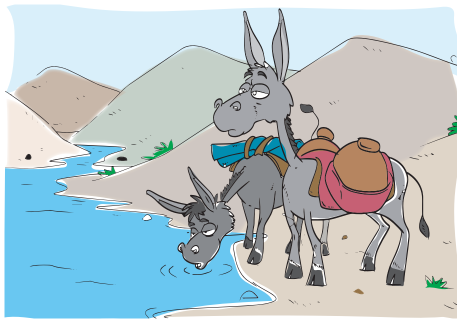
"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

Construcciones geométricas

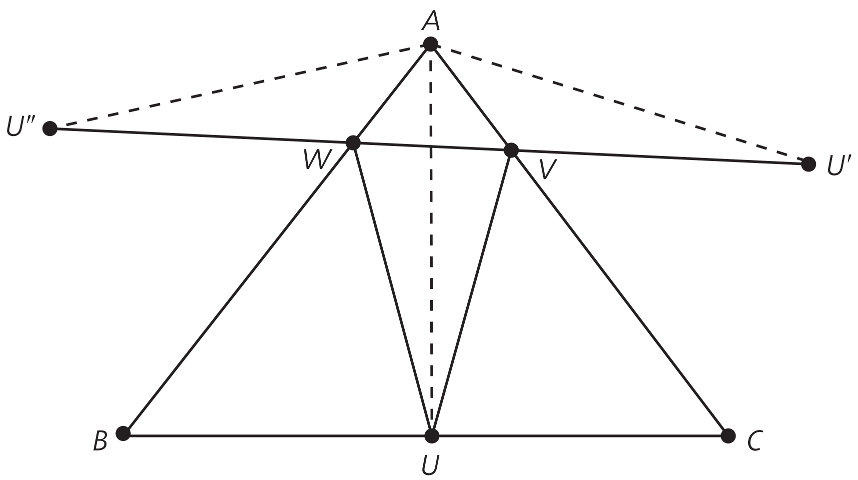
DOS PROBLEMAS DE EXTREMOS



Describiremos los problemas de Fagnano y Fermat con bastantes detalles debido a que en su resolución intervienen métodos interesantes. El primero fue propuesto en 1775 por Giovanni Francesco Toschi di Fagnano, que lo resolvió por medio del cálculo diferencial. El método que estudiaremos aquí fue descubierto por Lipót Fejér mientras era estudiante.

El problema de Fagnano

Dado un triángulo acutángulo ABC, inscríbase el triángulo UVW cuyo perímetro sea el menor de los posibles.



Empecemos por considerar un triángulo arbitrario UVW, donde U está en BC, V en CA, W en AB. Sean U', U'' las imágenes de U por reflexión en CA y AB, respectivamente. Entonces

$$UV + VW + WU = U'V + VW + WU'',$$

es decir, el camino de U' a U'', que suele ser una línea quebrada con ángulos en V y W. La distancia mínima de U' a U'' es una recta, y en la figura anterior se tiene una trayectoria recta. Así, entre todos los triángulos

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer, Harold Scott Coxeter y Roger Penrose.

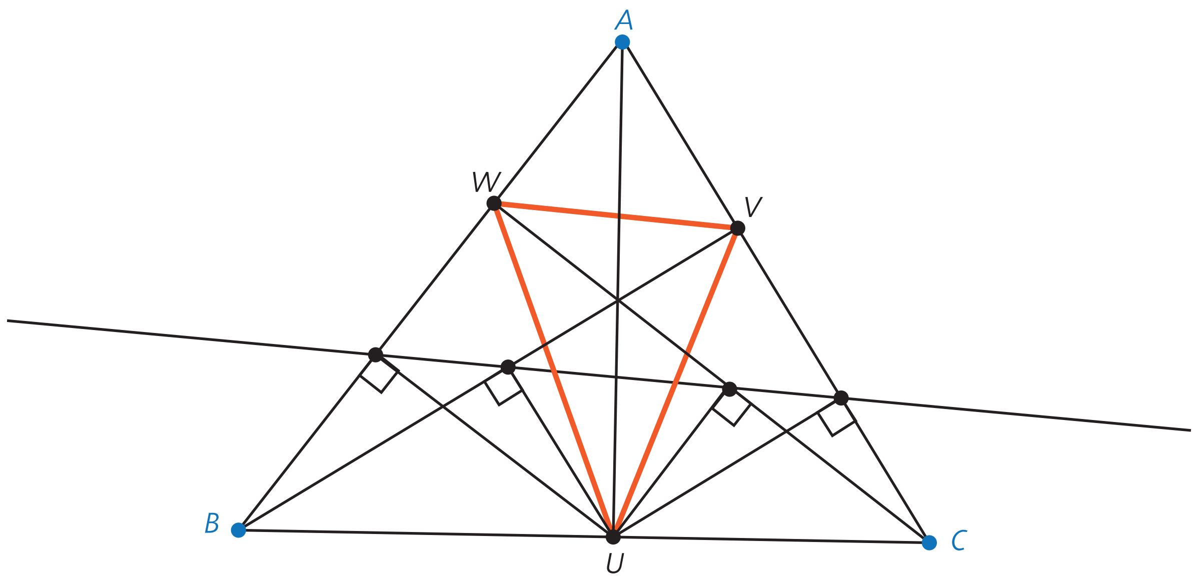
inscritos con un vértice dado U en BC se presenta el de menor perímetro cuando V y W se encuentran en la recta $U'U''$. De esta manera obtenemos un triángulo definido UVW cada vez que tomamos un punto U en BC. El problema estará resuelto cuando tomemos U tal que minimice $U'U''$, es decir, el perímetro.

Puesto que AU' y AU'' son imágenes de AU por reflexión en AC y AB, son congruentes y

$$\widehat{U'AU''} = 2A.$$

De esta manera, $AU'U''$ es un triángulo isósceles cuyo ángulo en A no depende de la elección de U. La base $U'U''$ será mínima cuando los lados iguales lo sean, es decir, cuando AU sea la menor distancia posible. En otras palabras, AU es la distancia menor desde el punto dado A a la recta dada BC. Como la hipotenusa de un triángulo rectángulo es más larga que cualquiera de los catetos, la ubicación de U que buscamos es tal que AU es perpendicular a BC. Y así, AU es la altura que baja de A.

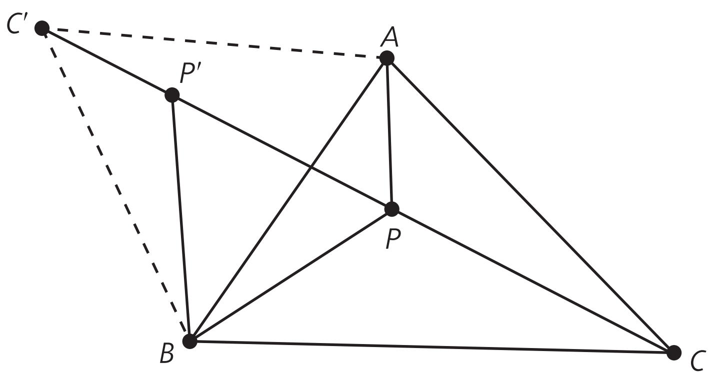
Al elegir de esta manera a U se tiene un único triángulo UVW de perímetro menor que el de cualquier otro triángulo inscrito. Lo mismo podríamos haber hecho a partir de B o C en lugar de A; por lo tanto, observamos que BV y CW son las alturas desde B y C. En consecuencia, ***el triángulo UVW inscrito en un triángulo de ángulos agudos ABC que tiene el menor perímetro es el triángulo órtico de ABC***.



Con el mismo método se puede demostrar el resultado correspondiente a los triángulos esféricos. El otro problema, propuesto por Pierre Fermat (1601-1665), trata también de la manera de minimizar la suma de tres distancias. La solución que damos aquí se debe a Joseph Ehrenfried Hoffmann.

El problema de Fermat

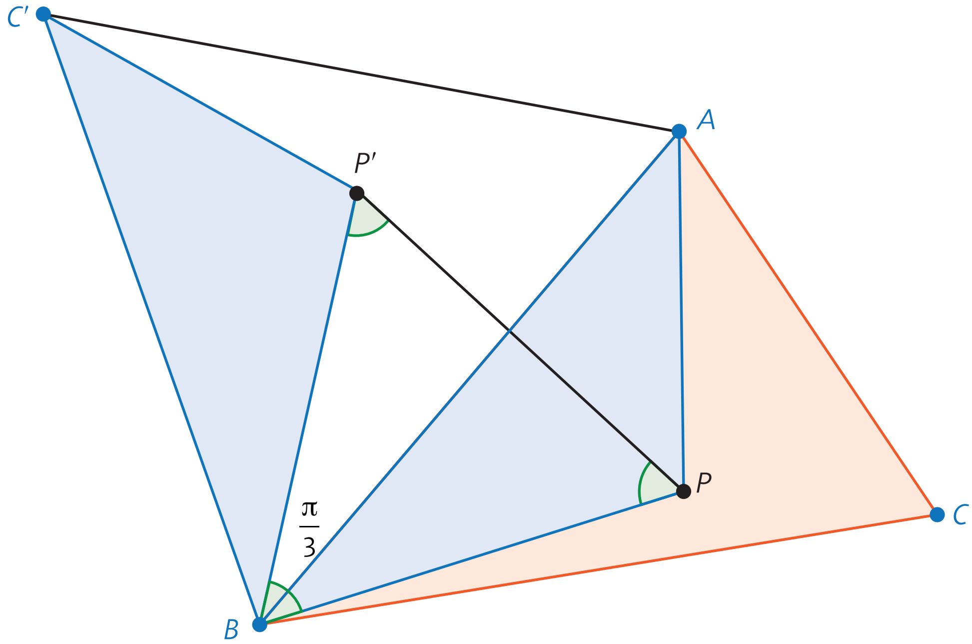
Dado un triángulo de ángulos acutángulos ABC, localícese un punto P tal que la suma de sus distancias a A, B, C sea lo más pequeña posible.



Empecemos por tomar un punto arbitrario P dentro del triángulo. Se une P con A, B, C y se aplica al triángulo interior APB una rotación de 60° alrededor de B de manera que se obtenga $C'P'B$; así, ABC' y PBP' serán triángulos equiláteros, como se tiene en la figura anterior. Entonces,

$$AP + BP + CP = C'P' + P'P + PC,$$

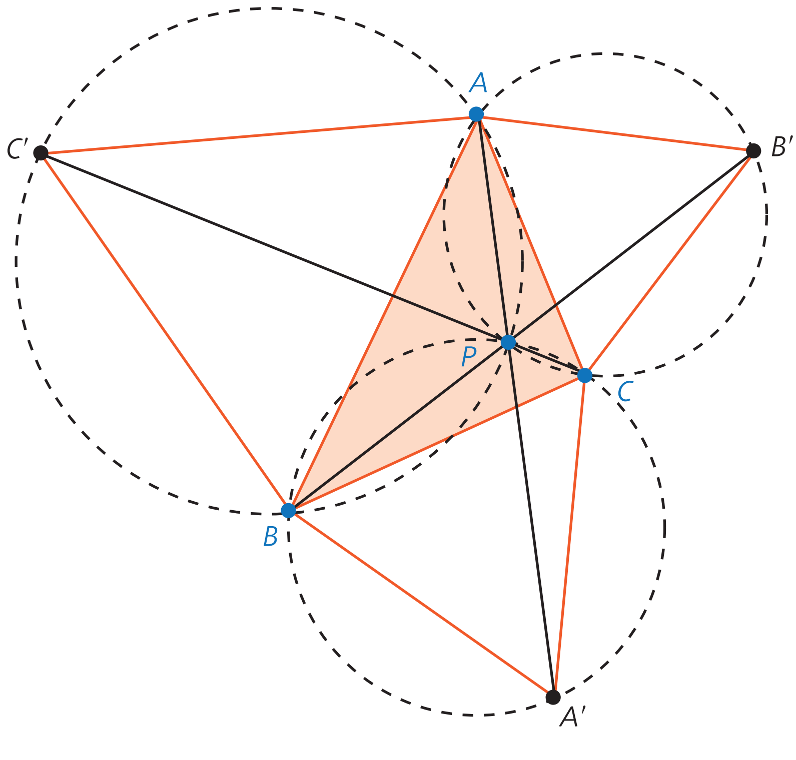
que es el camino de C' a C, y suele presentarse como una línea quebrada con ángulos en P' y P.



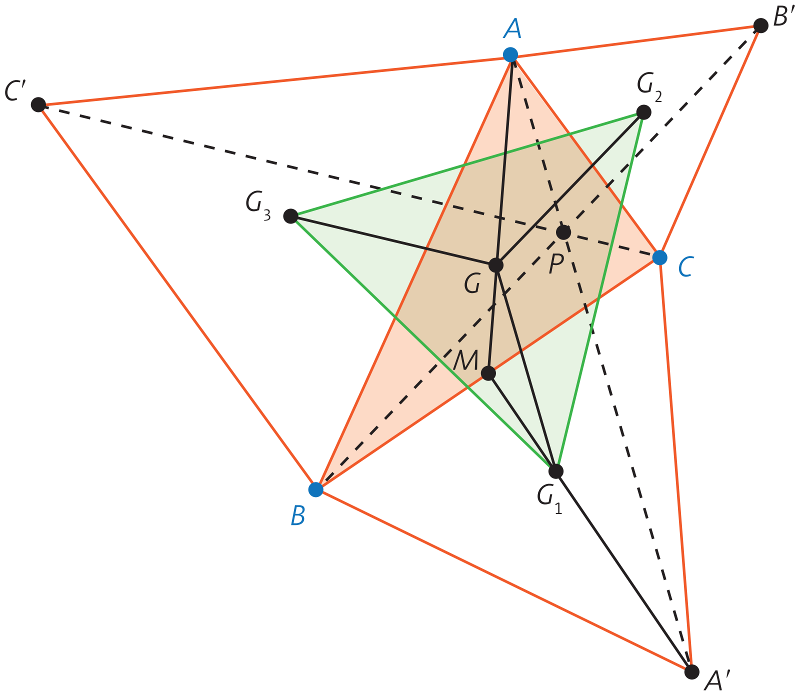
El menor camino estará sobre la recta (donde se una C' a C por medio de una serie de tres segmentos); en ese caso

$$\widehat{BPC} = 180° - \widehat{BPP'} = 120° \quad \text{y} \quad \widehat{APB} = \widehat{C'P'B} = 180° - \widehat{PP'B} = 120°.$$

Así, el punto que se quiere encontrar, tal que la suma $AP + BP + CP$ sea mínima, es el punto en el que cada uno de los lados BC, CA, AB subtiende un ángulo de 120°. La construcción más sencilla del *punto de Fermat* se lleva a cabo al tomar la segunda intersección de la recta CC' y la circunferencia ABC' (es decir, la circunferencia circunscrita del triángulo equilátero ABC'). Se ha señalado que el triángulo ABC no necesita ser acutángulo. La solución anterior es válida siempre y cuando ninguno de los ángulos sea mayor que 120°.



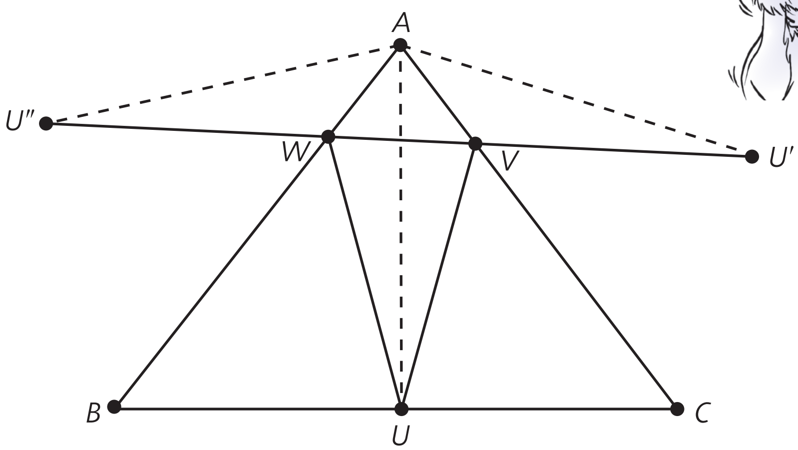
En lugar del triángulo equilátero ABC' podríamos haber tomado sobre BC el triángulo equilátero BCA' o CAB' sobre CA, como se ha hecho anteriormente. Aquí se tiene que las tres rectas AA', BB', CC' pasan por el punto de Fermat, P, y con dos cualesquiera de ellas se tiene una construcción alterna de él. Pero, más aún, los segmentos de recta AA', BB', CC' son todos iguales a $AP + BP + CP$.



Por consiguiente, si sobre los lados de un triángulo *ABC* se toman triángulos equiláteros construidos hacia afuera –sean *BCA′*, *CAB′*, *ABC′*–, los segmentos de recta *AA′*, *BB′*, *CC′* son iguales, concurren al mismo punto y forman entre sí un ángulo de 60°.

Ejercicios de entrenamiento

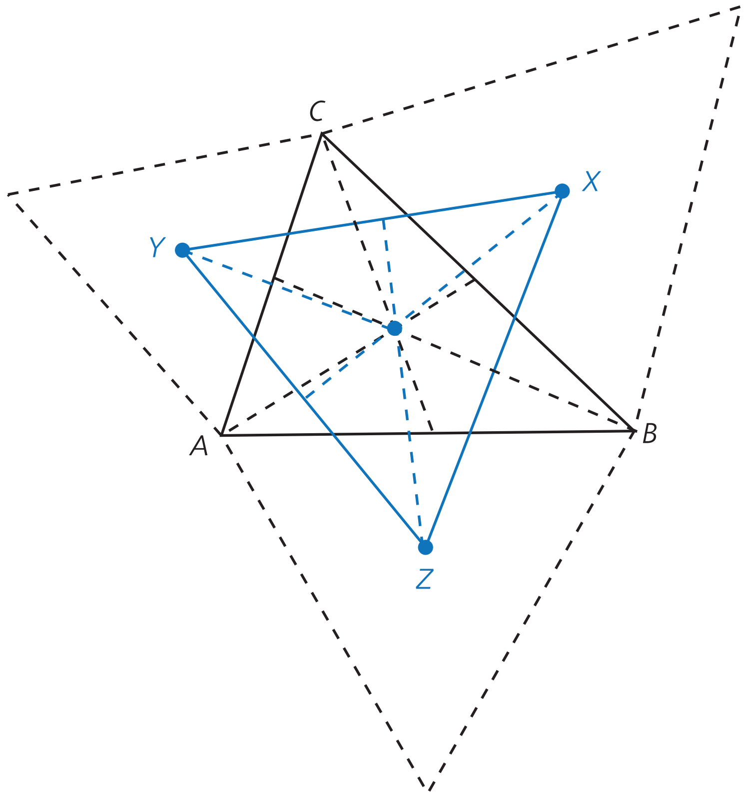
1. Se tiene en la figura siguiente



que UV y VW forman ángulos iguales con CA. Dedúzcase que el ortocentro de un triángulo cualquiera es el incentro del triángulo órtico. (Dicho de otro modo, si ABC fuera una mesa de billar de forma triangular, al impulsar la bola en U sobre la dirección UV, la bola recorrería indefinidamente el triángulo UVW a menos, claro, que la fricción la detuviera.)

2. ¿En qué sentido se deshace el problema de Fagnano cuando intentamos aplicarlo a un triángulo ABC donde el ángulo A es obtuso?

3. Las circunferencias circunscritas de los tres triángulos equiláteros de la figura siguiente



pasan todas por P, y sus centros son los vértices de un cuarto triángulo equilátero. Demostrar.

4. En una mesa se hacen tres hoyos en los vértices de un triángulo arbitrario. A través de cada hoyo se hace pasar un cordel al que se le ha atado un peso, que queda colgando por debajo de la mesa. A continuación, por encima de ella se atan los tres cordeles y se sueltan súbitamente. ¿En qué punto descansará el nudo si los tres pesos son iguales?

5. En los vértices de un cuadrado de lado igual a una milla hay cuatro pueblos. Los habitantes desean comunicar los pueblos por medio de un sistema de caminos, pero el material que poseen les servirá solo para $\sqrt{3}+1$ millas de camino. ¿Qué deben hacer?

6. Resuélvase el problema de Fermat con un triángulo ABC donde $A > 120^{\circ}$, y para un cuadrángulo convexo $ABCD$.

7. Si en el interior de un triángulo se han situado los puntos P, P', de manera que

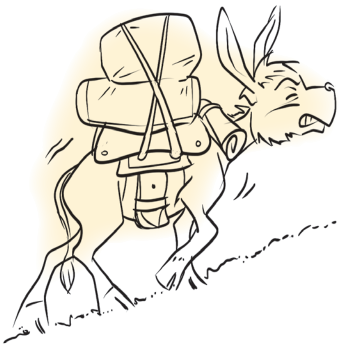
$\widehat{CBP} = \widehat{PBP'} = \widehat{P'BA}$, $\widehat{ACP'} = \widehat{P'CP} = \widehat{PBC}$, entonces $\widehat{BP'P} = \widehat{PP'C}$. Demostrar.

8. Si se colocan sobre los cuatro lados de un paralelogramo cuatro cuadrados por el exterior (o por el interior), sus centros serán vértices de otro cuadrado. Demostrar.

9. Sean X, Y, Z los centros de los cuadrados que se ubicaron por el exterior sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC. El segmento AX será congruente con y perpendicular a YZ (y también BY a ZX y CZ a XY). Demostrar.

10. Sean Z, X, U, V los centros de los cuadrados que se han colocado por el exterior sobre los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrángulo simple (o *cuadrilátero*) cualquiera $ABCD$. El segmento ZU (que une los centros de dos cuadrados *opuestos*) es congruente con y perpendicular a XV. Demostrar.

LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS



Las transformaciones rígidas son un tipo de transformación matemática que no modifica el tamaño o la forma de una figura. Se pueden imaginar como si la figura estuviese hecha de un material sólido, como madera o metal, que se puede mover, girar o voltear, pero no estirar, doblar o deformar. Los tres tipos principales de transformaciones rígidas son:

- *Traslaciones:* mover la forma;
- *Rotaciones:* girar la forma;
- *Reflexiones:* voltear la forma como una imagen espejo.

Las transformaciones rígidas mantienen la forma, el tamaño y los ángulos iguales. También preservan las longitudes laterales, el perímetro y el área. Sin embargo, pueden no mantener las mismas coordenadas o relaciones con las líneas fuera de la figura.

Una propiedad común a las transformaciones rígidas es que cada una de ellas tiene una inversa. Por ejemplo, la inversa de una simetría axial es una simetría axial, y la inversa de una rotación es una rotación.

Iniciaremos el estudio de la construcción de ciertos polígonos regulares por medio de los instrumentos euclidianos. A continuación, consideraremos los mismos polígonos desde el punto de vista de la simetría al margen de las cuestiones de construcción. Por último, extenderemos el concepto de polígono regular de manera que queden incluidos los polígonos en forma de estrella.

1. Ciclotomía

Los postulados de Euclides implican una restricción en los instrumentos para realizar construcciones: deberán ser la regla y el compás. Se construye así un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un hexágono regular y un polígono regular de 15 lados. El número de lados puede duplicarse una y otra vez por medio de bisecciones sucesivas de ángulos.

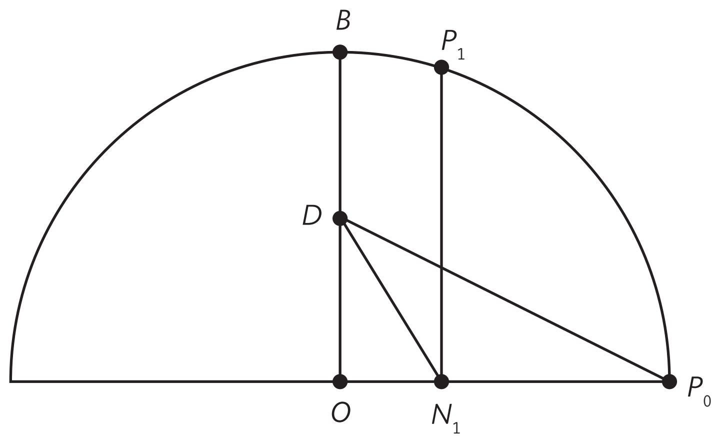
Es natural que nos preguntemos por los demás polígonos regulares que se pueden construir con los instrumentos de Euclides. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) respondió por completo a esta pregunta a la edad de diecinueve años. Descubrió que un *enégono* (polígono de n lados) regular que denotaremos por $\{n\}$, puede construirse de la manera descrita si los factores primos impares de n son *números primos de Fermat* diferentes entre sí:

$$F_k = 2^{2^k} + 1.$$

Los únicos primos de esta clase que se conocen son

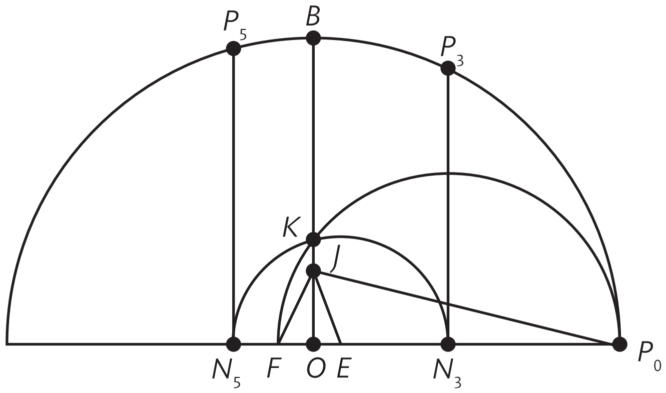
$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \quad F_1 = 2^2 + 1 = 5, \quad F_2 = 2^4 + 1 = 17, \quad F_3 = 2^8 + 1 = 257, \quad F_4 = 2^{16} + 1 = 65\,537.$$

Ptolomeo y Herbert William Richmond han dado construcciones más sencillas que la de Euclides para inscribir un pentágono regular en una circunferencia dada. La de Ptolomeo se encuentra en muchos libros de texto. La otra se presenta en la figura siguiente:



Para inscribir un pentágono regular $P_0P_1P_2P_3P_4$ en una circunferencia de centro O, trácese el radio OB de manera que sea perpendicular a OP_0; únanse P_0 y D, el punto medio de OB; biséquese el ángulo ODP_0 con el objeto de obtener N_1 en OP_0, y trácese la perpendicular N_1P_1 para obtener P_1 en la circunferencia. Entonces, P_0P_1 es uno de los lados del pentágono que se quiere construir.

También se debe a Richmond una construcción sencilla del {17}: $P_0P_1 \ldots P_{16}$ (ver la figura siguiente):



Únase P_0 con el punto J que está a la cuarta parte del camino de O a B. En el diámetro que pasa por P_0 tómense E, F tales que el ángulo OJE mida la cuarta parte del ángulo OJP_0 y el ángulo FJE sea de 45°. Tómese ahora la circunferencia cuyo diámetro es FP_0, que cortará a OB en K, y tómese también la circunferencia cuyo centro es E y cuyo radio es EK, que cortará a OP_0 *en* N_3 (entre O y P_0) y en N_5.

Trácense perpendiculares a OP_0 en ambos puntos, que cortarán a la circunferencia original en P_3 y P_5. Entonces, el arco P_3P_5 (y lo mismo sucede con el arco P_1P_3) mide $\dfrac{2}{17}$ de la circunferencia. (En la demostración se aplica repetidamente el principio de que las raíces de la ecuación $x^2 + 2x \operatorname{cotg} 2C - 1 = 0$ son $\tan C$ y $-\operatorname{cotg} C$.)

En 1832, Richelot y Schwendenwein construyeron el polígono regular de 257 lados. Johann Gustav Hermes pasó diez años trabajando en el polígono regular de 65 537 lados y depositó el manuscrito en una caja grande y lo guardó en la Universidad de Gotinga, donde aún se encuentra.

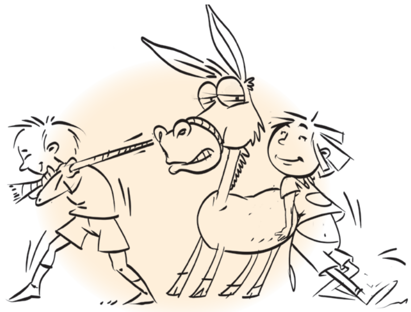
El número siguiente de la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$ es $F_5 = 4\,294\,967\,297$. Incorrectamente, Fermat lo supuso primo. Geoffrey Thomas Bennet dio la siguiente demostración de que es compuesto el número

$$641 = 5^4 + 2^4 = 5 \cdot 2^7 + 1,$$

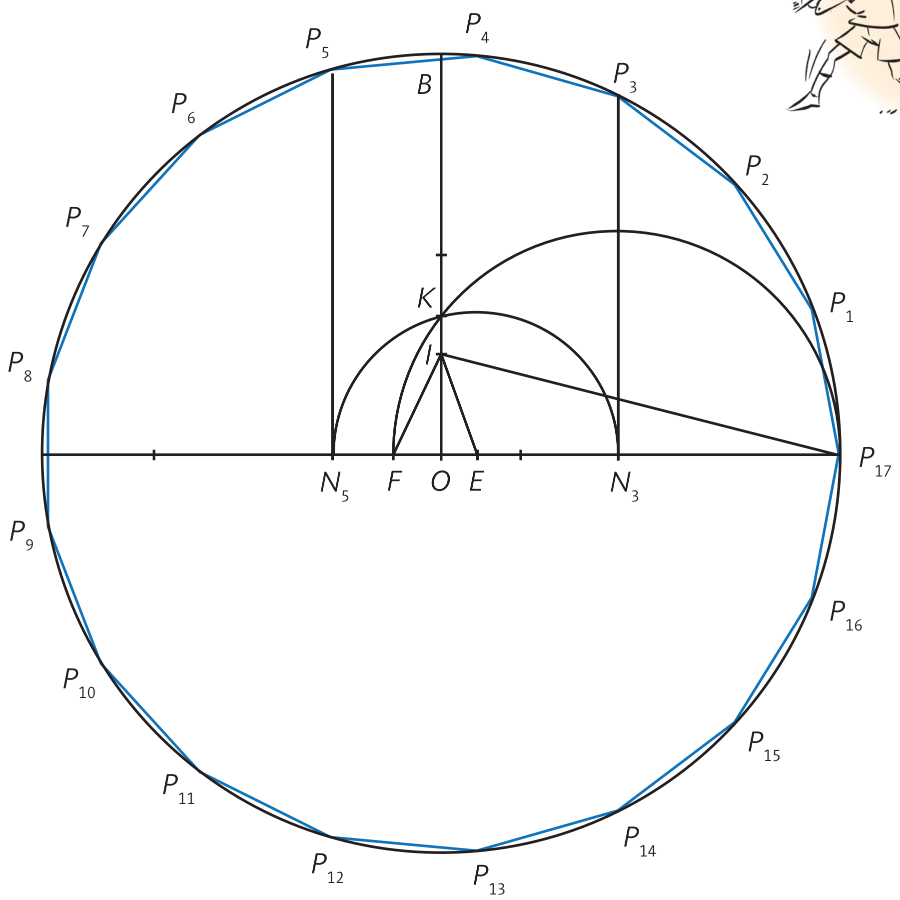
que divide a $5^4 \cdot 2^{2^8} + 2^{3^2}$ y a $5^4 \cdot 2^{2^8} - 1$, y también divide a su diferencia, que es F_5.

Se plantea naturalmente la pregunta acerca de que F_k sea primo para valores mayores de k. Actualmente, sabemos que esto sucede solo cuando divide a $3^{(F_k-1)/2} + 1$. Con este criterio, las computadoras electrónicas han señalado que F_k es un número compuesto cuando $5 \leq k \leq 16$. ¡Por lo tanto, no se volverá a intentar una construcción como la de Hermes!

Ejercicios para fijar ideas



Recordemos: la construcción de Richmond es un método geométrico para construir un polígono inscrito en un círculo.



1. Verifíquese la construcción de Richmond del {5}.
2. A partir de la construcción de Richmond del {17}, ¿cómo se inscribirá en la misma circunferencia {51}?

2. Isometría

El destacado matemático Hermann Weyl (1885-1955) escribió sobre este importante tema

> **"Una manera de describir la estructura del espacio, que preferían tanto Newton como Helmholtz, consiste en emplear la idea de congruencia. Las partes congruentes del espacio, *V*, *V′*, son tales que las puede ocupar un mismo cuerpo rígido en dos de sus posiciones. Si se mueve el cuerpo de una a otra posición, la partícula del cuerpo que cubría un punto *P* de *V* cubrirá después un punto determinado *P′* de *V′* y así el resultado del movimiento es un mapeo *P* → *P′* de *V* en *V′*. Podemos extender el cuerpo rígido, ya sea de hecho o con la imaginación, de modo que cubra cualquier punto *P* del espacio y, en consecuencia, el mapeo congruente *P* → *P′* puede extenderse a todo el espacio".**

Encontramos conveniente emplear la palabra transformación en el sentido especial de una correspondencia uno a uno $P \to P'$ entre todos los puntos del plano (o del espacio), es decir, una regla que asocia pares de puntos, donde se entiende que cada par se compone de un primer miembro P y un segundo miembro P' y que cada punto aparece como el primer miembro de un solo par y también como el segundo miembro de un solo par. Puede suceder que los miembros de un par coincidan, es decir, que P' coincida con P; en este caso, P se llama *punto invariante* (o *doble*) de la transformación.

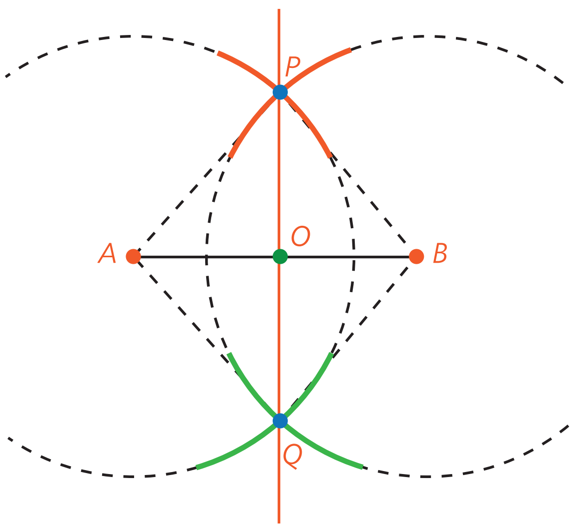
En particular, una *isometría* (*transformación congruente* o *congruencia*) es una *transformación* que preserva la longitud, de manera que si (P, P') y (Q, Q') son dos pares de puntos pertinentes, determinan los segmentos congruentes $PQ = P'Q'$: PQ y $P'Q'$. Por ejemplo, una rotación del plano en torno a P (o en torno a una recta que pase por P y sea perpendicular al plano) es una isometría en la que P es un punto invariante, pero una *traslación* (o *desplazamiento paralelo*) carece de punto invariante: todos los puntos se mueven.

Una *reflexión* es una clase especial de isometría en la que los puntos invariantes son los de una recta (o de un plano) que se llama *espejo*. Es la clase más sencilla de transformación (tan sencilla que a primera vista puede parecer excesivamente trivial mencionarla) en la identidad, deja a cada punto como está.

El resultado de aplicar sucesivamente varias transformaciones es su *producto*. Si el producto de dos transformaciones es la *identidad*, cada una se llama *inversa* de la otra y su producto en el orden inverso es también la identidad.

Si en una isometría hay más de un punto invariante, es o bien la identidad o bien una reflexión.

Con el objeto de demostrar lo que acabamos de enunciar, sean A y B dos puntos invariantes y P un punto cualquiera que no esté en la recta AB.



El punto correspondiente P', que satisface

$$AP' = AP, \qquad BP' = BP,$$

debe quedar en la circunferencia cuyo centro es A y cuyo radio es AP, y en la circunferencia cuyo centro es B y cuyo radio es BP. Como P no está en AB, las circunferencias no se tocan solamente, sino que se intersecan en dos puntos, uno de los cuales es P. Por lo tanto, P es o bien P mismo, o su imagen por reflexión en AB.

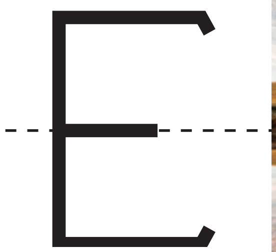
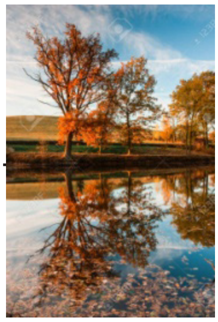
3. Simetría

Un desafío para *Cuentos con Cuentas* al estilo de William Blake:

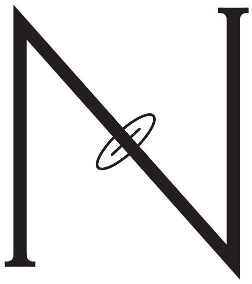
¡Tigre! ¡Tigre! llama espléndida
En los bosques de la noche.
¿Qué inmortales manos o mirada
Se atrevieron a concebir tan pavorosa simetría?

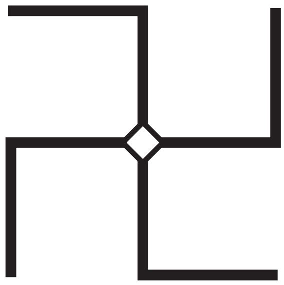
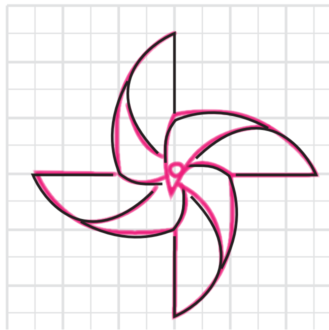
William Blake (1757-1827),
citado por Harold Scott MacDonald Coxeter

Cuando decimos que una figura es *simétrica* entendemos por ello que podemos aplicarle ciertas isometrías que se llaman *operaciones de simetría*, que dejan a la figura entera sin alteración mientras se permutan sus partes. Por ejemplo, las letras mayúsculas E y A tiene simetría bilateral, y el espejo es horizontal en la primera y vertical en la segunda, como se ilustra a continuación:

La letra N es simétrica por un semigiro o rotación de 180° (*reflexión en un punto* o *inversión central*), que se puede considerar como el resultado de reflejar horizontal y verticalmente, o viceversa. La esvástica, o el molinete, es simétrica por rotación de ángulo recto en ángulo recto (figuras siguientes).



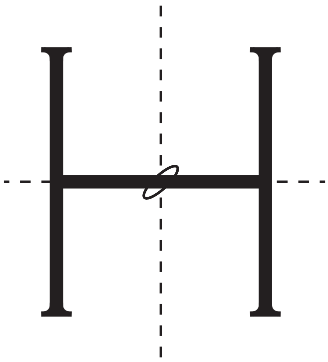
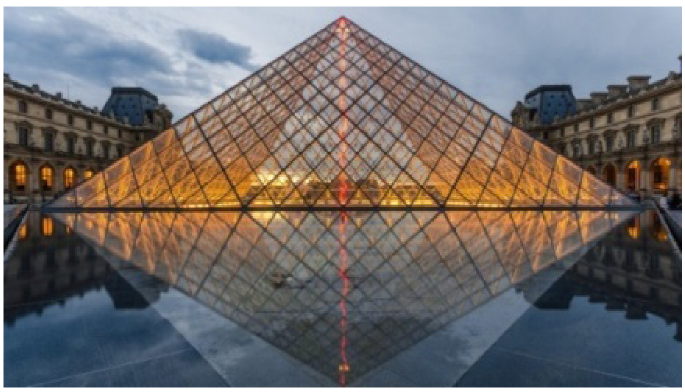
Cuando se enumeran las operaciones de simetría que tiene una figura se acostumbra incluir a la identidad: en cualquier figura hay esta simetría trivial. Así, la esvástica admite cuatro operaciones diferentes: rotaciones de 1, de 2, de 3 y de 4 ángulos rectos. La última es la identidad. La primera y la tercera son inversas entre sí, pues su producto es la identidad.

El empleo que se hace de la palabra "producto" sugiere una simbología algebraica en la que las transformaciones se denotarán por mayúsculas y la identidad por *I*. (Algunos autores la denotan por *E* en lugar de *I*.) Sea *S* igual a un cuarto de giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj; tendremos que las cuatro operaciones de simetría de la esvástica son

$$S,\ S^2,\ S^3 = S^{-1} \text{ y } S^4 = 1.$$

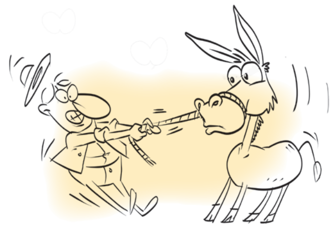
Decimos que *S* es de *período cuatro* debido a que la potencia menor a la que se ha de elevar *S* para obtener la identidad es la cuarta. De la misma manera, el semigiro S^2 es de período 2. La única transformación de período 1 es la identidad. Una traslación es *aperiódica* (es decir, carece de período), pero por convenio se dice que es de *período infinito*.

Hay figuras que admiten simultáneamente como operaciones de simetría rotaciones y reflexiones. La letra H

tiene un espejo horizontal (como E) y uno vertical (como A), y, además, un centro de simetría rotacional (como N) en el punto donde los dos espejos se intersecan. De esta manera, posee cuatro operaciones de simetría: la identidad I, la reflexión horizontal R_1, la reflexión vertical R_2 y el semigiro $R_1R_2 = R_2R_1$.

Ejercicios para fijar ideas



1. Toda isometría de período 2 es o bien una reflexión o bien un semigiro. Demostrar.
2. Exprésense (a) un semigiro, (b) la cuarta parte de un giro, como transformaciones de (i) coordenadas cartesianas, (ii) coordenadas polares. (Tómese el origen como centro de rotación.)

4. Grupos

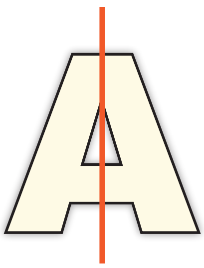
Hay una reflexión de Hermann Weil que vale la pena pensar:

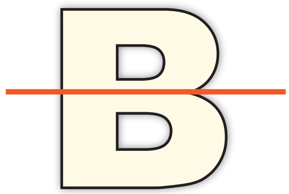
> **La simetría, ya sea que se defina en un sentido amplio o restringido, es una idea por medio de la cual el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.**

Un conjunto de transformaciones forma un grupo cuando contiene a la inversa de cada una de ellas y al producto de dos cualesquiera (incluso el producto de una consigo misma o con su inversa). El número de transformaciones diferentes entre sí se llama *orden del grupo*. El orden puede ser finito o infinito.

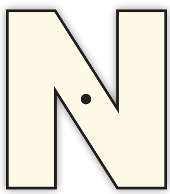
Es claro que las operaciones de simetría de cualquier figura forman un grupo, que se denomina *grupo de simetría* de la figura en cuestión. En el caso extremo, cuando la figura es completamente irregular, como sucede con la numeral 6,

su grupo de simetría es de orden 1, y consiste solamente en la identidad. El grupo de simetría de las letras A y B





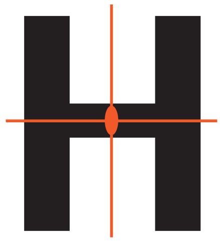
se suele llamar *grupo diedral* de orden 2, generado por una sola reflexión, que se denota por D_1. El nombre es fácil de recordar, pues la raíz griega de "diedral" es casi equivalente a la latina de "bilateral". El grupo de simetría de la letra N



es también de orden 2, pero en este caso el generador es un semigiro, y aquí hablarnos del *grupo cíclico* C_2. Ambos grupos, D_1 y C_2, desde el punto de vista abstracto, son *idénticos* o *isomorfos*. Son diferentes representaciones geométricas de un solo grupo abstracto de orden 2, que se define por medio de la relación

$$R^2 = \boldsymbol{I} \qquad (1)$$

o también $R = R^{-1}$. El grupo de simetría de la esvástica es C_4, el grupo cíclico de orden 4, que genera el cuarto de giro S, y se define en lo abstracto por medio de la relación $S_4 = \boldsymbol{I}$. El de la letra H



es D_2, el grupo diedral de orden 4 que genera las dos reflexiones R_1, R_2, y se define en lo abstracto por medio de las relaciones

$$R_2^1 = \boldsymbol{I},\ R_2^2 = \boldsymbol{I},\ R_1R_2 = R_2R_1. \qquad (2)$$

Aunque C_4 y D_2 son ambos de orden 4, no son isomorfos: tienen estructuras diferentes, es decir "tablas de multiplicación" propias. Para entender esto basta con observar que C_4 contiene dos operaciones de período 4, mientras todas las operaciones en D_2 (con la excepción de la identidad) son de período 2: los generadores, de un modo evidente, pero también sus productos, puesto que

$$(R_1R_2)^2 = R_1R_2R_1R_2 = R_1R_2R_2R_1 = R_1R_2^2R_1 = R_1R_1 = R_1^2 = \boldsymbol{I}.$$

La última observación señala con claridad el significado de la afirmación de que (2) es una definición abstracta de D_2, a saber, que toda relación válida en la que intervienen los generadores R_1, R_2 es una consecuencia algebraica de estas sencillas relaciones.

Una definición abstracta del mismo grupo que se presenta como alterno es

$$R_1^2 = \boldsymbol{I},\ R_2^2 = \boldsymbol{I},\ (R_1R_2)^2 = \boldsymbol{I} \qquad (3)$$

a partir de donde podemos deducir con facilidad $R_1R_2 = R_2R_1$. El grupo cíclico general C_n, de orden n, se define en lo abstracto como

$$S^n = \boldsymbol{I}. \qquad (4)$$

Su único generador S, de periodo n, queda representado de un modo conveniente por una rotación a través de 360°/n. Entonces, tenemos que S^k es una rotación a través de k veces este ángulo, y las n operaciones de C_n se determinan por valores de k desde 1 hasta n, de 0 a n –1. En particular, C_5 se presenta en la naturaleza como el grupo de simetría de la margarita.

Ejercicio para fijar ideas. Exprese una rotación a través del ángulo α con respecto al origen como una transformación de (i) coordenadas polares, (ii) coordenadas cartesianas. Sea $f(r\theta) = 0$ la ecuación de una curva en coordenadas polares. ¿Cuál es la ecuación de la curva transformada?

5. El producto de dos reflexiones

En cualquier grupo de transformaciones, la ley asociativa

$$(RS)T = R(ST)$$

se cumple de manera automática, pero la ley conmutativa

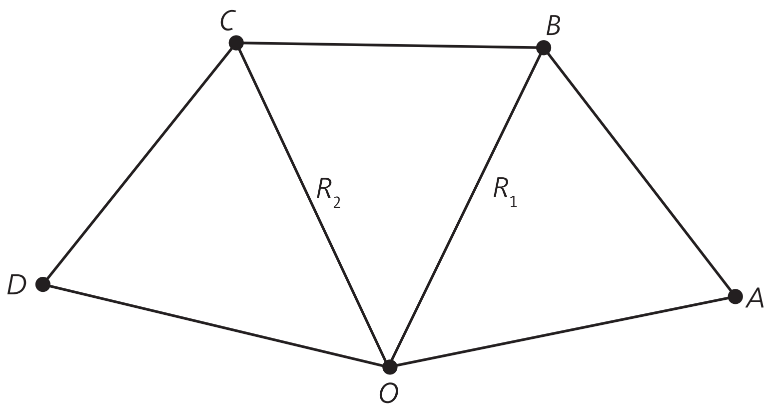
$$RS = SR$$

no se satisface necesariamente, y debemos tener cuidado al invertir un producto; por ejemplo, decir

$$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1},$$

y no $R^{-1}S^{-1}$. Esto se comprende con más claridad al comparar a R y S con las operaciones de ponernos los calcetines y los zapatos, respectivamente.

El producto de las reflexiones en dos rectas (o planos) que se intersecan es una rotación que recorre un ángulo de una magnitud dos veces mayor que el que hay entre ellas. De hecho, si tenemos $A, B, C, D, \ldots$ a los mismos espacios en una circunferencia cuyo centro es O, podemos designar R_1 y R_2 las reflexiones en OB y OC, como muestra la siguiente figura:



Entonces, R_1 reflejará el triángulo OAB en el OCB que, a su vez, R_2 reflejará en OCD; de esta manera, R_1R_2 es la rotación que recorre el ángulo AOC, o BOD, es decir, el doble del ángulo BOC. Como una rotación se determina por completo a partir de su centro y su ángulo, R_1R_2 es igual al producto de las reflexiones en dos rectas cualesquiera que pasen por O al mismo ángulo que forman OB y OC. Las reflexiones en OA y OB son en realidad $R_1R_2R_1$ y R_1 cuyo producto es $R_1R_2R_1^2 = R_1R_2$.

En especial, tenemos que el semigiro en torno a O es el producto de reflexiones en dos rectas ortogonales cualesquiera que pasen por O. Como R_1R_2 es una rotación en el sentido contrario al de las agujas del reloj, R_2R_1 será la rotación en el sentido de las agujas del reloj con respecto a la primera; de hecho, tendremos

$$R_2R_1 = R_2^{-1}R_1^{-1} = \left(R_1R_2\right)^{-1},$$

que es lo mismo que R_1R_2 si ambos espejos forman ángulos rectos, en cuyo caso R_1R_2 es un semigiro y $(R_1R_2)^2 = \boldsymbol{I}$.

Ejercicios para fijar ideas

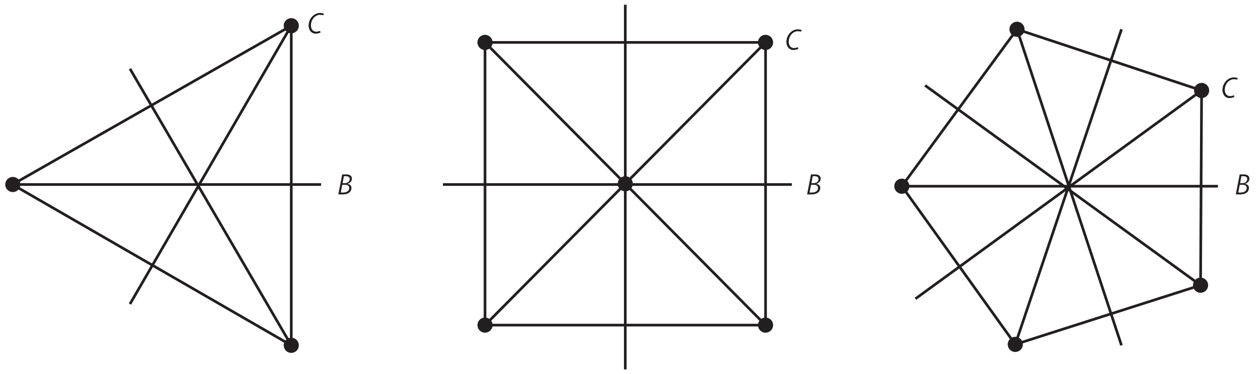
1. El producto de cuartos de giro (en el mismo sentido) alrededor de C y B es el semigiro alrededor del centro de un cuadrado cuyo lado es BC. Demostrar.
2. Sean los cuadrados $ACPQ$ y $BARS$ sobre los lados AC y BA de un triángulo ABC. Si tenemos que B y C quedan fijos mientras A varía libremente, PS pasa por un punto fijo. Demostrar.

6. El caleidoscopio

El caleidoscopio se usa frecuentemente en la literatura como metáfora para referirse a cambios, perspectivas, diversidad, creatividad, o dinámica de la percepción. También puede ser una analogía para describir la mente humana, la realidad social, o la confusión de ideas. El caleidoscopio es sinónimo del famoso contraste romántico, es decir, del valor pintoresco de la variedad, asociado a la novedad y la singularidad. Así como se sustituyen unas a otras las configuraciones observadas por el ojo a través de este artefacto, también se relevan unas a otras las escenas o imágenes mentales configuradas o recreadas por la imaginación.

Ya Juan Domingo Sarmiento, al visualizar en su mente la pampa yerma de su presente, por una parte, y la productiva del futuro, por otra, empleaba la analogía del caleidoscopio para contrastar dos escenas –en antítesis temporal–, una de ellas ligada a la realidad y la otra, al deseo, a la posibilidad, a la potencialidad. Es común que los pensadores criollos piensen en el progreso –desde un encuadre eurocéntrico– y el caleidoscopio ofrece una figura sugestiva.

D_2 es un caso especial del grupo diedral general D_n, que cuando $n > 2$ es el grupo de simetría del enégono regular, n. Las figuras siguientes



contienen los casos $n = 3, 4, 5$, respectivamente. Es evidente que se trata de un grupo de orden $2n$, consistente en n rotaciones (en las que recorre los múltiplos efectivamente diferentes entre sí de $360°/n$, cuyo número es n) y n reflexiones. Cuando n es impar, por medio de cada uno de los n espejos se une un vértice con el punto medio del lado opuesto; cuando n es par, los pares de vértices opuestos quedan unidos por $\frac{1}{2}n$ espejos, y los pares de lados opuestos son bisecados por $\frac{1}{2}n$ espejos.

Las n rotaciones son precisamente las operaciones del grupo cíclico C_n. Así, tenemos que las operaciones de D_n incluyen a todas las de C_n: si empleamos el lenguaje técnico, diremos que C_n es un *subgrupo* de D_n. La rotación que recorre $360°/n$ y que genera el subgrupo puede describirse como el producto de reflexiones $S = R_1R_2$ en dos espejos adyacentes (como OB y OC en la figura de arriba) cuyo ángulo de inclinación es de $180°/n$.

Denotemos las n reflexiones en su orden natural por $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Entonces $R_1 \cdot R_{k+1}$, que es el producto de reflexiones en dos espejos cuya inclinación es de k veces $180°/n$, es una rotación que recorre k veces el ángulo $360°/n$:

$$R_1 \cdot R_{k+1} = S^k.$$

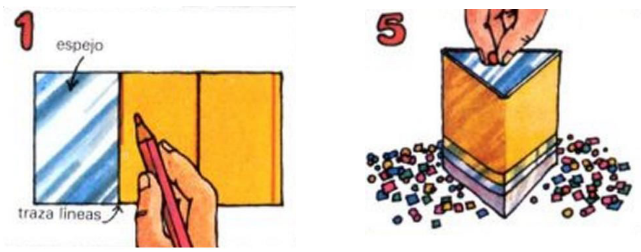
Así, $R_{k+1} = R_1S^k$, y las n reflexiones se pueden expresar como

$$R_1,\ R_1S,\ R_1S^2,\ \ldots,\ R_1S^{n-1}.$$

En otras palabras, D_n es generado por R_1 y S. Al sustituir R_1R_2 en lugar de S, veremos que el mismo grupo es generado igualmente por R_1 y por R_2, que cumplen con las relaciones

$$R_1^2 = \boldsymbol{I}, \qquad R_2^2 = \boldsymbol{I}, \qquad (R_1R_2)^2 = \boldsymbol{I},$$

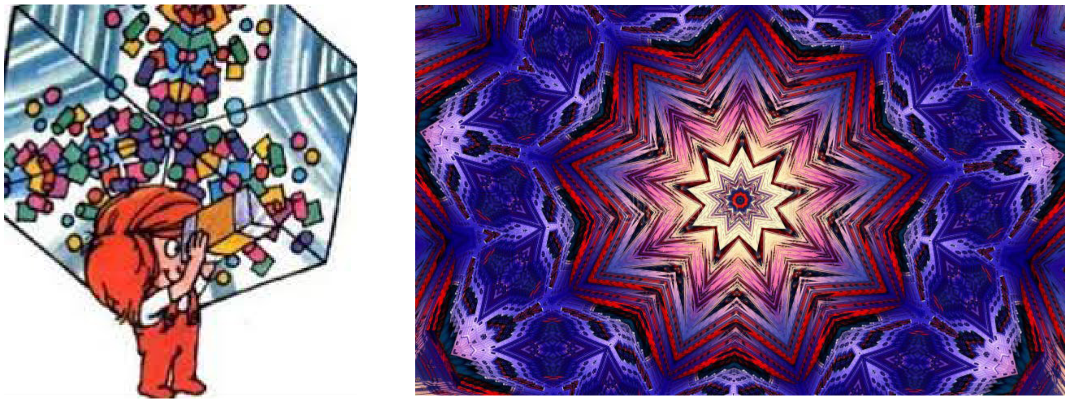
como vimos más arriba. Una manera práctica de construir un modelo de D_n consiste en unir por medio de una bisagra dos espejos comunes y colocarlos uno con respecto al otro como OB lo está con OC en las figuras de arriba, de manera que formen un ángulo de $180°/n$.



Construcción de un caleidoscopio de espejo.

Cualquier objeto que se coloque entre los espejos se reflejará en $2n$ imágenes (contando también al objeto). Si el objeto es la mano derecha, habrá n imágenes con apariencia de mano izquierda, y esto ejemplifica el principio de que el producto de cualquier número par de reflexiones lo invierte debido a que una reflexión invierte el sentido.

Parece que fue Athanasius Kircher, en 1646, el primero que publicó una descripción de este instrumento. El nombre *Kaleidoscopio* (de Καλος, bello; ειδος, forma, y σκορειν, ver: "ver formas bellas") lo acunó sir David Brewster, quien escribió un tratado de su teoría y su historia. En él desaprobaba que Kircher permitiera que el ángulo entre los espejos fuera cualquier submúltiplo de 360° en lugar de restringirlo a los submúltiplos de 180°.



Ejemplos de lo que se visualiza en un caleidoscopio.

El caso de $n = 2$ es, por supuesto, familiar a cualquiera. De pie entre dos espejos perpendiculares (como los hay a veces en el rincón de un ascensor), podemos ver nuestra imagen en cada uno y también la imagen de la imagen, que es la manera en que otro nos observa.

Como hemos escogido el símbolo D_n para el grupo diedral que generan las reflexiones en dos planos dispuestos a un ángulo "diedral" de $180°/n$, extenderemos nuestra notación, como es natural, de manera que abarque también el valor extremo de n = ***I***. Así, D_1 es el grupo de orden 2 que genera una sola reflexión, es decir, el grupo de simetría de las letras E o A, mientras el grupo isomorfo C_2, que genera un semigiro, es el grupo de simetría de la letra N.

Según Weyl, se debe a Leonardo da Vinci el descubrimiento de que los únicos grupos finitos de isometrías en el plano son

$$\begin{array}{cccc} C_1, & C_2, & C_3, & \dots \\ D_1, & D_2, & D_3, & \dots \end{array}$$

El tema le interesaba desde el punto de vista de los planos arquitectónicos. Los grupos predominantes en la arquitectura siempre han sido, por supuesto, D_1 y D_2. Pero en las pirámides de Egipto se exhibe el grupo D_4, y la indicación de Leonardo se ha seguido en cierta medida en tiempos recientes: el edificio del Pentágono en Arlington, cerca de Washington, tiene el grupo de simetría D_5 y el templo Bahai, que está en Wilmette, cerca de Chicago, tiene el D_9.

Vistas aéreas del Pentágono (Arlington, Washington, Virginia)
y del templo Bahai de Wilmette (Chicago, Illinois) en Estados Unidos.

En la naturaleza, encontramos muchas flores con grupos diedrales de simetría como el D_6. El grupo de simetría de un copo de nieve suele ser el D_6 y solo ocasionalmente el D_3.

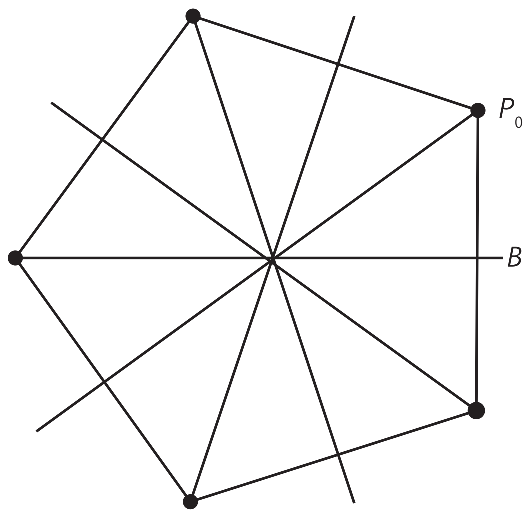
Si se corta una manzana de la manera en la que casi toda la gente corta una naranja, se verá que su corazón tiene el grupo de simetría D_5 Al extender la estrella de cinco puntas por medio de cortes rectos en cada mitad, se divide toda la manzana en diez trozos, y de cada uno de ellos se puede retirar el corazón en la forma de dos hojuelas muy delgadas.

Ejercicios para fijar ideas

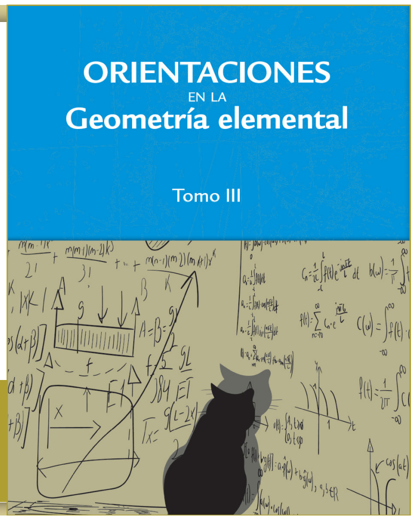
1. Descríbanse los grupos de simetría de: (a) un triángulo escaleno, (b) un triángulo isósceles, (c) una parábola, (d) un paralelogramo, (e) un rombo, (f) un rectángulo, (g) una elipse.
2. Demuestre algebraicamente, por medio de la ley asociativa y el concepto de transformación inversa, la *regla de cancelación* que afirma que la relación $RT = ST$ implica $R = S$.

7. Polígonos en forma de estrella

En lugar de haber derivado el grupo diedral D_n del polígono regular $\{n\}$, podríamos haber derivado el polígono del grupo: los vértices del polígono son precisamente las n imágenes de un punto P_0 de los dos espejos del caleidoscopio (figura siguiente):



Y ni siquiera necesitamos de la totalidad del grupo D_n: su subgrupo C_n será suficiente. El vértice P_k del polígono $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ puede derivarse a partir del vértice inicial P_0 por medio de una rotación que recorra un ángulo de k veces $360°/n$.



De un modo más general, las rotaciones alrededor de un punto fijo O que recorren ángulos θ, 2θ, 3θ, … transforman un punto cualquiera P_0 (distinto de O) en puntos P_1, P_2, P_3, …en la circunferencia cuyo centro es O y cuyo radio es OP_0. En general, estos puntos se hacen más y más densos sobre la circunferencia; pero si el ángulo θ es conmensurable con un ángulo recto, serán distintos solamente un número finito de ellos. En lo particular, si $\theta = 360°/n$, donde n es un entero positivo mayor que 2, entonces habrá n puntos P_k, cuyas rectas de unión

$$P_0 P_1, \qquad P_1 P_2, \qquad \ldots, P_{n-1} P_0$$

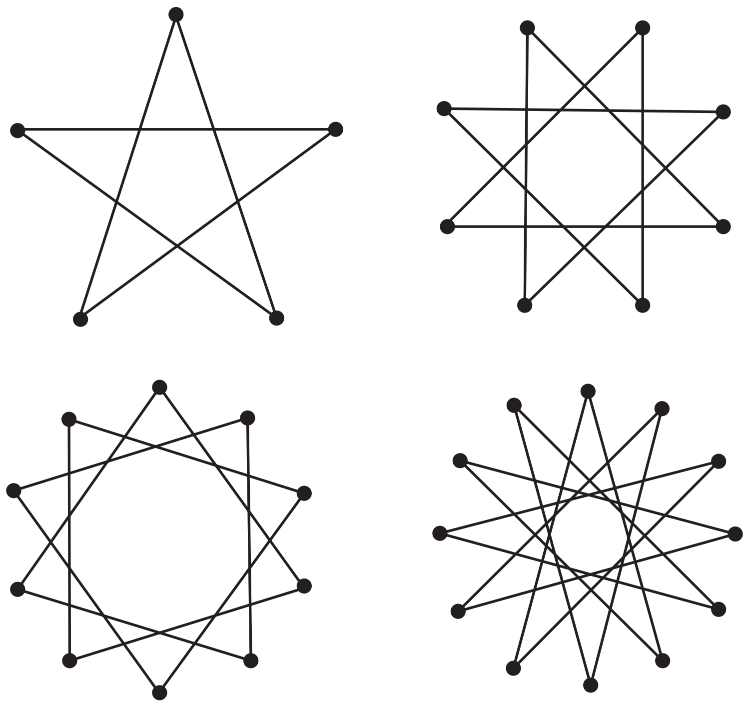
son sucesivamente los lados de un *enégono* regular ordinario.

Extendamos esta idea al permitir que n sea cualquier número racional mayor que 2, denotemos la fracción p/d, donde p y d son primos entre sí. De acuerdo con esto, definiremos un polígono regular (generalizado) $\{n\}$, donde $n = p/d$. Sus p vértices se han derivado de P_0 por medio de rotaciones sucesivas que recorren $360°/n$, y sus p lados (que encierran al centro d veces) son

$$P_0P_1, \; P_1P_2, \; \ldots, \; P_{p-1}P_0.$$

Como un rayo proveniente del centro que no pase por un vértice cortará d de los p lados, este denominador d será la densidad del polígono. Cuando $d = 1$, de modo que $n = p$, tenemos el pentágono regular ordinario $\{p\}$. Cuando $d > 1$, los lados se cruzan unos a otros, pero los puntos en los que se cruzan no cuentan como vértices. Como d puede ser cualquier entero positivo primo con respecto a p y menor que $\frac{1}{2}p$ hay un polígono regular $\{n\}$ que corresponde a cada racional $n > 2$. De hecho, a veces resulta conveniente incluir también al dígono $\{2\}$, aunque sus dos lados coinciden.

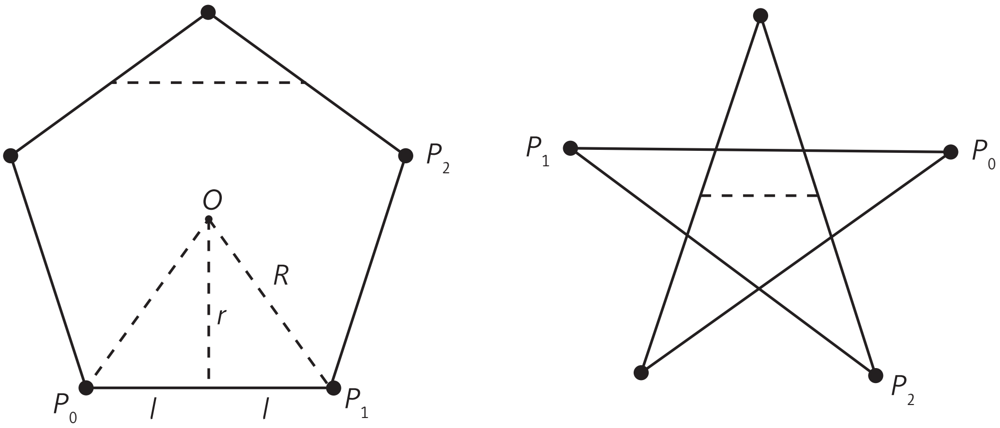
Cuando $p = 5$ tenemos el pentágono $\{5\}$ de densidad 1 y el pentagrama $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ de densidad 2, que los babilonios y los pitagóricos usaban como símbolo de significado especial. De la misma manera, el octagrama $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ y el decagrama $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ tienen densidades 3, mientras el dodecagrama $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ tiene densidad 5, ver las figuras



Los diferentes polígonos: pentagrama, octagrama, decagrama y dodecagrama.

Estos polígonos, en particular, tienen nombres además de símbolos porque se presentan como caras de poliedros y mosaicos interesantes.

Los polígonos en los que $d > 1$ se suelen llamar *polígonos de estrella*. Se usan mucho con fines decorativos. El estudio matemático más antiguo acerca de ellos se debe a Thomas Bradwardine (1290-1349), que durante el último mes de su vida fue arzobispo de Canterbury. El gran científico alemán Johannes Kepler (1571-1630) también los estudió. El primero que los simbolizó numéricamente fue el matemático suizo Ludwig Schläfli (1814-1895), con una notación como $\{p/d\}$. La notación se justifica debido a que se presentan fórmulas que se cumplen igualmente para $\{n\}$ cuando n es entero y cuando es una fracción. Por ejemplo, cualquier lado de $\{n\}$ forma con el centro O un triángulo isósceles OP_0P_1, como muestra la figura siguiente,



con un ángulo en O que mide $2\pi/n$. (Hemos escrito 2π en lugar de 360°, haciendo uso de la medida en radianes, debido a que la introducción de ideas trigonométricas lo hace conveniente.) La base de este triángulo isósceles, que es el lado de un polígono, queda denotada convenientemente por $2l$. Los demás lados del triángulo son iguales al circunradio R del polígono. La altura de la mediana desde O es el inradio r del polígono. Y así tenemos

$$R = l \csc\frac{\pi}{n}, \qquad r = l \cot\frac{\pi}{n}.$$

Si $n = p/d$, el área del polígono queda naturalmente definida como la suma de las áreas de los p triángulos isósceles, a saber

$$plr = pl^2 \cot\frac{\pi}{n}.$$

Cuando $d = 1$, esto es simplemente $pl^2 \cot\frac{\pi}{p}$; en otros casos, la definición de área que hemos dado tiene como efecto que cada parte del interior es contada un número de veces igual a la *densidad local* de esa parte; por ejemplo, la región pentagonal en la mitad del pentagrama $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ se cuenta dos veces.

El ángulo $P_0P_1P_2$ que forman dos lados adyacentes de $\{n\}$, como es la suma de los ángulos de la base del triángulo isósceles, viene a ser el suplemento de $2\pi/n$ es decir

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi.$$

El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados adyacentes se llama *figura vertical de $\{n\}$*. Es claro que ***mide*** $2l\cos\frac{\pi}{n}$.

Ejercicios para fijar ideas

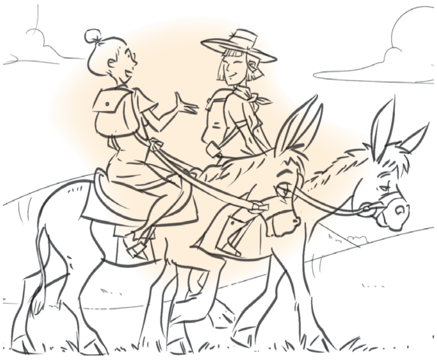
1. Si son iguales los lados de un polígono inscrito en una circunferencia, el polígono es regular. Demostrar.
2. Si un polígono inscrito en una circunferencia tiene un número impar de vértices y si son iguales todos sus ángulos, el polígono es regular. Demostrar.
3. Encuentre el valor de los ángulos de los polígonos $\{5\}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\{9\}$, $\left\{\frac{9}{2}\right\}$, $\left\{\frac{9}{4}\right\}$.
4. Encuentre los radios y figuras verticales de los polígonos $\{8\}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$, $\{12\}$, $\left\{\frac{12}{5}\right\}$.

5. Obtenga las coordenadas polares del k-ésimo vértice P_k de un polígono $\{n\}$ de circunradio 1, con el centro en el polo, si se toma P_0 como (1, 0).

6. ¿Se puede cortar un pastel cuadrado en nueve rebanadas de manera que cada una tenga la misma cantidad de pastel y de cubierta?

II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

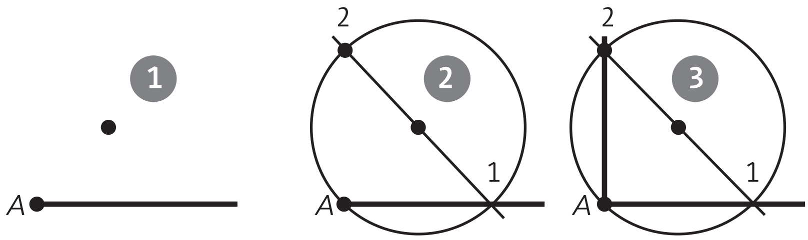
¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Construcciones geométricas. Álgebra de los cuerpos numéricos

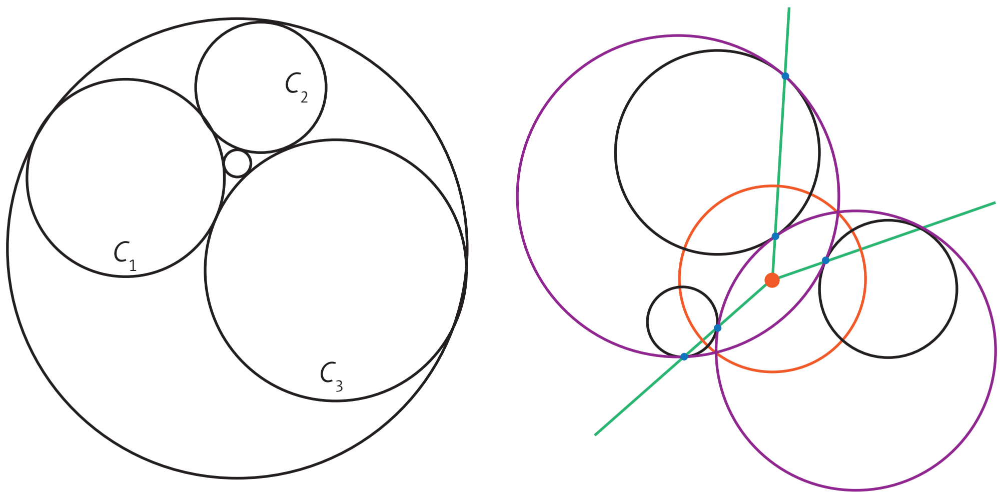
INTRODUCCIÓN

Los problemas de construcción han sido siempre un tema favorito en geometría. Solo con el auxilio de la regla y el compás puede realizarse una gran variedad de construcciones, como seguramente recordamos de estudios anteriores; construirse el punto medio de un segmento o la bisectriz de un ángulo; trazarse una recta perpendicular a otra desde un punto dado o inscribirse un hexágono regular en una circunferencia, etc. Por ejemplo: levantar una perpendicular en el extremo de un segmento, como se muestra a continuación:



En todos estos problemas, la regla se usa meramente como borde rectilíneo para trazar rectas, pero no para medir o transportar distancias. La restricción tradicional de utilizar como únicos instrumentos la regla y el compás, como sabemos, se remonta a la Antigüedad, aunque los griegos no vacilaban en usar otros instrumentos.

Uno de los más famosos entre los problemas clásicos de construcción es el llamado *problema de Apolonio* (hacia el año 200 a. C.), en el cual se dan tres circunferencias arbitrarias del plano y se pide trazar una cuarta, tangente a las tres. Por ejemplo, los C_1, C_2, C_3 de la figura de abajo:



En particular, una o más de las circunferencias dadas puede degenerar en un punto o en una recta ("circunferencia de radio cero" o "infinito", respectivamente); por ejemplo, se puede construir una circunferencia tangente a dos rectas dadas y que pase por un punto dado. Mientras resulta fácil resolver dichos casos especiales, el problema general es considerablemente más difícil.

Entre todos los problemas de construcción, el de trazar con regla y compás el polígono regular de n lados tiene quizá el máximo interés. Para ciertos valores de n, por ejemplo, $n = 3, 4, 5, 6$, la solución se conoce desde la Antigüedad y forma parte importante de la geometría elemental. Pero para el heptágono regular ($n = 7$), se ha demostrado que la construcción es imposible.

Hay otros tres problemas griegos clásicos para los cuales se ha buscado en vano una solución: la trisección de un ángulo arbitrario, la duplicación del cubo (es decir, la construcción de la arista de un cubo cuyo volumen sea doble del de un cubo de arista dada) y la cuadratura del círculo (esto es, la construcción de un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado).

En todos estos problemas, los únicos instrumentos permitidos son la regla y el compás. Problemas de este tipo, que seguían sin resolverse, dieron nacimiento a uno de los más notables desarrollos de la matemática, cuando, después de siglos de investigación inútil, surgió la sospecha de que debían de ser definitivamente irresolubles. Los matemáticos se propusieron investigar la cuestión de:

¿Cómo es posible probar que ciertos problemas no pueden resolverse?

En álgebra, fue el problema de resolver ecuaciones de quinto grado o superior el que llevó a esta nueva manera de pensar. Durante el siglo XVII los matemáticos habían aprendido que las ecuaciones algebraicas de tercer o cuarto grados podían resolverse mediante un proceso análogo al método elemental utilizado para resolver las ecuaciones cuadráticas. Todos estos métodos tienen la siguiente característica común:

> **las soluciones o "raíces" de la ecuación pueden escribirse como expresiones algebraicas, a partir de los coeficientes de aquella, mediante una sucesión de operaciones, cada una de las cuales es una operación racional –adición, resta, multiplicación o división– o la extracción de una raíz cuadrada, cúbica o cuarta.**

Se dice que las ecuaciones algebraicas hasta las de cuarto grado pueden ser resueltas por radicales (*radix* es la palabra latina de raíz). Nada parece más natural que extender este procedimiento a las ecuaciones de grados quinto o superior, utilizando raíces de índice mayor, pero tales intentos fracasaron; incluso, algunos distinguidos matemáticos del siglo XVIII se engañaron creyendo que habían dado con la solución.

Ya en los primeros años del siglo XIX el italiano Paolo Ruffini (1765-1822) y el genio noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) concibieron la entonces revolucionaria idea de probar la imposibilidad de resolver la ecuación algebraica general de grado n por medio de radicales.

Debe quedar completamente claro que la cuestión no reside en si cualquier ecuación algebraica de grado n posee soluciones; este hecho fue demostrado por vez primera por Carl Friedrich Gauss en su tesis doctoral en 1799. Así, pues, no hay duda acerca de la existencia de soluciones de una ecuación, especialmente desde que estas raíces pueden hallarse por medio de procedimientos adecuados, con cualquier grado de aproximación. El arte de la resolución numérica de las ecuaciones, naturalmente, es muy importante y está muy desarrollado; pero el problema de Abel y Ruffini es completamente distinto:

¿se puede encontrar la solución utilizando únicamente operaciones racionales y radicales?

Fue el deseo de alcanzar claridad completa sobre esta cuestión lo que inspiró el magnífico desarrollo del álgebra moderna y de la teoría de grupos, iniciado por Ruffini, Abel y Évariste Galois (1811-1832).

El problema de probar la imposibilidad de ciertas construcciones geométricas nos procura uno de los ejemplos más sencillos de esta tendencia del álgebra. Mediante el uso de conceptos algebraicos podremos demostrar la imposibilidad de trisecar el ángulo, de construir el heptágono regular, o de duplicar el cubo, con la sola ayuda de la regla y el compás. El problema de la cuadratura del círculo es mucho más difícil de tratar.

Nuestro punto de partida no será la cuestión negativa de la imposibilidad de ciertas construcciones, sino, por el contrario, la cuestión positiva de cómo pueden caracterizarse completamente todos los problemas construibles. Después de haber contestado a esta cuestión, será tarea fácil probar que los problemas mencionados caen fuera de esta categoría.

Una digresión sobre el teorema de Ruffini-Abel

Paolo Ruffini es conocido como el autor del llamado *método de Ruffini* que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio $x - a$. Sin embargo, no fue esta su mayor contribución al desarrollo de la matemática. Hacia 1805 elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de quinto grado y superiores, aunque cometió ciertas inexactitudes que luego serían corregidas por el matemático noruego Niels Henrik Abel.


Retrato de Niels Henrik Abel y ubicación de Noruega en el mapa.

La vida de Abel es un ejemplo dramático de lo estrechamente relacionadas que pueden llegar a estar la pobreza y la tragedia. Niels Henrik nació en una familia muy numerosa, hijo del pastor protestante del pueblecillo de Findo en Noruega. Cuando tuvo dieciséis años su maestro le aconsejó leer los grandes libros de los matemáticos más eminentes, incluido el *Disquisitiones* de Gauss. En sus lecturas Abel se dio cuenta de que Leonhard Euler solo había demostrado el teorema binomial para potencias racionales, y cubrió el hueco dando una demostración válida para el caso general.

Cuando Abel tenía 18 años murió su padre y gran parte de la responsabilidad de la familia cayó sobre sus espaldas. No obstante, al año siguiente hizo un descubrimiento matemático notable. Desde la resolución de la cúbica y la cuártica, en el siglo XVI, los matemáticos no habían cesado de perseguir la resolución de la quíntica. Abel también creyó, al principio, que había dado con una solución, pero en 1824 publicó una memoria titulada "Sobre la resolución algebraica de ecuaciones", en la que llegaba a la conclusión opuesta, dando la primera demostración de que no es posible ninguna solución, poniendo así punto final a un largo camino de investigación. **No puede haber ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas sobre los coeficientes de una ecuación polinómica que nos dé las raíces de la ecuación, si el grado del polinomio es mayor que 4.**

Como ya vimos, una demostración anterior de la insolubilidad de la quíntica, menos satisfactoria y que no fue tomada en consideración en general, fue la que publicó Paolo Ruffini (1765-1822) en 1799, por lo que el resultado se suele llamar *teorema de Abel-Ruffini*.

La demostración de la imposibilidad de resolver la quíntica, uno de los teoremas más famosos de la matemática, la dio Abel cuando tenía solo 19 años; sin embargo, en 1826, cuando visitó a Adrien-Marie Legendre, a Augustin Louis Cauchy y a otros matemáticos en París, aún no se le había ofrecido ningún puesto académico adecuado a su capacidad. Durante esta visita a París escribía Abel a un amigo: "Cualquier principiante tiene grandes dificultades para hacerse notar aquí. Yo mismo acabo de terminar un extenso tratado sobre una cierta clase de funciones trascendentes, [...] pero Mr. Cauchy apenas se ha dignado echarle un vistazo".

Por esta época, y en contraste con el siglo XVIII, la mayor parte de los puestos de trabajo para matemáticos lo eran ya de profesores en universidades, y Abel tenía la esperanza de conseguir uno de ellos. Con este objeto le dejó la memoria a Cauchy para que emitiese su opinión sobre ella. Este trabajo contenía resultados nuevos de una generalidad extraordinaria, pero Cauchy no tardó en perderlo (con celo digno de mejor causa), con el resultado de que cuando apareció impreso era ya demasiado tarde.

Abel murió en 1829 de tuberculosis, enfermedad adquirida, según se supone, debido a su pobreza y a sus responsabilidades para sostener a la familia que dependía de él. Dramáticamente, dos días después de su muerte le llegaba una carta en la que se le informaba que iba a ser nombrado profesor de Matemática en la Universidad de Berlín, puesto conseguido para él por August Leopold Crelle. El mismo año le escribía a Legendre el matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) para preguntar por la memoria que Abel había dejado en manos de Cauchy, ya que le habían llegado a Jacobi vagas noticias de que tenía que ver con su importante descubrimiento.

En vista de cómo se ponían las cosas, Cauchy buscó y encontró de nuevo el manuscrito, que Legendre describía más tarde como "un monumento más duradero que si fuera de bronce", y en 1841 fue publicado al fin por el Instituto de Francia entre las memorias presentadas por extranjeros. Este trabajo contenía una generalización importante de la obra de Legendre sobre integrales elípticas. Si consideramos la integral

$$u = \int_a^v \frac{dx}{\sqrt{\left(1-K^2x^2\right)\left(1-x^2\right)}},$$

entonces u es una función de v, $u = f(v)$, cuyas propiedades había estudiado Legendre de una manera casi exhaustiva en su tratado sobre integrales elípticas. De lo que no se dio cuenta Legendre, pero sí vieron en cambio con claridad Gauss, Abel y Jacobi, era el hecho de que invirtiendo la relación funcional entre u y v podemos obtener una función más bella y mucho más útil $v = f(u)$.

Esta función, que se suele representar por $v = \text{sen } u$, y que se lee "v igual al seno amplitud de u", junto con otras definidas de una manera muy parecida reciben el nombre de *funciones elípticas*. La propiedad más sorprendente de estas nuevas funciones trascendentes de orden superior era, como vieron sus tres descubridores independientes, que el campo complejo tiene una doble periodicidad, es decir que hay dos números complejos m y n tales que $v = f(u) = f(u + m) = f(u + n)$, cualquiera que sea u.

Mientras que las funciones trigonométricas tienen solamente un período real (un período de 2π) y la función exponencial $y = e^x$ tiene solo un período imaginario (2π), las funciones elípticas tienen dos períodos distintos. Jacobi quedó tan impresionado por la simplicidad conseguida mediante una sencilla inversión de la relación funcional en las integrales elípticas, que desde entonces consideró el consejo "debes invertir siempre" como el verdadero secreto del éxito en la matemática.

La cuestión de la prioridad con respecto al descubrimiento de la doble periodicidad no es fácil de zanjar. El clásico tratado de Jacobi *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* apareció en 1829, el año de la muerte de Abel, y la obra de este estaba terminada ya en 1827-1828. Gauss, sin embargo, parece haber sido el primero, con gran diferencia, en hacer el descubrimiento, el cual había permanecido dormido entre sus papeles durante un cuarto de siglo hasta que Abel y Jacobi dieron con él de nuevo.

A Jacobi corresponde el mérito del descubrimiento de varios teoremas fundamentales relativos a las funciones elípticas; en 1834 demostró que si una función univalente de una variable es doblemente periódica, entonces la razón de los períodos no puede ser real, así como que es imposible para una función univalente de una sola variable tener más de dos períodos distintos. A él le debemos también el estudio de las llamadas *funciones theta de Jacobi*, una clase de funciones enteras cuasi-doblemente periódicas, de las que las funciones elípticas son cocientes.

A los diecisiete años, Gauss investigó "la constructibilidad de los *p-ágonos*" regulares (polígonos de p lados), siendo p un número primo. Solo se conocía entonces la construcción para $p = 3$ y $p = 5$; Gauss descubrió que el "p-ágono" regular era construible si, y solo si, p es un "número primo de Fermat"; es decir,

$$p = 2^{2^n} + 1.$$

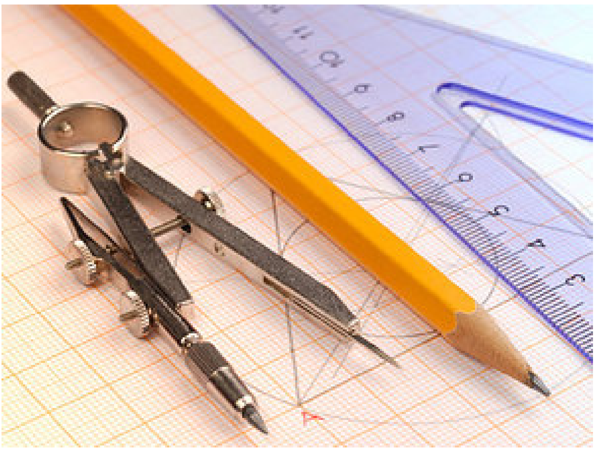
Los primeros números de Fermat son 3, 5, 17, 257, 65 537. Tan entusiasmado se sintió el joven Gauss por su hallazgo que renunció a su intención de hacerse filólogo y resolvió dedicar su vida a la matemática y sus aplicaciones. Siempre recordó la primera de sus grandes proezas con particular orgullo. Después de su muerte le fue erigida en Gotinga una estatua de bronce, y no pudo encontrarse honor más adecuado que el de dar a su pedestal un polígono regular de 17 lados.

Cuando se trata de construcciones geométricas no hay que olvidar nunca que el problema no es el de dibujar figuras, en la práctica con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar que sin otra ayuda que la regla y el compás la solución puede hallarse teóricamente, suponiendo que nuestros instrumentos tienen precisión ideal.

Lo que Gauss demostró es que sus construcciones pueden realizarse en principio. Su teoría nada tiene que ver con el método más sencillo de realizarlas efectivamente o con los artificios que permitan simplificar y acortar el número de pasos necesarios; esta es una cuestión de importancia teórica mucho menor. Desde un punto de vista práctico, ninguna construcción puede resultar tan satisfactoria como la que se obtiene mediante el uso de un buen trasportador de ángulos.

El no adecuarse al carácter teórico de la cuestión de las construcciones geométricas y la obstinación en querer desconocer los hechos científicos bien establecidos son responsables de la persistencia de los innumerables trisectores de ángulos y cuadradores de círculos. Aquellos de entre estos que sean capaces de entender la matemática elemental pueden sacar provecho de este estudio.

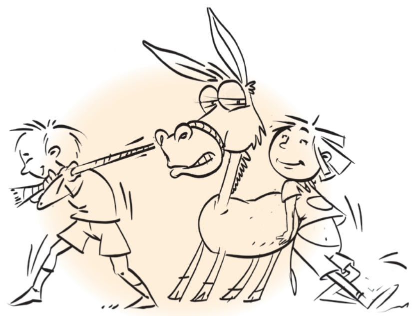
Una vez más recalcaremos que en algunas ocasiones nuestro concepto de construcción geométrica parece artificial. La regla y el compás son, ciertamente, los instrumentos más simples para dibujar; pero la restricción de utilizarlos con exclusividad no es de forma alguna esencial en geometría. Como los matemáticos griegos sabían, tiempo ha, ciertos problemas –tales como el de duplicar el cubo– pueden resolverse si se permite, por ejemplo, utilizar una regla en forma de ángulo recto (escuadra); es bastante fácil idear instrumentos distintos del compás por medio de los cuales es posible dibujar elipses, hipérbolas y curvas mucho más complicadas, y cuyo uso extiende ampliamente el dominio de las figuras *construibles*.



En los próximos párrafos, sin embargo, seguiremos adheridos al concepto usual de construcciones geométricas mediante el uso exclusivo de la regla y el compás.

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1. Construcción de cuerpos de números y extracción de raíces cuadradas



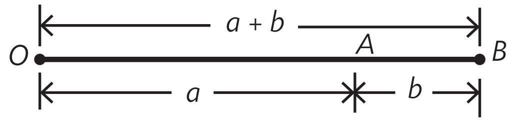
Para dar forma a nuestras ideas generales comenzaremos examinando algunas de las construcciones clásicas. La clave de una comprensión más profunda reside en trasladar los problemas geométricos al lenguaje del álgebra.

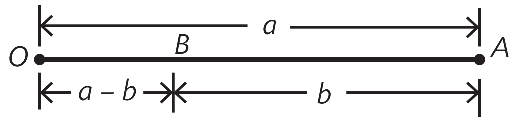
Todo problema de construcción geométrica es del siguiente tipo:

se da cierto conjunto de segmentos rectilíneos, *a*, *b*, *c*, ... y se pide construir uno o más segmentos, *x*, *y*, ... Es siempre posible formular los problemas de este modo, aunque a primera vista tengan un aspecto muy diferente. Los segmentos requeridos pueden aparecer como lados de un triángulo a construir, como radios de círculos, o como coordenadas rectangulares de ciertos puntos.

Por sencillez, supondremos que solo se pide un segmento x. La construcción geométrica equivale entonces a resolver un problema algebraico; primero debemos hallar una relación (ecuación) entre la cantidad pedida x y las dadas a, b, c, ...; después encontrar la cantidad buscada x resolviendo esta ecuación y, finalmente, debemos determinar si esta solución puede obtenerse mediante un proceso algebraico que corresponda a las construcciones con regla y compás.

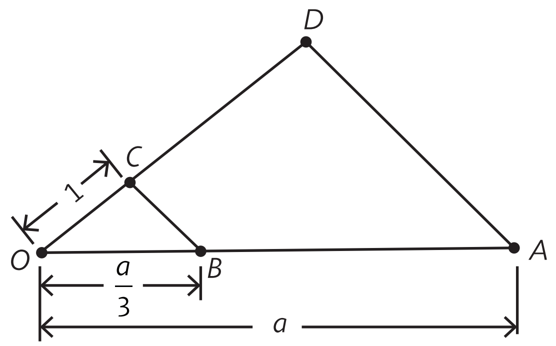
Este es el principio de la geometría analítica: la caracterización cuantitativa de los objetos geométricos mediante números reales, basada en la introducción del continuo numérico real, que es el fundamento de toda la teoría. Observemos en primer lugar que algunas de las operaciones algebraicas más sencillas corresponden a construcciones geométricas elementales. Dados dos segmentos de longitudes a y b (medidos con un segmento unidad dado), es inmediato construir $a + b$, $a - b$, $r \cdot a$ (donde r es cualquier número racional), a/b y ab. Para construir $a + b$





Construcción de $a + b$ y de $a - b$.

trazamos una recta y llevamos con el compás las distancias $OA = a$ y $AB = b$; entonces $OB = a + b$. De la misma manera, para $a - b$ llevamos $OA = a$ y $AB = b$; pero esta vez AB en sentido opuesto a OA; entonces, $OB = a - b$. Para construir $3a$ sumamos simplemente $a + a + a$; de forma análoga, podemos construir $p \cdot a$, siendo p cualquier entero. Construiremos $a/3$ mediante el siguiente artificio:

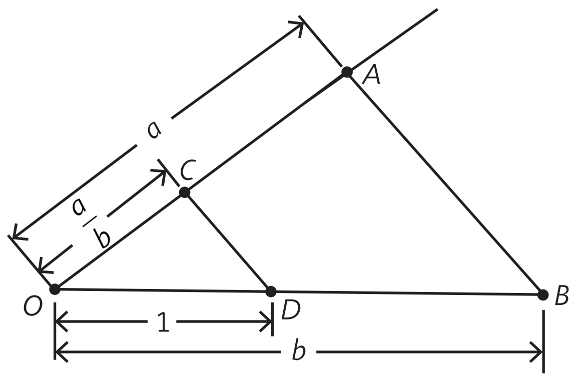


Construcción de $a/3$.

marcamos $OA = a$ sobre una recta y dibujamos una segunda recta por O. Sobre esta llevamos un segmento arbitrario $OC = c$, y construimos $OD = 3c$. Unimos A con D y trazamos desde C una recta paralela a AD, que corta a OA en B. Los triángulos OBC y OAD son semejantes; por tanto,

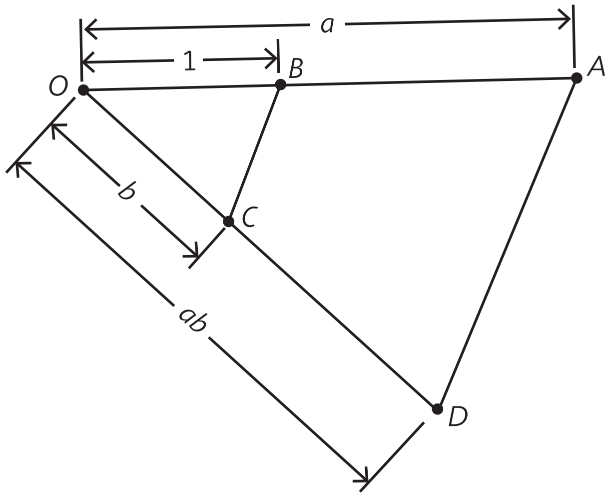
$$OB/a = OB/OA = OC/OD = 1/3, \text{ y } OB = a/3.$$

Del mismo modo al construir a/q, donde q es cualquier entero. Aplicando esta operación al segmento $p \cdot a$ podemos construir $r \cdot a$, siendo $r = p/q$ un número racional cualquiera. Para construir a/b



Construcción de a/b.

llevamos $OB = b$ y $OA = a$ sobre los lados de un ángulo O, y sobre OB llevamos $OD = 1$. Desde D trazamos una paralela a AB, que corta a OA en C. Entonces, OC tendrá la longitud a/b. La construcción de ab se muestra en la figura siguiente:



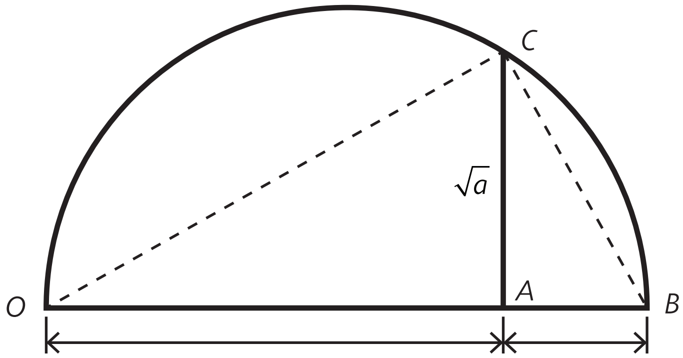
Construcción de *ab*.

donde AD es una paralela a BC desde A. De estas consideraciones resulta que los *procesos algebraicos "racionales"* –adición, sustracción, multiplicación y división de cantidades conocidas– pueden efectuarse por medio de *construcciones geométricas*.

A partir de segmentos dados, medidos por números reales a, b, c, ... podemos, por sucesivas aplicaciones de estas sencillas construcciones, construir cualquier cantidad que sea expresable mediante a, b, c, ... en forma racional; es decir, por medio de la aplicación reiterada de adiciones, restas, multiplicaciones y divisiones.

La totalidad de las cantidades que pueden obtenerse de esta forma a partir de a, b, c, ... constituye lo que se llama un *cuerpo de números*, un *conjunto de números* tal que toda operación racional aplicada a dos o más miembros del conjunto da a su vez lugar a un número del conjunto. Recordemos que los números racionales, los números reales y los números complejos son ejemplos de cuerpos de números. En el caso presente, el cuerpo se dice *engendrado* por los números dados a, b, c, ...

La nueva construcción decisiva, que nos lleva fuera del cuerpo así obtenido, es la extracción de una raíz cuadrada; dado un segmento a, $\sqrt{a}$ puede también construirse utilizando solo la regla y el compás. Sobre una recta llevamos $OA = a$ y $AB = 1$.



Construcción de $\sqrt{a}$.

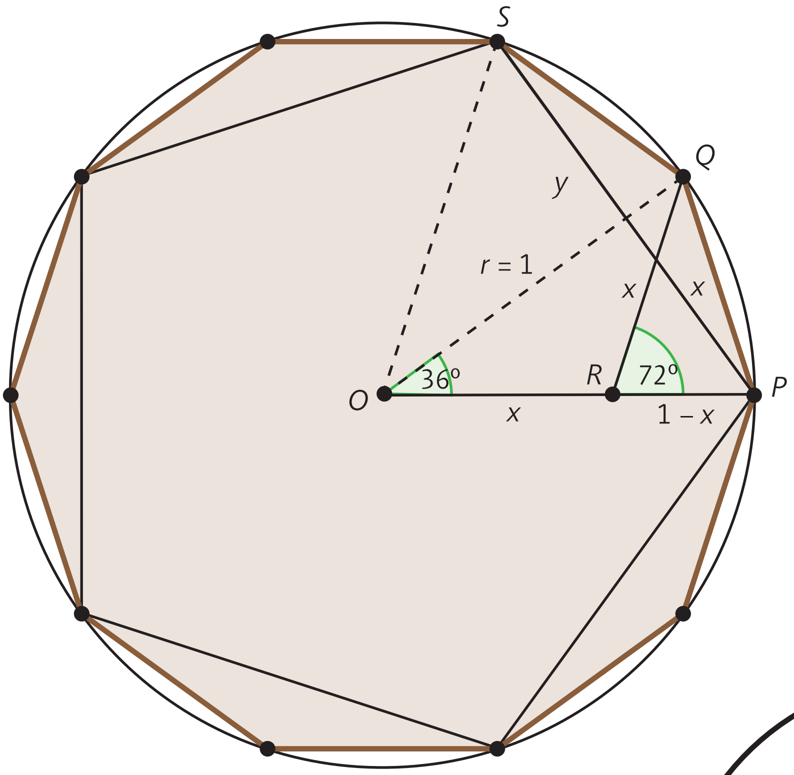
Trazamos una circunferencia con el segmento OB como diámetro y después la perpendicular a OB desde A, la cual corta a la circunferencia en C. El triángulo OBC tiene un ángulo recto en C, ya que es sabido por la geometría elemental que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

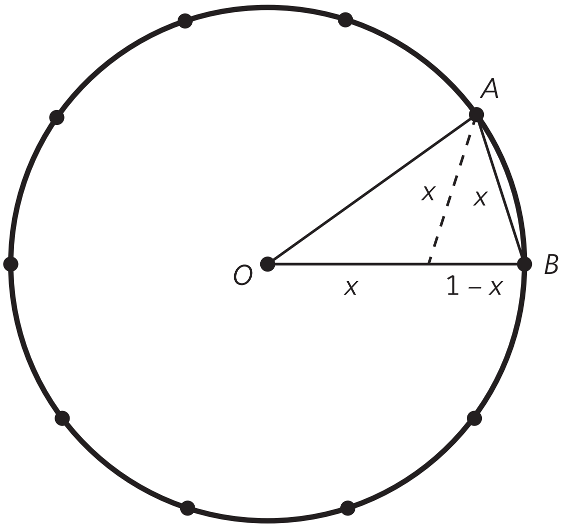
Luego, los ángulos $OCA = ABC$ por ser semejantes los triángulos rectángulos OAC y CAB, y tenemos, para $x = AC$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}, \quad x^2 = a, \quad x = \sqrt{a}.$$

2. Polígonos regulares

Vamos a considerar ahora algunos problemas de construcción algo más complicados. Comencemos por el *decágono regular*. Supongamos que un decágono regular está inscrito en un círculo de radio 1 (figura siguiente)





y llamemos x a su lado. Dado que x subtiende un ángulo central de 36°, los otros dos ángulos del triángulo deben valer cada uno 72°; y, por tanto, la recta de puntos que biseca al ángulo A divide al triángulo OAB en dos triángulos isósceles, cada uno con dos lados iguales de longitud x. El radio del círculo se ha dividido así en dos segmentos, x y $1 - x$. Por ser OAB semejante al triángulo isósceles menor, se tiene

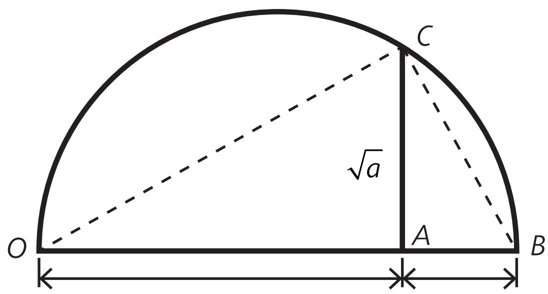
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}.$$

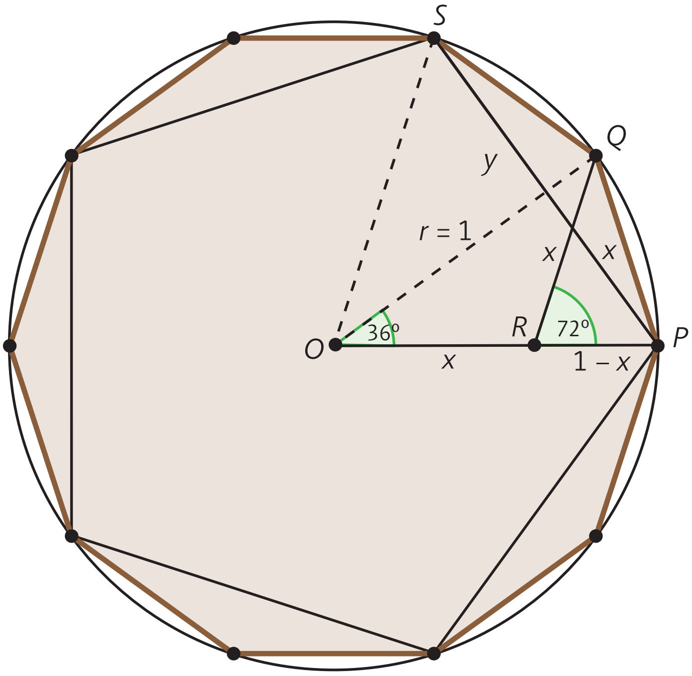
De esta proporción deducimos la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$, una de cuyas soluciones es

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

La otra solución debe desecharse por ser negativa.

De esto resulta evidente que se puede construir geométricamente a x. Teniendo la longitud x podemos ahora construir el decágono regular, llevando su longitud como cuerda del círculo. El pentágono regular puede obtenerse sin más que unir de dos en dos los vértices del decágono regular.



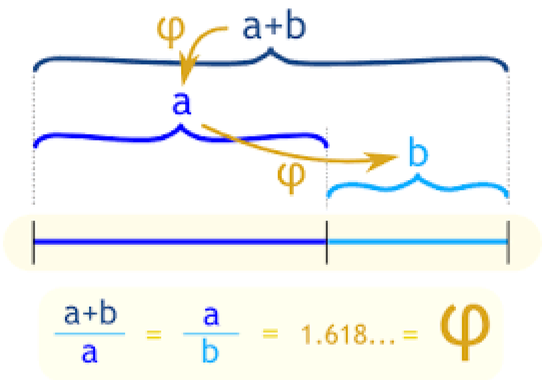


Además de la construcción de $\sqrt{5}$ por el método usado en la primera de las figuras realizadas arriba, podemos también obtenerlo como hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 1 y 2. Resulta x al restar la unidad de $\sqrt{5}$ y dividir el resultado por 2.

Los matemáticos griegos llamaban a la razón *OB* : *AB* del problema precedente el *número áureo*, también conocido como *número de oro*, número de Dios, razón extrema y media, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción. Es un número irracional, representado por la letra griega ϕ (phi) (en minúscula) o Φ (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias. Su valor numérico se representa mediante radicales o decimales:

$$\Phi = 1 + 52 \approx 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ \ldots$$

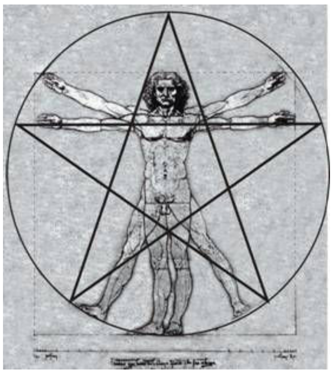
Se puede seguir calculando cifras, aunque nunca se alcanza la última. También se representa con la letra griega tau (Τ τ), por ser la primera letra de la raíz griega que significa acortar, si bien es más común encontrarlo representado con la letra fi (phi) (Φ, ϕ).

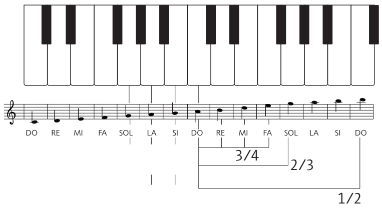


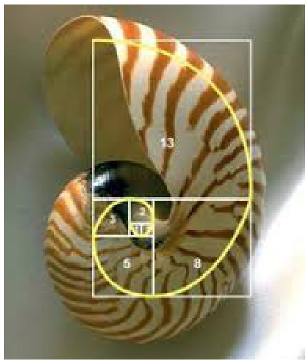
Cálculo del número de oro.

Se trata de un número algebraico irracional (su representación decimal es infinita y no tiene periodo) que posee muchas propiedades interesantes y fue descubierto en la Antigüedad, no como una expresión aritmética, sino como relación o proporción entre dos segmentos de una recta, es decir, una construcción geométrica.

Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza: en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, en el caparazón de un caracol. Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. Algunos incluso creen que posee una importancia mística. A lo largo de la historia, se ha observado su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte. La razón áurea, pues consideraban que un rectángulo cuyos lados estuviesen en esta relación era el más agradable estéticamente. Su valor aproximado, dicho sea de paso, se tomaba como 1,62.

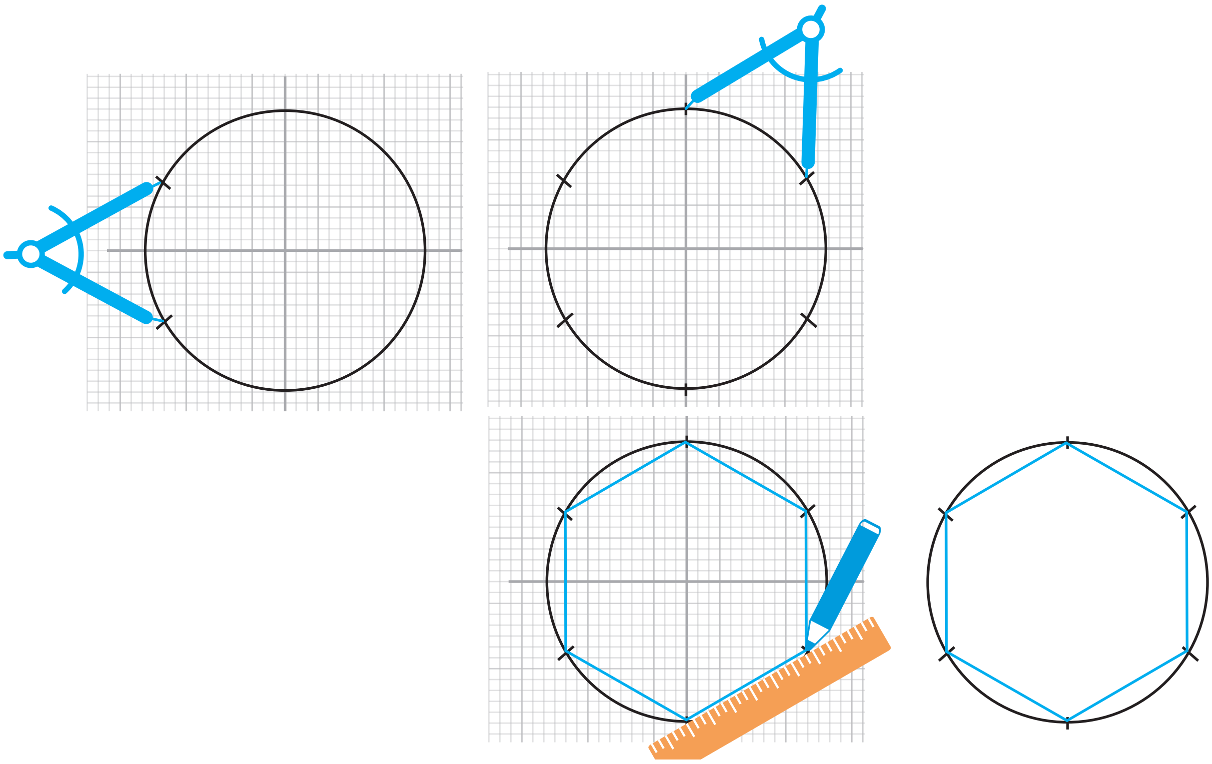




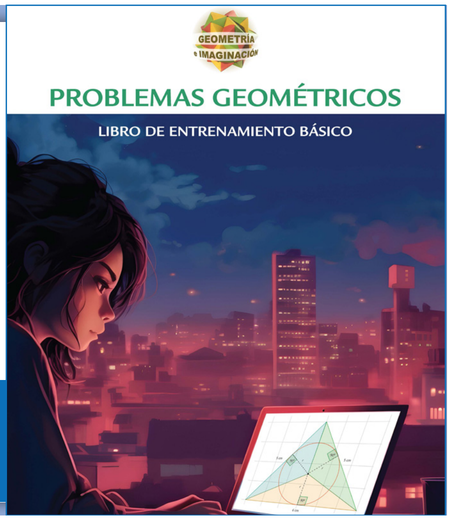


Algunos ejemplos que expresan el número de oro.

De todos los polígonos regulares, el hexágono es el más sencillo de construir. Tracemos un círculo de radio r; la longitud del lado del hexágono regular inscrito en este círculo será entonces igual a r. El hexágono puede construirse llevando a partir de un punto de la circunferencia cuerdas de longitud r hasta obtener los seis vértices.



Construcción de un hexágono.

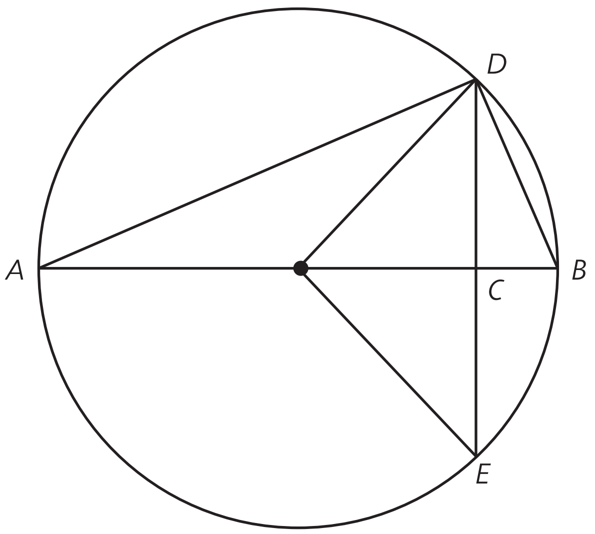


Del n-ágono regular podemos obtener el $2n$-ágono regular bisecando el arco subtendido en la circunferencia circunscrita por cada lado del n-ágono, utilizando también los puntos adicionales así obtenidos como vértices originales del $2n$-ágono pedido. Partiendo del diámetro de la circunferencia (o $2n$-ágono), podemos, por tanto, construir los polígonos de 4, 8, 16, ..., $2n$ lados. Análogamente, es posible obtener los de 12, 24, 48 lados, etc., a partir del hexágono, y los de 20 y 40 lados, etc., partiendo del decágono.

Si S_n designa la longitud del lado del n-ágono regular inscrito en el círculo unidad (círculo de radio 1), entonces el lado del $2n$-ágono regular tiene la longitud

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}.$$

Esto puede demostrarse como sigue: en la figura a continuación



s_n es igual a $DE = 2DC$; $S_{2n} = DB$; $AB = 2$. El área del triángulo rectángulo ABD es

$$\frac{1}{2}BD\cdot AD = \frac{1}{2}AB\cdot CD.$$

Como $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2}$, sustituyendo $AB = 2$, $BD = s_{2n}$, $CD = \frac{1}{2}s_n$, e igualando las dos expresiones del área, resulta

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4-s_{2n}^2} \quad \text{o sea,} \quad s_n^2 = s_{2n}^2\left(4-s_{2n}^2\right).$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática en $x = s_{2n}^2$ y observando que x debe ser menor que 2, se llega fácilmente a la fórmula anterior. De esta fórmula y del hecho de que s_4 (lado del cuadrado) es igual a $\sqrt{2}$, se deduce:

$$S_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad S_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad S_{32} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},, \quad \text{etcétera.}$$

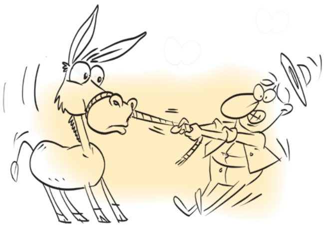
Como fórmula general obtenemos para $n > 2$

$$s_2^n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

que incluye $n - 1$ raíces cuadradas sucesivas. El perímetro del 2^n-ágono regular inscrito será $2^n s_2^n$. Al tender n a infinito, el 2^n-ágono tiende a confundirse con la circunferencia y, en consecuencia, $2^n s_2^n$ tiende a la longitud de la circunferencia del círculo unidad, que por definición es 2π. Obtenemos así, sustituyendo m por $n - 1$ y suprimiendo el factor 2, la fórmula asintótica para π:

$$2^m \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{m \text{ raíces cuadradas}} \to \pi \text{ cuando } m \to \infty.$$

Los resultados obtenidos poseen el siguiente rasgo característico: los lados del 2^n-ágono, del $5 \cdot 2^n$-ágono, y del $3 \cdot 2^n$-ágono pueden construirse mediante procesos de sumas, restas, productos, divisiones y extracciones de raíces cuadradas.

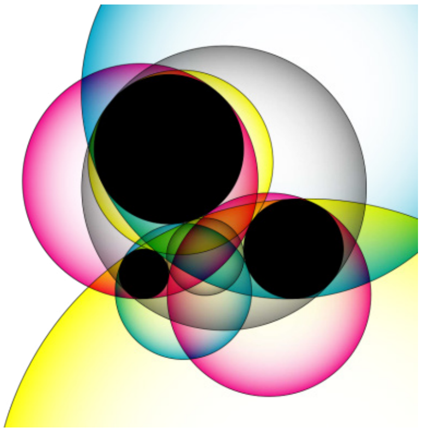


Ejercicio. Puesto que $2^m \to \infty$ demuéstrese que

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ raíces cuadradas}} \to 2 \text{ cuando } n \to \infty.$$

3. Problema de Apolonio

Otro problema de construcción, muy sencillo desde el punto de vista algebraico, es el famoso problema ya mencionado de los círculos tangentes de Apolonio. En lo que sigue no nos es necesario encontrar una construcción particularmente elegante; lo que importa es que, en principio, el problema pueda resolverse con regla y compás solamente. Daremos una breve indicación de la demostración y más adelante veremos un método constructivo más elegante.



Círculos tangentes de Apolonio.

Supongamos que los centros de las circunferencias dadas tengan coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), y radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente. Designemos el centro y el radio del círculo pedido por (x, y) y r. Entonces, la condición para que dicho círculo sea tangente a los tres dados se obtiene observando que la distancia entre los centros de dos círculos tangentes es igual a la suma o diferencia de los radios, según que estos sean tangentes exterior o interiormente. Esto nos da las ecuaciones:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \qquad (1)$$

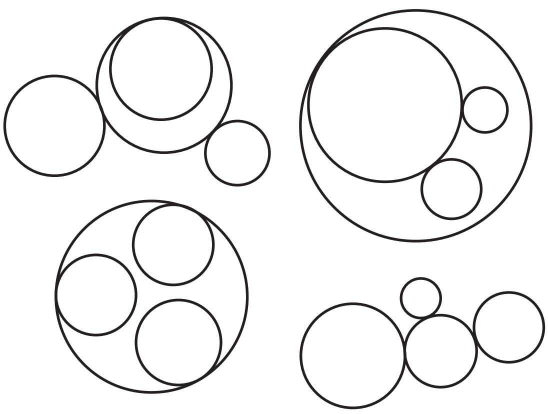
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0 \qquad (2)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0 \qquad (3)$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0. \qquad \text{(1a) etcétera.}$$

El signo $\pm$ debe elegirse en cada una de estas ecuaciones según que las circunferencias sean tangentes exterior o interiormente (véase las figuras a continuación).



Las ecuaciones (1), (2), (3) son cuadráticas con tres incógnitas x, y, r, y en las tres los términos de segundo grado son los mismos, como se ve en la forma desarrollada (1a). Por tanto, restando (2) de (1), obtendremos una ecuación lineal en x, y, r:

$$ax + by + cr = d, \tag{4}$$

donde $a = 2(x_2 - x_1)$, etc. Análogamente, restando (3) de (1) tenemos otra ecuación lineal,

$$a'x + b'y + c'r = d'. \tag{5}$$

Resolviendo (4) y (5) respecto de x e y en función de r, y sustituyendo en (1), tendremos una ecuación cuadrática en r, que puede resolverse por operaciones racionales y extracción de una raíz cuadrada.

En general, habrá dos soluciones para esta ecuación, de las cuales solo una es positiva. Después de determinar r mediante esta ecuación, obtendremos x e y de las dos ecuaciones lineales (4) y (5). El círculo con centro (x, y) y radio r será tangente a los tres círculos dados. En todo el proceso hemos usado solo operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas. Sigue de ello que r, x e y pueden ser construidos con regla y compás.

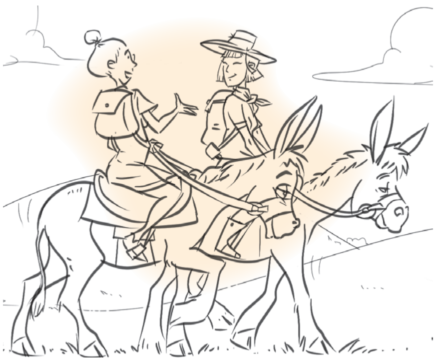
También en general, habrá ocho soluciones para el problema de Apolonio, correspondientes a las $2 \times 2 \times 2 = 8$ combinaciones posibles de los signos más y menos en las ecuaciones (1), (2) y (3). Estas elecciones corresponden a las condiciones de que las circunferencias pedidas sean tangentes exterior o interiormente a cada uno de los tres círculos dados.

Puede ocurrir que nuestro proceso algebraico no nos dé valores reales para x, y y r. Esto sucederá, por ejemplo, si los tres círculos dados son concéntricos, no existiendo entonces solución geométrica del problema. También cabe esperar posibles *degeneraciones* de la solución, como en el caso en que los tres círculos dados degeneren en tres puntos de una recta.

Entonces, el círculo de Apolonio degenera en esta recta. No discutiremos estas posibilidades con detalle; quien tenga alguna experiencia de álgebra podrá completar sin dificultad el análisis.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Qué es la realidad?



Los mágicos números complejos

EL SORPRENDENTE NÚMERO "i"

¿Cómo es posible que –1 tenga una raíz cuadrada? El cuadrado de un número positivo es siempre positivo, y el cuadrado de un número negativo es también positivo (y el cuadrado de 0 es simplemente 0, de modo que de poco nos sirve aquí). Parece imposible que podamos encontrar un número cuyo cuadrado sea realmente negativo. Sin embargo, esta es una situación similar a la que hemos visto antes, cuando establecimos que 2 no tiene una raíz cuadrada dentro del sistema de los números racionales. En ese caso hemos resuelto la situación ampliando nuestro sistema de números desde los racionales a un sistema mayor, y hemos establecido el sistema de los reales. **Tal vez el mismo truco funcione de nuevo**.

Realmente lo hace. De hecho, lo que tenemos que hacer es algo mucho más fácil y menos drástico que el paso de los racionales a los reales. Raphael Bombelli introdujo el procedimiento en 1572 en su obra *El álgebra*, siguiendo los encuentros originales de Girolamo Cardano con los números complejos en su *Ars magna* de 1545. Todo lo que tenemos que hacer es introducir una simple cantidad llamada "i" cuyo cuadrado sea –1, y añadirla al sistema de los reales, permitiendo combinaciones de i con números reales para formar expresiones de la forma

$$a + ib,$$

donde a y b son números reales arbitrarios. Cualquiera de estas combinaciones se denomina un *número complejo*. Es fácil ver cómo se suman los números complejos:

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d),$$

que es de la misma forma que antes (pero ahora los números reales $a + c$ y $b + d$ toman el lugar de los "a" y "b" que teníamos en nuestra expresión original). ¿Qué pasa con la multiplicación? Es casi igual de fácil. Vamos a encontrar el producto de $a + \mathrm{i}b$ por $c + \mathrm{i}d$. En primer lugar, multiplicamos simplemente estos factores, desarrollando la expresión mediante el uso de las reglas ordinarias del álgebra:

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}bc + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}b\mathrm{i}d = ac + \mathrm{i}(bc + ad) + \mathrm{i}^2bd.$$

Pero $\mathrm{i}^2 = -1$, de modo que podemos reescribir esto como

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad),$$

que de nuevo tiene la misma forma que nuestro $a + \mathrm{i}b$ original, pero donde $ac - bd$ toma el lugar de a y $bc + ad$ toma el lugar de b.

Es bastante fácil restar dos números complejos, pero ¿qué pasa con la división? Recordemos que en la aritmética ordinaria nos está permitido dividir por cualquier número real distinto de cero. Tratemos ahora de dividir el número complejo $a + \mathrm{i}b$ por el número complejo $c + \mathrm{i}d$. Debemos tomar este último distinto de cero, lo que significa que los números reales c y d no pueden ambos ser cero. Entonces, $c^2 + d^2 > 0$ y por consiguiente $c^2 + d^2 \neq 0$, de modo que podemos dividir por $c^2 + d^2$. Es un ejercicio directo comprobar (multiplicando ambos miembros de la expresión por $c + \mathrm{i}d$) que

$$\frac{(a+\mathrm{i}b)}{(c+\mathrm{i}d)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Esta expresión es de la misma forma que antes, de modo que es de nuevo un número complejo.

Cuando nos acostumbramos a jugar con estos números complejos, dejamos de pensar en $a + \mathrm{i}b$ como un "par" de objetos, a saber, los dos números reales a y b: ahora pensamos en $a + \mathrm{i}b$ como un "objeto" completo autónomo, de modo que podríamos utilizar una sola letra, digamos z, para denotar el número complejo global $z = a + \mathrm{i}b$. Puede comprobarse que todas las reglas usuales del álgebra son satisfechas por los números complejos. De hecho, todo esto es mucho más sencillo que comprobar cada una de estas cosas para los números reales. (Para esa comprobación, suponemos que se vieron las reglas del álgebra que funcionan para las fracciones, y la *cortadura* de Dedekind para demostrar las reglas que también funcionan para los números reales.) Desde este punto de vista, resulta bastante extraño que los números complejos se vieran con recelo durante mucho tiempo, mientras que la mucho más complicada ampliación de los racionales a los reales había sido aceptada sin problemas después de la época de la Grecia antigua.

Presumiblemente, el motivo de este recelo era que no se podía "ver" que los números complejos se les presentasen de un modo obvio en el mundo físico. En el caso de los números reales existía la sensación de que las distancias, los tiempos y otras magnitudes físicas proporcionaban la realidad que tales números requerían; pero los números complejos parecían ser entidades meramente "inventadas", sacadas de la imaginación de los matemáticos que deseaban números con un alcance mayor que el de los que ya conocían.

Pero habría que recordar que la conexión que tienen los números reales matemáticos con aquellos conceptos físicos de longitud o tiempo no es tan clara como habíamos imaginado. No podemos ver directamente los mínimos detalles de una cortadura de Dedekind, ni está claro que realmente existan en la naturaleza longitudes o tiempos arbitrariamente grandes o arbitrariamente pequeños. Se podría decir que los denominados *números reales* son tan producto de la imaginación de los matemáticos como lo son los *números complejos*. Pese a todo, encontraremos que los números complejos, tanto como los reales, y quizá más incluso, componen una notable unidad con la naturaleza. Es como si la propia naturaleza estuviera tan impresionada por el alcance y la consistencia del sistema de los números complejos como lo estamos nosotros, y hubiera confiado a estos números las operaciones detalladas de su mundo en sus escalas más minúsculas.

Además, mencionar solo el alcance y la consistencia de los números complejos no hace justicia a este sistema. Hay algo que puede ser calificado de "mágico". Durante los cuatro siglos que hace que se conoce el sistema de los números complejos, muchas cualidades mágicas se han ido revelando poco a poco. Pero esta es una magia que se percibía dentro de la matemática, y ofrece una utilidad y una profundidad de intuición matemática que no podía conseguirse solo con el uso de los reales.

No hay ninguna razón para esperar que el mundo físico esté interesado. Y durante los aproximadamente trescientos cincuenta años transcurridos desde la época en que dichos números fueron introducidos en las obras de Cardano y Bombelli, la magia del sistema de los números complejos solo fue percibida a través de su papel matemático. Para todos aquellos que se habían mostrado recelosos de los números complejos, habría sido sin duda una sorpresa encontrar que, según la física de los últimos tres cuartos del siglo XX, las leyes que gobiernan el comportamiento del mundo en sus escalas más minúsculas dependen fundamentalmente del sistema de los números complejos.

Por el momento nos concentramos en una parte de la magia matemática de los números complejos y dejaremos su magia física para más adelante. Recordemos que todo lo que hacemos es exigir que –1 tenga una raíz cuadrada, además de que se mantengan las leyes usuales de la aritmética, y hemos descubierto que dichas exigencias pueden satisfacerse de forma consistente. Esto parece algo bastante simple de hacer. ¡Pero veamos esta magia en la realidad!

RESOLVIENDO ECUACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En lo que sigue, será necesario introducir una notación por medio de la cual, con el tiempo, empezarán a calar ciertas dosis de conocimiento si se hace un pequeño intento por entender lo que todas las expresiones significan realmente. Porque la magia de los números complejos es un milagro que vale la pena apreciar. Si podemos entender la notación matemática, entonces mucho mejor.

Antes que nada, podemos preguntarnos si otros números tienen raíces cuadradas. ¿Qué pasa, por ejemplo, con –2? Esto es fácil. El número complejo $i\sqrt{2}$ ciertamente tiene –2 como cuadrado, y también lo tiene $-i\sqrt{2}$. Más aún, para cualquier número real positivo *a*, el número complejo $i\sqrt{a}$ tiene como cuadrado $-a$, y lo mismo sucede con $-i\sqrt{a}$.

No hay aquí ninguna magia. Pero, ¿qué pasa con el número complejo más general $a + ib$ (donde *a* y *b* son reales)? Encontramos que el número complejo

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

tiene como cuadrado $a + ib$ (y lo mismo sucede con su negativo).

Así pues, vemos que incluso si solo añadimos una raíz cuadrada para una cantidad (a saber, –1), ¡encontramos que todos los números del sistema resultante tienen ahora automáticamente una raíz cuadrada! Esto es muy diferente de lo que sucedía al pasar de los racionales a los reales. En este caso, la mera introducción de la cantidad $\sqrt{2}$ en el sistema de los racionales no nos hubiera llevado casi a ninguna parte.

Pero esto es solo el principio. Podemos pedir raíces cúbicas, raíces quintas, raíces *n*-ésimas, raíces π-ésimas –e incluso raíces i-ésimas–. Milagrosamente, encontramos que para cualquier raíz compleja que escojamos y cualquier número complejo al que la apliquemos (excluyendo el 0), hay siempre una solución compleja a este problema. (De hecho, normalmente habrá varias soluciones diferentes al problema, como veremos dentro de poco. Antes vimos que para raíces cuadradas teníamos dos soluciones, pues el negativo de la raíz cuadrada de un número complejo *z* es también una raíz cuadrada de *z*. Para raíces más altas hay más soluciones.)

Apenas estamos arañando todavía en la superficie de la magia de los números complejos. Lo que acabamos de afirmar es realmente muy fácil de establecer (una vez que tengamos la noción del logaritmo de un número complejo, como seguramente veremos). Algo más notable es el denominado *teorema fundamental del álgebra*, que afirma que cualquier ecuación polinómica, tal como

$$1 - z + z^4 = 0$$

o

$$\pi + iz - \sqrt{417}z^3 + z^{999} = 0,$$

debe tener soluciones con números complejos. Dicho de forma más explícita, siempre habrá una solución (y normalmente, varias diferentes) para cualquier ecuación de la forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n = 0,$$

donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números complejos dados, con el a_n tomado no nulo. Pues es una consecuencia directa de que cualquier polinomio complejo de la sola variable z factoriza en factores lineales, y es a este enunciado al que normalmente se llama el *teorema fundamental del álgebra*. (Aquí, n puede ser cualquier entero positivo que escojamos, tan grande como queramos.)

Recordemos, por analogía, que "i" fue introducida simplemente para proporcionar una solución a la ecuación particular

$$1 + z^2 = 0.$$

¡Todo lo demás lo obtenemos gratis!

Antes de seguir adelante vale la pena mencionar el problema que le interesaba a Cardano, por el 1539, cuando encontró por primera vez los números complejos y captó un indicio en otro aspecto de sus propiedades mágicas inherentes. Dicho problema era, en efecto, encontrar una expresión para la solución general de una ecuación (real) cúbica (es decir, $n = 3$). Cardano encontró que la cúbica general podía reducirse mediante una sencilla transformación a la forma

$$x^3 = 3px + 2q.$$

Aquí p y q son números reales (y he vuelto a utilizar x en la ecuación, en lugar de z, para indicar que ahora estamos interesados en soluciones reales, en lugar de complejas). La solución completa de Cardano (tal como la publicó en 1545 en su libro *Ars magna*) parece haber sido desarrollada a partir de una solución parcial anterior que había aprendido en 1539 de Niccolò Fontana ("Tartaglia"), aunque esta solución parcial (y quizá incluso la solución completa) había sido encontrada previamente (antes de 1526) por Scipione del Ferro.

La historia es que Tartaglia había revelado su solución parcial a Cardano solo después de que este hubiera jurado guardar el secreto. Por lo tanto, Cardano no podía publicar su solución más general sin romper su juramento. Sin embargo, en un viaje posterior a Bolonia, en 1543, examinó los papeles póstumos de Del Ferro y se convenció de la prioridad real de este. Consideró que esto lo dejaba libre para publicar todos estos resultados (con los debidos reconocimientos a Tartaglia y Del Ferro) en *Ars magna* en 1545. Tartaglia discrepó y la disputa tuvo consecuencias muy amargas.

La solución de (Del Ferro-)Cardano era en esencia la siguiente (escrita en notación moderna):

$$x = (q + w)^{\frac{1}{3}} + (q - w)^{\frac{1}{3}},$$

donde

$$w = (q^2 - p^3)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta ecuación no plantea ningún problema fundamental dentro del sistema de los números reales si

$$q^3 \geq p^3.$$

En este caso solo hay una solución real x a la ecuación, y viene dada correctamente por la fórmula de Del Ferro-Cardano expuesta antes. Pero si

$$q^2 < p^3,$$

el denominado *caso irreducible*, entonces, aunque ahora hay tres soluciones reales, la fórmula incluye la raíz cuadrada del número *negativo* $q^2 - p^3$ y por ello no puede ser utilizada sin introducir los números complejos.

De hecho, como Bombelli demostró más tarde, si admitimos los números complejos, entonces las tres soluciones reales están correctamente expresadas por la fórmula. Esto tiene sentido porque la expresión nos proporciona dos números complejos sumados, y las partes que contienen "i" se cancelan en la suma para dar una respuesta real. La razón para esto es que estamos sumando dos números que son mutuamente complejos conjugados, y una suma semejante es siempre un número real.

Lo que hay de misterioso en esto es que, aunque pudiera parecer que el problema no tiene nada que ver con los números complejos –pues la ecuación tiene coeficientes reales y todas sus soluciones son reales (en este caso, *irreducible*)–, tenemos que viajar por este territorio en apariencia ajeno del mundo de los números complejos para que la fórmula nos permita regresar con nuestras soluciones puramente reales. Si nos hubiéramos restringido al recto y estrecho camino "real", habríamos vuelto con las manos vacías. Resulta irónico que solo puede haber soluciones complejas a la ecuación original en aquellos casos en que la fórmula no implica necesariamente este viaje por los complejos.

CONVERGENCIA DE SERIES DE POTENCIAS

A pesar de estos hechos notables, aún no hemos ido muy lejos en la magia de los números complejos. ¡Queda mucho más por venir! Por ejemplo, algo en que los números complejos resultan verdaderamente inestimables es en ofrecer una comprensión del comportamiento de lo que se denomina *series de potencias*. Una serie de potencias es una suma *infinita* de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Puesto que esta suma implica un número infinito de términos, puede darse el caso de que la serie diverja, lo que significa que no se asienta en un valor particular finito a medida que se suman más términos. Por ejemplo, consideremos la serie

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

(donde tomando $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1, \dots$). Si hacemos $x = 1$, entonces, sumando los términos sucesivamente, obtenemos

$$1,\quad 1 + 1 = 2,\quad 1 + 1 + 1 = 3,\quad 1 + 1 + 1 + 1 = 4,\quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5,\quad \text{etc.},$$

y vemos que la serie no tiene posibilidad de asentarse en un valor particular finito, es decir, es divergente. Las cosas son aún peores si probamos con $x = 2$, por ejemplo, puesto que ahora los términos individuales son más grandes, y sumando términos sucesivamente obtenemos

$$1,\ 1 + 4 = 5,\ 1 + 4 + 16 = 21,\ 1 + 4 + 16 + 64 = 85,\ \text{etc.},$$

que claramente diverge. Por el contrario, si hacemos $x = 1/2$, obtenemos

$$1,\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16},\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{85}{64},\ \text{etc.},$$

y resulta que estos números se acercan cada vez más al valor límite $4/3$, de modo que la serie es ahora *convergente*.

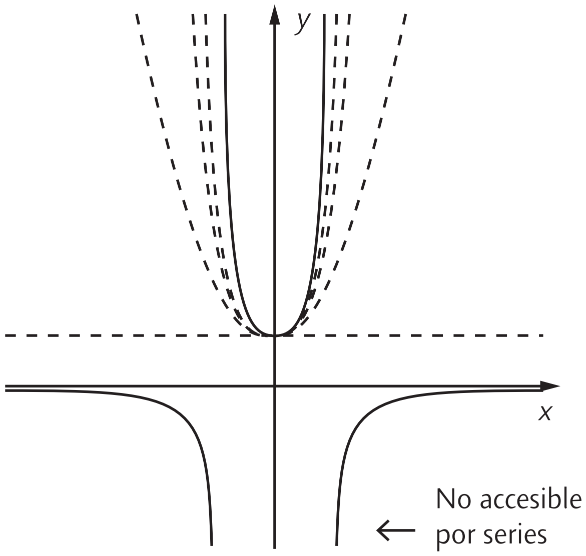
Con esta serie no es difícil darse cuenta de que, en cierto sentido, hay una razón subyacente por la que la serie no puede sino divergir para $x = 1$ y $x = 2$, mientras que converge para $x = 1/2$ para dar la respuesta $4/3$. En efecto, podemos escribir explícitamente la "respuesta" a la suma de toda la serie, encontrando

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots = (1 - x^2)^{-1}.$$

Cuando sustituimos $x = 1$, encontramos que esta respuesta es $(1 - 1^2)^{-1} = 0^{-1}$, que es "infinito". Recordemos que 0^{-1} debería significar $1/0$, es decir, "uno dividido por cero". Una abreviatura conveniente para expresar el "resultado" de esta operación ilegal es "$0^{-1} = \infty$"; y esto nos permite entender por qué la serie tiene que divergir para ese valor de x. Cuando sustituimos $x = 1/2$, la respuesta es $1-\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$, y la serie converge realmente a este valor concreto, tal como lo dijimos antes.

Todo esto parece muy razonable. Pero ¿qué pasa con $x = 2$? Ahora hay una "respuesta" dada por la fórmula explícita, a saber $(1 - 4)^{-1} = -1/3$, aunque no parece que obtengamos dicho valor sumando simplemente los términos de la serie.

Difícilmente podríamos obtener esta respuesta porque estamos sumando cantidades positivas, mientras que $-1/3$ es negativo. La razón de que la serie diverja es que, cuando $x = 2$, cada término es mayor que el término correspondiente para $x = 1$, de modo que la divergencia para $x = 2$ se sigue lógicamente de la divergencia para $x = 1$. En el caso $x = 2$ no se trata de que la "respuesta" sea realmente infinita, sino de que no podemos llegar a esta respuesta intentando sumar la serie directamente. En la figura hemos representado las sumas parciales de la serie



Se representan las respectivas sumas parciales 1, $1 + x^2$, $1 + x^2 + x^4$, $1 + x^2 + x^4 + x^6$ (líneas de trazos) de la serie para $(1 - x^2)^{-1}$, que ilustran la convergencia de la serie para $(1 - x^2)^{-1}$ para $|x| < 1$ y la divergencia para $|x| > 1$.

(es decir, las sumas hasta cierto número finito de términos), sucesivamente hasta cuatro términos, al lado de la "respuesta" $(1 - x^2)^{-1}$ y podemos ver que, con tal de que x esté comprendida estrictamente entre los valores –1 y +1, las curvas que muestran estas sumas parciales convergen realmente a esta respuesta, a saber, $(1 - x^2)^{-1}$, como cabía esperar. Pero fuera de este intervalo, la serie simplemente diverge y no llega realmente a ningún valor finito.

A modo de pequeña digresión será útil abordar aquí una cuestión que tendrá importancia para nosotros más adelante. Planteemos la siguiente pregunta: la ecuación que obtenemos haciendo $x = 2$ en la expresión anterior, es decir,

$$1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + \ldots = (1 - 2^2)^{-1} = -\frac{1}{3},$$

¿tiene sentido realmente? El gran matemático del siglo XVIII Leonhard Euler solía escribir ecuaciones como esta, y llegó a ser una moda hacer bromas a sus expensas por sostener tales absurdos, aunque se le podrían perdonar sobre la base de que en aquellos primeros días no se entendía adecuadamente nada relativo a la "convergencia" de series y cosas similares. De hecho, lo cierto es que el tratamiento matemático riguroso de las series no llegó hasta finales del siglo XVIII y principios del XIX, con la obra de Augustin Cauchy y otros. Además, según este tratamiento riguroso, la ecuación anterior sería clasificada oficialmente como "sin sentido".

Pese a todo, creo que es importante darse cuenta de que, en el sentido adecuado, Euler sabía bien lo que estaba haciendo cuando escribía absurdos aparentes de esta naturaleza, y que hay sentidos en los que la ecuación anterior debe considerarse "correcta".

En matemáticas es realmente imperativo dejar absolutamente claro que las ecuaciones que se obtienen tienen un sentido estricto y preciso. Sin embargo, es asimismo importante no ser insensible a "lo que sucede fuera de escena", que en última instancia puede llevar a intuiciones más profundas. Es fácil perder de vista tales cosas si nos atenemos de forma demasiado rígida a lo que parece ser estrictamente lógico, como es el hecho de que la suma de los términos positivos $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \ldots$ no puede ser –1/3 de ningún modo.

Como ejemplo pertinente, recordemos el absurdo lógico de encontrar una solución real a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. No hay solución; pero si nos quedamos en esto, perderemos todas las intuiciones profundas que proporciona la introducción de los números complejos. Un comentario similar es aplicable a lo absurdo de una solución racional a $x^2 = 2$. De hecho, es perfectamente posible dar un sentido matemático a la respuesta "–1/3" a la serie infinita anterior, pero hay que tener cuidado con las reglas que nos dicen lo que está permitido y lo que no está permitido.

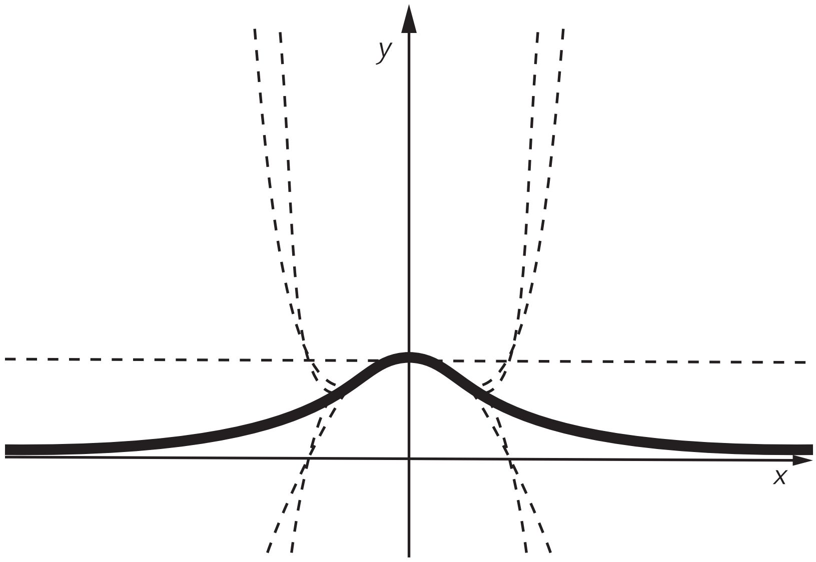
No es la intención discutir aquí estas cuestiones en detalle, pero habría que señalar que en la física moderna, especialmente en el área de la teoría cuántica de campos, es frecuente encontrar series divergentes de este tipo. Es una cuestión muy delicada la de decidir si las “respuestas” que se obtienen de este modo son realmente significativas y, además, realmente correctas. A veces se obtienen respuestas muy precisas manipulando tales expresiones divergentes, y en ocasiones son mágicamente confirmadas al compararlas con experimentos físicos reales. Otras veces, por el contrario, no se tiene tanta suerte.

Estas delicadas cuestiones desempeñan papeles importantes en las teorías físicas actuales y son muy relevantes en nuestros intentos de evaluarlas. El punto de relevancia inmediata para nosotros aquí es que el *sentido* que podemos ser capaces de atribuir a semejantes expresiones aparentemente sin significado depende con frecuencia, y de un modo esencial, de las propiedades de los números complejos. Volvamos a la cuestión de la convergencia de series y tratemos de ver cómo encajan los números complejos en la imagen.

Para ello, consideremos una función tan solo ligeramente diferente de $(1 - x^2)^{-1}$, a saber, $(1 + x^2)^{-1}$ y tratemos de ver si tiene un desarrollo razonable en serie de potencias. Ahora parece haber una mejor oportunidad de convergencia completa, puesto que $(1 + x^2)^{-1}$ se mantiene suave y finita, sobre todo el intervalo de los números reales. Existe, de hecho, una serie de potencias de apariencia sencilla para $(1 + x^2)^{-1}$ tan solo ligeramente diferente de la que teníamos antes, a saber

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots = (1 + x^2)^{-1},$$

donde la diferencia es meramente un cambio de signo en términos alternos. La razón para esto es que estamos sumando dos números que son mutuamente complejos conjugados, y una suma así es siempre un número real. En la figura siguiente



Del mismo modo se representan las sumas parciales 1, $1 - x^2$, $1 - x^2 + x^4$, $1 - x^2 + x^4 - x^6$, $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$, de la serie para $(i + x^2)^{-1}$, y de nuevo hay convergencia para $|x| < 1$ y divergencia para $|x| > 1$, pese al hecho de que la función tiene un comportamiento perfectamente bueno en $x = \pm 1$.

hemos representado las sumas parciales de la serie, sucesivamente hasta cinco términos, de modo similar a lo que hemos hecho antes, junto con esta respuesta $(1 + x^2)^{-1}$. Lo que parece sorprendente es que las sumas parciales siguen convergiendo a la respuesta solo en el intervalo estricto entre los valores –1 y +1. Parece que vamos a obtener una divergencia fuera de este intervalo, incluso si la respuesta no tiende, ni mucho menos a infinito, a diferencia de nuestro caso anterior. Podemos comprobar esto de forma explícita utilizando los mismos tres valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 1/2$ que hemos utilizado antes, encontrando que, como antes, la convergencia ocurre solo en el caso $x = 1/2$, para el que la respuesta da correctamente el valor límite 4/5 para la suma de la serie entera:

$$x = 1\text{: } 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \text{etc.},$$

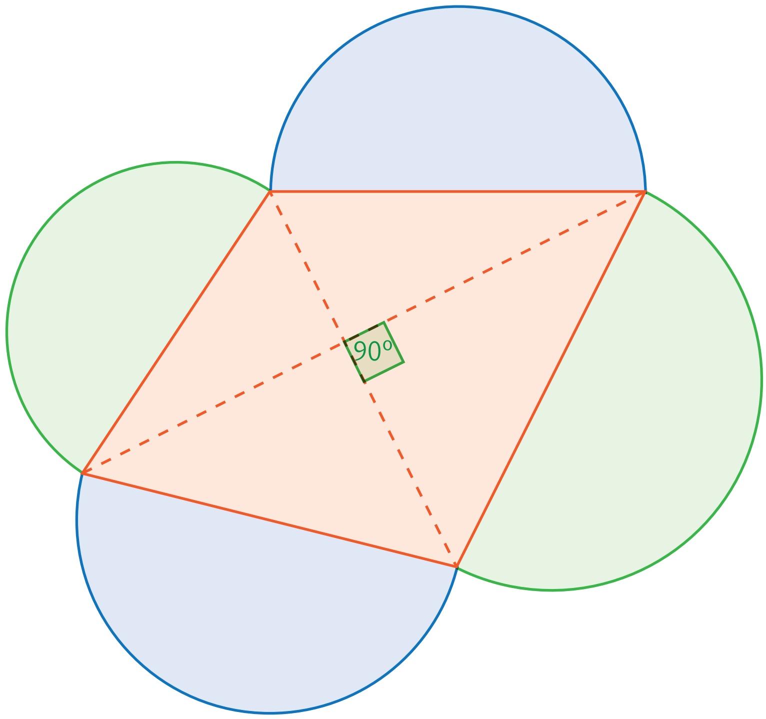
$$x = 2\text{: } 1, -3, 13, -51, 205, -819, \text{etc.},$$

$$x = \frac{1}{2}\text{: } 1, \frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{51}{64}, \frac{205}{256}, \frac{819}{1024}, \text{ etc.}$$

Advertimos que la *divergencia* en el primer caso consiste simplemente en que las sumas parciales de la serie no llegan nunca a asentarse, aunque no divergen realmente a infinito.

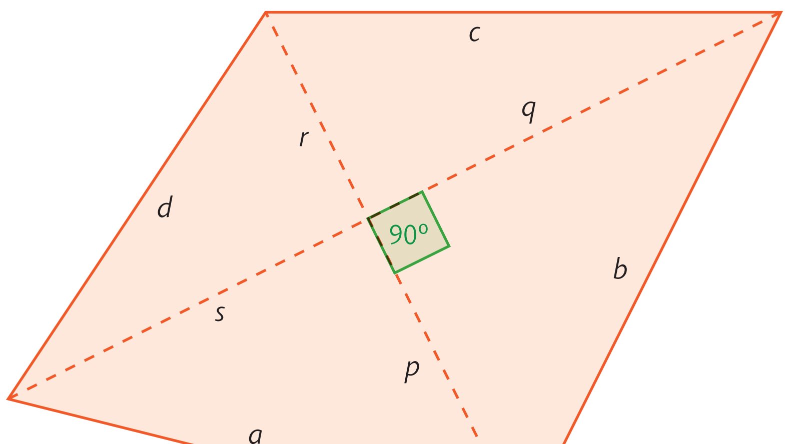
Así pues, si solo se consideran números reales, hay una discrepancia enigmática entre sumar realmente la serie y pasar directamente a la *respuesta* que se supone que representa la suma infinita de la serie. Las sumas parciales simplemente *despegan* (o más bien oscilan incontroladamente arriba y abajo) precisamente en los mismos lugares (a saber, $x = \pm 1$) donde surgían problemas en el caso anterior, aunque ahora la supuesta respuesta a la suma infinita, a saber $(1 + x^2)^{-1}$, no muestra ninguna característica notable en dichos lugares. Encontraremos la solución a este misterio si examinamos valores complejos de esta función en lugar de restringir nuestra atención a los reales.

En el cuadrilátero de la figura, las diagonales se cortan en ángulo recto. Mostrar que los semicírculos azules totalizan la misma área que la que totalizan los semicírculos verdes.



Solución

Notemos con a, b, c y d las longitudes de los lados del cuadrilátero y con p, q, r y s los segmentos en los que se descomponen las diagonales a partir de su punto de intersección.



Por el *teorema de Pitágoras* se tiene:

$$a^2 = s^2 + p^2,\ b^2 = q^2 + p^2$$

de donde:

$$a^2 - b^2 = s^2 - q^2.$$

En forma similar se puede establecer la igualdad:

$$d^2 - c^2 = s^2 - q^2.$$

De las igualdades precedentes resulta:

$$a^2 + c^2 = b^2 + c^2.$$

La suma de las áreas de los semicírculos azules está dada por:

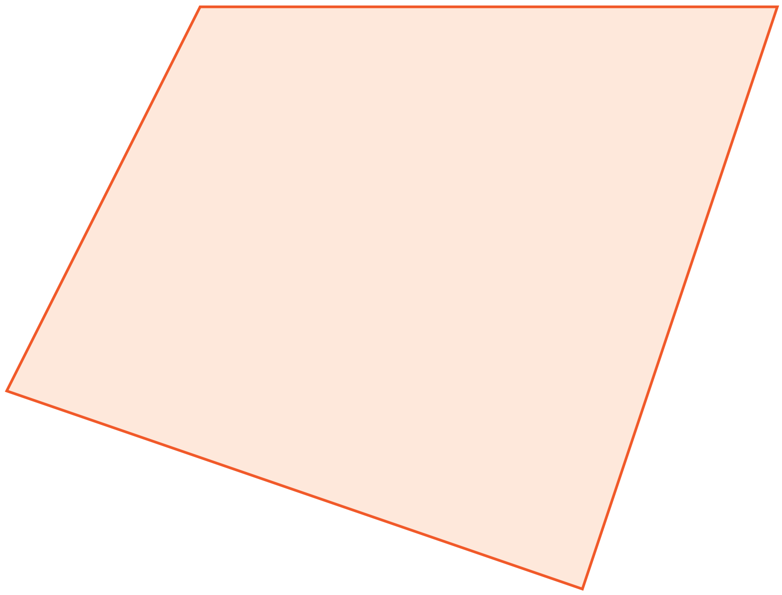
$$\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{a^2 + c^2}{4}$$

y la suma de las áreas de los semicírculos verdes es:

$$\pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{b^2 + d^2}{4}.$$

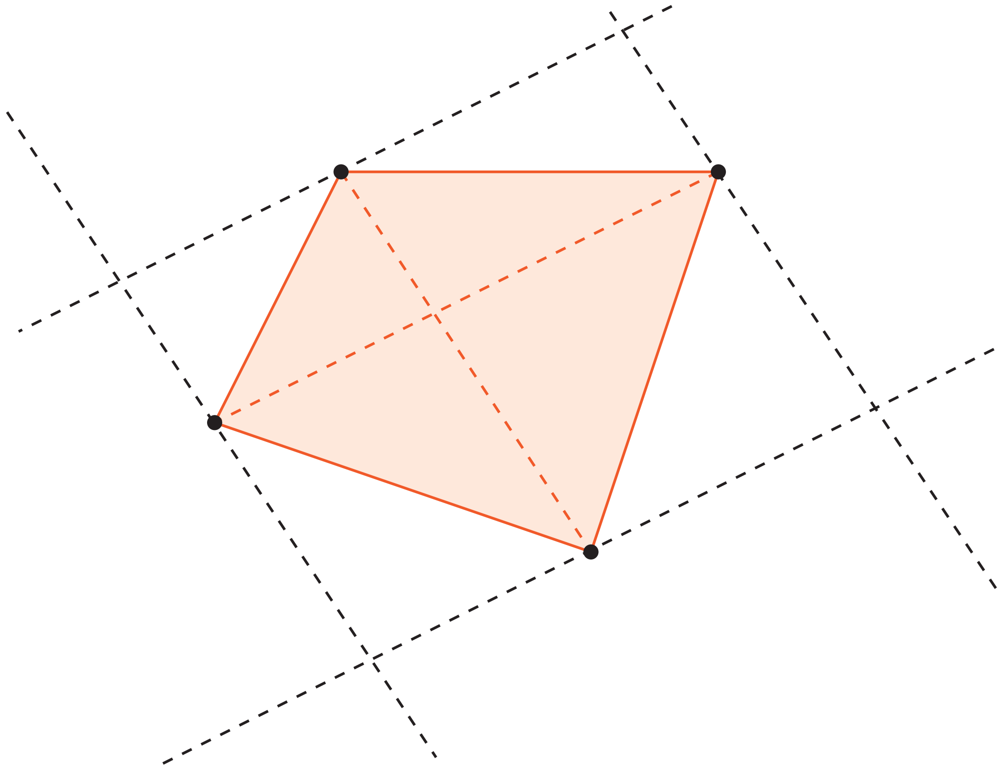
Luego, ambas sumas toman el mismo valor dado que $a^2 + c^2 = b^2 + c^2$.

Indicar cómo inscribir el cuadrilátero de la figura en un paralelogramo cuya área sea el doble del área del cuadrilátero.

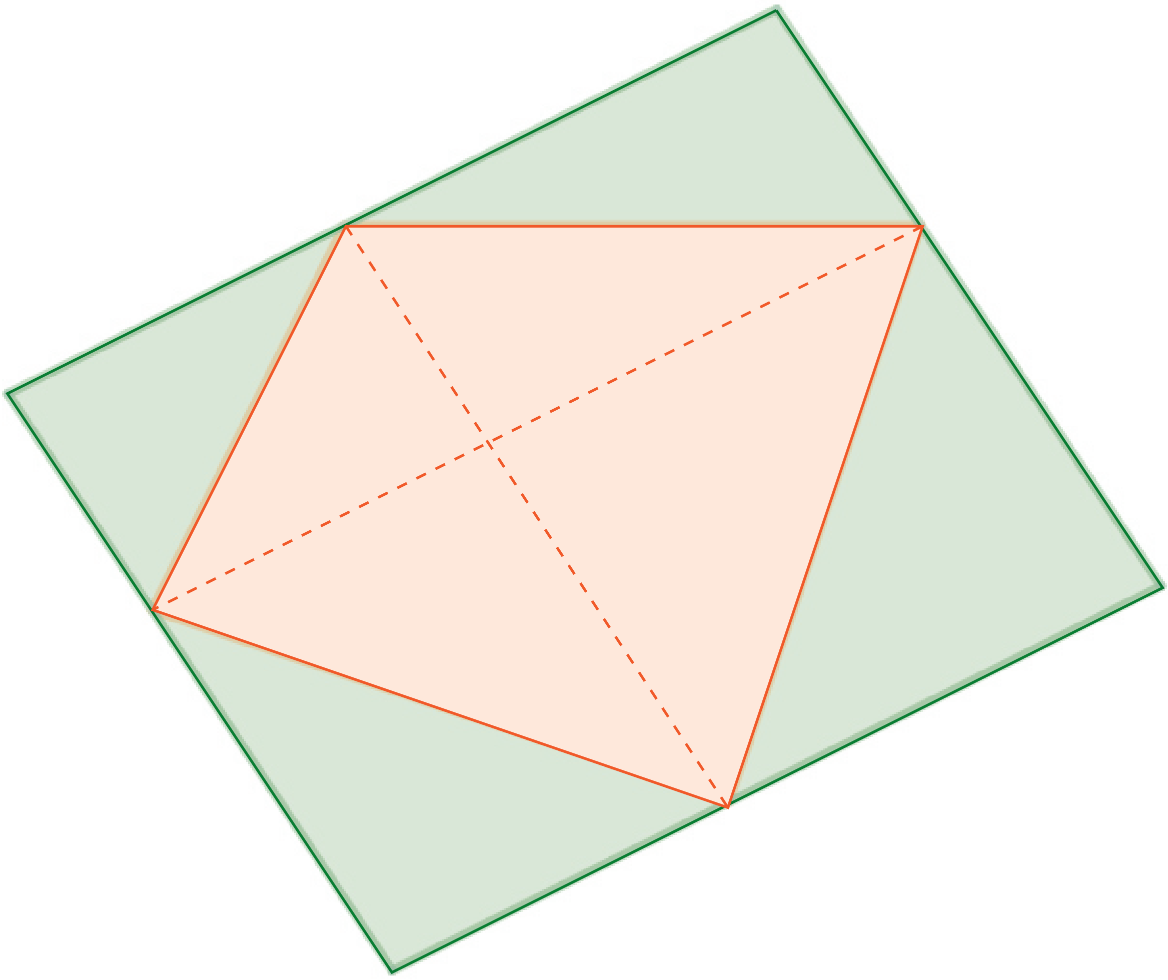


Solución

Si por cada vértice del cuadrilátero trazamos una paralela a la diagonal del cuadrilátero que no contiene al vértice, como muestra la figura a continuación:



las rectas trazadas delimitan un paralelogramo circunscripto al cuadrilátero.



Las diagonales del cuadrilátero descomponen al paralelogramo en 4 paralelogramos y al cuadrilátero en 4 triángulos. Cada uno de estos triángulos tiene la mitad del área de uno de los paralelogramos; luego, el área del paralelogramo circunscripto es el doble del área del cuadrilátero.