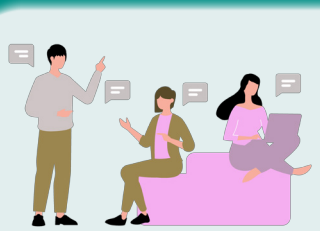
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

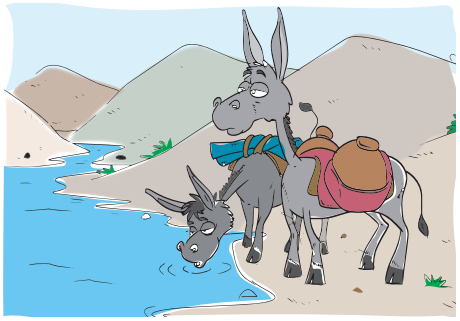
7ª época • Nº 8 • 3 de julio de 2025



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

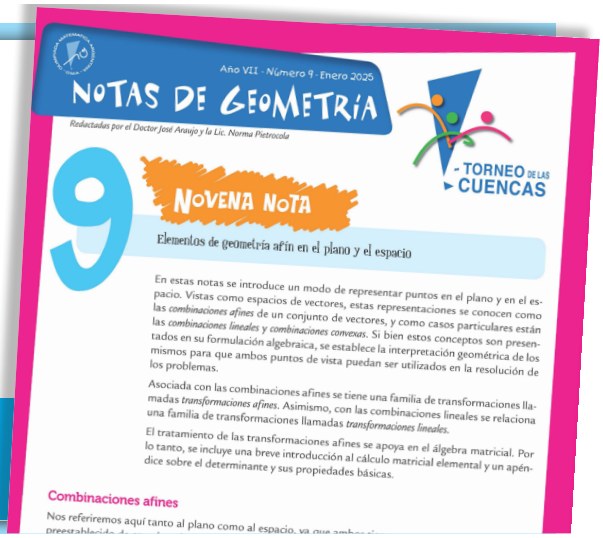


Boole y el análisis de la lógica

Mientras los matemáticos de los *Trinity Colleges* William Rowan Hamilton y Arthur Cayley (el primero de Dublín y el segundo de Cambridge) desarrollaban sus dos tipos de álgebra nuevos, otro matemático inglés estaba inventando ya un tercer tipo de álgebra, radicalmente diferente de los anteriores. Se trataba del matemático esencialmente autodidacta George Boole (1815-1864). Boole nació en una familia de clase social baja y pobre, hijo de un modesto comerciante de Lincoln, y recibió únicamente la educación elemental usual, pero estudió por su cuenta griego y latín, con la idea de que estos conocimientos lo ayudarían a mejorar su posición social.

Durante sus primeros años como maestro de escuela primaria, se dio cuenta de que tenía que aprender más matemática, y comenzó a estudiar a fondo las obras de Pierre-Simon Laplace y de Joseph-Louis Lagrange a la vez que estudiaba otros idiomas. Hizo amistad con Augustus De Morgan y siguió con vivo interés una controversia sobre lógica que había suscitado el filósofo escocés sir William Hamilton (1788-1856) con De Morgan. No debemos confundir al filósofo escocés sir William Hamilton con el matemático irlandés sir William Rowan Hamilton (1805-1865); ambos eran nobles: el escocés sir William era un barón que había heredado su título y el irlandés sir William, un caballero que se había ganado el suyo.

Elementos de geometría afín en el plano y en el espacio



red olímpica

fenchu@oma.org.ar
11 4826 8976
+54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!
En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

El resultado fue que Boole publicó en 1847 un librito titulado *The Mathematical Analysis of Logic*, obra que De Morgan consideró como de las que marcan una época. La historia de la lógica se puede dividir, si nos permitimos un pequeño exceso de simplificación, en tres etapas: 1) la lógica griega; 2) la lógica escolástica; y 3) la lógica matemática. En la primera etapa las fórmulas lógicas se enunciaban con palabras del lenguaje ordinario, sujetas naturalmente a las reglas sintácticas usuales. Durante la segunda etapa, la lógica se abstrajo del lenguaje ordinario, caracterizándose por unas reglas sintácticas diferenciadas y unas funciones semánticas especiales.

En la tercera etapa, la lógica quedó marcada por el uso de un lenguaje artificial en el que los signos y palabras estaban regidos por una sintaxis exacta y tenían una función semántica estrechamente delimitada y definida también exactamente. Mientras que en las dos primeras etapas los teoremas lógicos se *derivaban* del lenguaje usual, en la tercera la lógica procede de manera contraria: primero *construye* un sistema puramente formal, y solo más tarde busca una interpretación en el lenguaje diario.

Aunque a veces se considera a Gottfried Leibniz como un precursor de este último punto de vista, lo cierto es que su fecha concreta de nacimiento es el año en que aparecieron el primer libro de Boole, así como la *Formal Logic* de De Morgan. La obra de Boole en particular insistía en que la lógica debería estar asociada a la matemática más bien que a la metafísica, como sostenía el escocés sir William Hamilton.

Más importante incluso que su lógica matemática era la concepción de la matemática misma por parte de Boole. En la "Introducción" a *The Mathematical Analysis of Logic,* protesta contra la definición de la matemática que se admitía entonces como la ciencia del número y de la magnitud (definición que se puede ver aún en los malos diccionarios e incluso en algunos buenos). Boole escribía, defendiendo un punto de vista mucho más general:

> "**Podríamos asignarle con justicia el carácter definitivo de un verdadero cálculo, que es un método que se basa en el uso de símbolos, cuyas leyes de combinación son conocidas y generales, y cuyos resultados admiten una interpretación consistente [...] Es precisamente sobre la base de este principio general sobre la que me propongo edificar el cálculo de la lógica, y en virtud de la que reclamo para este un lugar entre las formas reconocidas del análisis matemático**".

George Peacock sugería ya en su *Algebra* de 1830 que los símbolos que aludían a objetos en álgebra no necesitaban representar números, y De Morgan sostenía que las interpretaciones de los símbolos que indicaban operaciones también podían ser arbitrarias; pues bien, Boole llevó este formalismo a su conclusión natural. Ya no se podía limitar a la matemática al estudio de las cuestiones relativas al número y la magnitud continua. Aquí se expresa por primera vez claramente la idea de que la característica esencial de la matemática no es tanto su contenido como su *forma*.

Si un tema cualquiera se presenta de tal manera que consista únicamente en símbolos y en reglas precisas para operar con estos, sujeto todo ello solamente a una exigencia de consistencia interna, entonces este tema constituye una parte de la matemática. A pesar de que *The Mathematical Analysis of Logic* no tuvo demasiado éxito, probablemente fue debido a la influencia de esta obra el hecho de que Boole fuese nombrado dos años más tarde profesor de matemáticas en el recién creado *Queens College* en Cork.

Un gran matemático y filósofo del siglo XX, Bertrand Russell, sostenía que el máximo descubrimiento del siglo XIX fue el de la naturaleza de la matemática pura. Y añadía a esta afirmación las palabras: "La matemática pura fue descubierta por Boole en una obra que tituló *An Investigation of the Laws of Thought*". Russell se refiere en su afirmación a la obra más conocida de Boole, publicada en 1854, pero para ser más exactos podría haber sido mejor citar el libro anterior de 1847, en el que presentaba casi los mismos puntos de vista.

EL ÁLGEBRA DE BOOLE

An Investigation of the Laws of Thought de Boole, de 1854, es ya una obra clásica en la historia de la matemática, porque en ella extendió y clarificó las ideas presentadas en 1847, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra, que conocemos hoy como *álgebra de Boole* y que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el de la lógica.

Boole utilizaba las letras *x, y, z,* ..., para representar objetos cualesquiera de un cierto subconjunto de cosas (números, puntos, ideas u otras entidades) seleccionadas de un conjunto universal o universo del discurso, cuya totalidad se representaba por el símbolo o *número* 1.

Por ejemplo, si el símbolo 1 representaba al conjunto de todos los europeos, *x* podría representar a todos los europeos que son ciudadanos franceses, *y* podría representar a todos los hombres europeos de más de 21 años, y *z* podría representar a todos los europeos que miden entre 1,50 y 1,80 metros de estatura. El símbolo o *número* 0, lo tomó Boole para representar el conjunto vacío, que no contiene ningún elemento del conjunto universal.

El signo + entre dos letras o símbolos, como en $x + y$, lo consideró representando la unión de los subconjuntos *x* e *y* es decir, el conjunto formado por los elementos que figuran en *x* o en *y* o en ambos.

El signo de multiplicación × representaba la intersección de conjuntos, de manera que $x \times y$ significaba el conjunto de todos los elementos que están simultáneamente en el subconjunto *x* y en el subconjunto *y*. En el ejemplo anterior, $x + y$ consistiría en el conjunto de todos los europeos que o son ciudadanos franceses o son hombres y tienen más de 21 años, o las dos cosas simultáneamente; $x \times y$ (que se escribe también como $x \cdot y$, o simplemente xy) sería el conjunto de los ciudadanos franceses que son hombres y tienen más de 21 años.

Boole, al contrario de De Morgan, utilizaba la unión excluyente, no permitiendo que hubiera elementos comunes entre *x* e *y*, pero en el álgebra de Boole moderna se considera más conveniente tomar la operación + como la unión usual, no excluyente de conjuntos que pueden tener elementos comunes. El signo = representa también aquí la relación de identidad (en el sentido extensional para conjuntos).

Es inmediato comprobar que las cinco leyes fundamentales del álgebra se verifican en cualquier álgebra de Boole de conjuntos, es decir que $x + y = y + x$, $xy = yx$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ y $x(y + z) = xy + xz$. Sin embargo, no todas las reglas del álgebra usual siguen siendo válidas. Por ejemplo, se tiene evidentemente que $1 + 1 = 1$ y que $x \cdot x = x$ (la segunda propiedad aparece en la obra de Boole, pero no la primera, por utilizar la unión excluyente).

La ecuación $x^2 = x$ tiene, en el álgebra ordinaria, las dos únicas raíces $x = 0$ y $x = 1$; a este respecto, el álgebra de la lógica y el álgebra ordinaria están de acuerdo. La misma ecuación $x^2 = x$, si la escribimos en la forma $x(1 - x) = 0$, sugiere claramente que $1 - x$ debería representar al complemento del conjunto *x*, es decir, al conjunto de todos los elementos del conjunto universal 1 que no están en el subconjunto *x*. Aunque en el álgebra de Boole es cierto que $x^3 = x$ o bien que $x(1 - x^2) = 0$ o que $x(1 - x)(1 + x) = 0$, la solución en el álgebra ordinaria difiere de la del álgebra de Boole, en la que no hay "números" negativos.

El álgebra de Boole difiere también del álgebra usual en que de la igualdad $zx = zy$, donde *z* es un conjunto no vacío, es decir, no nulo, no se deduce necesariamente que $x = y$; ni tampoco es cierto que si $xy = 0$, entonces o bien *x* o bien *y* tengan que ser 0, obviamente.

Boole demostró que su tipo general de álgebra suministraba un algoritmo fácil para el razonamiento silogístico. La ecuación $xy = x$, por ejemplo, expresa elegantemente que todos los *x* son *y*; si se sabe también que $yz = y$, es decir, que todos los *y* son *z*, entonces, sustituyendo en la primera ecuación el valor de *y* dado por la segunda, el resultado obtenido es $x(yz) = x$. Utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, esta última ecuación queda en la forma $(xy)z = x$, y sustituyendo xy por *x*, nos queda finalmente que $xz = x$, que es simplemente la manera simbólica y compacta de decir que todos los *x* son *z*.

The Mathematical Analysis of Logic (1847) y, por supuesto, *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) contienen muchas más cosas que el álgebra de conjuntos que hemos esbozado. La segunda obra, en particular, incluye aplicaciones a la teoría de probabilidades. Hoy utilizan frecuentemente el álgebra de Boole no solo los matemáticos puros, sino también otros que la aplican a problemas de teoría del seguro y de teoría de la información. Las notaciones han cambiado algo desde la época de Boole, y así la unión y la intersección se suelen representar hoy por ∪ y ∩, en vez de por + y ×, y el símbolo para el conjunto vacío no es ya el 0, sino ∅, pero los principios fundamentales son exactamente los mismos que estableció Boole hace más de 175 años.

Hay un aspecto de la obra de Boole que no está relacionado apenas con sus tratados de lógica ni con la teoría de conjuntos, pero que cualquier estudiante de ecuaciones diferenciales conoce bien. Se trata del algoritmo

relativo a los operadores diferenciales que introdujo Boole para facilitar el tratamiento de las ecuaciones diferenciales lineales. Si queremos resolver, por ejemplo, la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, la podemos escribir en la forma $(aD^2 + bD + c)y = 0$. Entonces, considerando a D como una incógnita en vez de como un operador, resolvemos la ecuación *algebraica* $aD^2 + bD + c = 0$; si las raíces de la ecuación algebraica son p y q, entonces e^{px} y e^{qx} son soluciones de la ecuación diferencial, y $Ae^{px} + Be^{qx}$ es una solución general de dicha ecuación.

Hay otras muchas situaciones en las que Boole, en *A Treatise on Differential Equations* de 1859, establece paralelismos entre las propiedades de los operadores diferenciales (y sus inversos) y las reglas del álgebra. Así pues, los matemáticos ingleses de la segunda mitad del siglo XIX estaban alcanzando de nuevo un alto nivel en el campo del análisis algorítmico, en el que 50 años antes habían mostrado grandes deficiencias.

Boole murió en 1864, solo diez años después de haber publicado *An Investigation of the Laws of Thought*, pero el reconocimiento a su obra, incluida una graduación honoraria por la Universidad de Dublín, le llegó afortunadamente antes de su muerte.

Es curioso observar que Georg Cantor, que como Boole fue en el siglo XIX uno de los principales exploradores de territorios de la matemática hasta entonces desconocidos, fue también uno de los pocos que se negaron a aceptar la obra de Boole.

Biografía

George Boole

George Boole (nacido el 2 de noviembre de 1815 en Lincoln, Lincolnshire, Inglaterra, y fallecido el 8 de diciembre de 1864 en Ballintemple, Condado de Cork, Irlanda) abordó la lógica de una manera innovadora, reduciéndola a un álgebra simple e incorporándola a las matemáticas. También trabajó en ecuaciones diferenciales, cálculo de diferencias finitas y métodos generales de probabilidad.

Sus padres fueron Mary Ann Joyce y John Boole. John fabricaba zapatos, pero estaba interesado en la ciencia y, en particular, en la aplicación de la matemática a los instrumentos científicos. Mary Ann era doncella y se casó con él el 14 de septiembre de 1806. Se mudaron a Lincoln, donde John abrió una zapatería en el número 34 de Silver Street. La familia no era adinerada, en parte porque el amor de John por la ciencia y la matemática significaba que no dedicaba su energía a desarrollar su negocio como podría haberlo hecho.

George, su primer hijo, nació después de que Mary Ann y John llevaran nueve años casados. Casi habían perdido la esperanza de tener hijos después de este tiempo, por lo que fue una ocasión de gran regocijo. George fue bautizado al día siguiente de su nacimiento, una indicación de que era un niño débil que sus padres temían que no viviera. Recibió su nombre en honor al padre de John, que había fallecido en abril de 1815. Durante los cinco años siguientes, Mary Ann y John tuvieron tres hijos más: Mary Ann, William y Charles.

Si bien George nació vulnerable, pronto se fortaleció y se recuperó por completo. Asistió por primera vez a una escuela para hijos de comerciantes en Lincoln, dirigida por dos señoritas Clarke, cuando tenía menos de dos años. Un año después, ingresó en una escuela comercial dirigida por el Sr. Gibson, amigo de John Boole, donde permaneció hasta los siete años. Sin embargo, su primera instrucción en matemática provino de su padre, quien también le inculcó el gusto por la construcción de instrumentos ópticos. A los siete años, George asistió a una escuela primaria donde recibió clases del Sr. Reeves. Su interés se centró en los idiomas y su padre se encargó de que recibiera clases de latín con un librero local.

Tras aprender latín con ese tutor, George estudió griego por su cuenta. A los 14 años, su dominio del griego era tal que provocó una discusión. Tradujo un poema del poeta griego Meleagro, del que su padre estaba tan orgulloso que lo publicó. Sin embargo, su talento era tal que un maestro local cuestionó que un joven de 14 años pudiera escribir con tanta profundidad. Para entonces, George asistía a la Academia Comercial de Bainbridge, en Lincoln, a la que había ingresado el 10 de septiembre de 1828.

Esta escuela no le proporcionaba la educación que hubiera deseado, pero era todo lo que sus padres podían permitirse. Sin embargo, pudo aprender francés y alemán por su cuenta, estudiando asignaturas académicas que una escuela comercial no cubría.

Retrato de George Boole y ubicación de su ciudad natal en Inglaterra, Reino Unido.

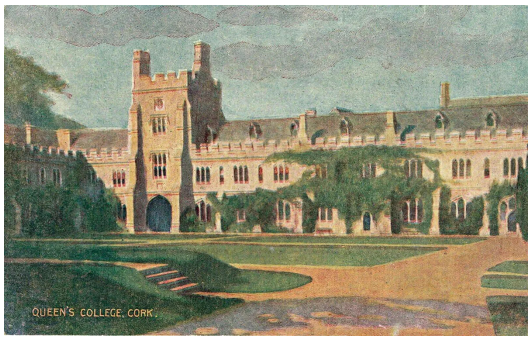
A los 21 años fue profesor asistente en la escuela Heigham de Doncaster. Esto le fue bastante forzado desde que el negocio de su padre quebró y él se vio obligado a mantener económicamente a sus padres, hermanos y hermana.

Preservó su interés por los idiomas, comenzó a estudiar matemática seriamente y abandonó las ideas que tenía de hacerse sacerdote. El primer libro de matemática avanzada que leyó fue el *Cálculo diferencial e integral* de Sylvestre Lacroix. Más tarde se daría cuenta de que casi había desperdiciado cinco años tratando de aprender la materia por sí mismo en lugar de tener un profesor experto. En 1833 se trasladó a un nuevo puesto de profesor en Liverpool, pero solo permaneció allí durante seis meses antes de mudarse a la Academia Hall en Waddington, a cuatro millas de Lincoln.

En 1834 abrió su propia escuela en Lincoln, a pesar de que solo tenía 19 años. En 1838, Robert Hall, quien había dirigido la Academia Hall en Waddington, murió y Boole fue invitado a hacerse cargo de la escuela, a lo que accedió. Sus padres, hermanos y hermana se mudaron a Waddington y juntos dirigieron la escuela, a la que asistían alumnos internos y externos. En ese momento, Boole estaba estudiando las obras de Laplace y Lagrange, tomando notas que más tarde serían la base de su primer artículo de matemática.

Sin embargo, recibió aliento de Duncan Gregory, quien en ese momento estaba en Cambridge y era el editor del recientemente fundado *Cambridge Mathematical Journal*. Pero Boole no pudo seguir su consejo de asistir a cursos en Cambridge, ya que necesitaba los ingresos de su escuela para mantener a sus padres. En el verano de 1840 había abierto un internado en Lincoln y nuevamente toda la familia se había mudado con él.

Comenzó de todos modos a publicar regularmente en el *Cambridge Mathematical Journal* y sus intereses fueron influenciados por Duncan Gregory cuando empezó a estudiar álgebra. Boole había comenzado a corresponderse con De Morgan en 1842 y cuando al año siguiente escribió su artículo "Sobre un método general de análisis aplicando métodos algebraicos a la solución de ecuaciones diferenciales" se lo envió, quedando en espera de sus comentarios. El artículo fue publicado por Boole en las *Transacciones de la Royal Society* en 1844 y por este trabajo recibió la Medalla Real de la Sociedad en noviembre de 1844. Su obra matemática comenzaba a traerle fama. Fue nombrado catedrático de matemática en el *Queen's College* de Cork en 1849.



Queen's College de Cork.

De hecho, solicitó una cátedra en cualquiera de los nuevos *Queen's Colleges* de Irlanda en 1846, y en septiembre de ese año, De Morgan, Kelland, Cayley y Thomson se encontraban entre quienes redactaron informes de apoyo. De Morgan escribió: "Puedo hablar con confianza de que no solo es un gran versado en las más altas ramas de las matemáticas, sino que también posee un poder original para extenderlas, lo que le da un rango muy respetable entre los investigadores ingleses de la actualidad".

Y Kelland afirmó que "Por la originalidad de sus concepciones y la extensión y exactitud de sus conocimientos, creo que tiene pocos superiores en Europa [...]".

El padre de Boole falleció en diciembre de 1848, antes de que se tomara la decisión sobre las cátedras irlandesas, pero en agosto de 1849 se anunció que Boole se convertiría en el primer profesor de matemática del *Queen's College* de Cork, y él asumió el cargo en noviembre. Enseñó allí el resto de su vida, labrándose una reputación de profesor excepcional y dedicado.

Sin embargo, el puesto no estuvo exento de dificultades, ya que el colegio se vio envuelto en disputas religiosas. Boole escribió a De Morgan el 17 de octubre de 1850: "Si se entera de alguna situación en Inglaterra que pueda serme conveniente, hágamelo saber. No me aterra la tormenta de intolerancia religiosa que ahora mismo nos azota. No estoy insatisfecho con mis deberes y me atrevo a decir que mantengo una buena relación con mis colegas y alumnos. Pero no puedo evitar la sensación de que los recientes acontecimientos en este colegio han sentado las bases de una falta de confianza mutua entre nosotros".

En mayo de 1851, Boole fue elegido decano de Ciencias, un papel que desempeñó concienzudamente. Para entonces, ya había conocido a Mary Everest (sobrina de sir George Everest, de quien toma su nombre la montaña), cuyo tío era profesor de griego en Cork y amigo de Boole. Se conocieron por primera vez en 1850, cuando Mary visitó a su tío en Cork, y se encontraron de nuevo en julio de 1852, cuando Boole visitó a la familia Everest en Wickwar, Gloucestershire, Inglaterra. Boole comenzó a dar a Mary lecciones informales de matemática sobre el cálculo diferencial.

En ese momento, tenía 37 años, mientras que Mary solo tenía 20. En 1855, el padre de Mary murió, dejándola sin medios de subsistencia, y Boole le propuso matrimonio. Se casaron el 11 de septiembre de 1855 en una pequeña ceremonia en Wickwar. Resultó ser un matrimonio muy feliz, con cinco hijas: Mary Ellen, nacida en 1856; Margaret, nacida en 1858; Alicia (más tarde Alicia Stott), nacida en 1860; Lucy Everest, nacida en 1862; y Ethel Lilian, nacida en 1864. MacHale escribe: "La gran diferencia de edad entre ellos parecía no importar nada porque eran almas gemelas, con una unidad de propósito casi completa".

Veamos ahora la obra más importante de Boole. En 1854 publicó *Investigación sobre las leyes del pensamiento, en las que se fundamentan las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades*. En ella abordó la lógica de una manera novedosa, reduciéndola a un álgebra simple e incorporándola a la matemática. Señaló la analogía entre los símbolos algebraicos y los que representan formas lógicas. Con esto se inició el álgebra de la lógica, llamada *álgebra de Boole*, que ahora se aplica en la construcción de computadoras, circuitos de conmutación, etc. El propio Boole comprendió la importancia de la obra.

En una carta a Thomson fechada el 2 de enero de 1851 decía:

> "Ahora estoy a punto de ponerme a trabajar seriamente en la preparación para la imprenta de un relato de mi teoría de la lógica y las probabilidades que en su estado actual considero como la más valiosa, si no la única, contribución que he hecho o es probable que haga a la ciencia y la cosa por la que desearía ser recordado de ahora en adelante [...]".

Boole también trabajó en ecuaciones diferenciales (el influyente *Tratado sobre ecuaciones diferenciales*, publicado en 1859), el cálculo de diferencias finitas (*Tratado sobre el cálculo de diferencias finitas*, 1860) y métodos generales de probabilidad. Publicó alrededor de 50 artículos y fue uno de los primeros en investigar las propiedades básicas de los números, como la propiedad distributiva, que subyacen al álgebra.

Trinity College de Dublin, Universidad de Dublin, Irlanda, y ubicación de Dublin en el Reino Unido.

Boole recibió numerosos honores en reconocimiento a su genialidad. Recibió títulos honorarios de las universidades de Dublín y Oxford y fue elegido miembro de la *Royal Society* (1857). Sin embargo, su carrera, que

comenzó bastante tarde, tuvo un final desafortunadamente prematuro cuando falleció a los 49 años. Las circunstancias las describe Alexander Macfarlane de la siguiente manera:

> "Un día de 1864, caminó dos millas desde su residencia hasta la universidad, bajo una lluvia torrencial, y dio una clase con la ropa mojada. El resultado fue un resfriado febril que pronto le afectó los pulmones y puso fin a su carrera [...]".

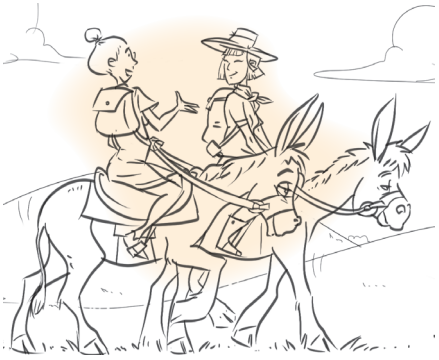
Su trabajo fue elogiado por De Morgan, quien dijo:

> "El sistema lógico de Boole es solo una de las muchas pruebas de genio y paciencia combinados. [...] Que los procesos simbólicos del álgebra, inventados como herramientas de cálculo numérico, fueran capaces de expresar cada acto de pensamiento y de proporcionar la gramática y el diccionario de un sistema lógico integral, no se habría creído hasta que se demostró. Cuando Hobbes [...] publicó su *Computación o Lógica*, vislumbró algunos de los puntos que el Sr. Boole pone de manifiesto".

El álgebra de Boole tiene amplias aplicaciones en el diseño de computadoras modernas. Su trabajo debe considerarse un paso fundamental en la revolución informática actual.

II. Dialogando con los profesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



El álgebra de los conjuntos

TEORÍA GENERAL

El concepto de *clase* o *conjunto* de objetos es uno de los más fundamentales de la matemática. Se define un conjunto mediante una propiedad o atributo $\mathcal{U}$ que cada objeto considerado debe poseer o no; aquellos objetos que poseen la propiedad $\mathcal{U}$ forman un conjunto correspondiente A. Así, si consideramos los enteros, y la propiedad es la de ser primo, el conjunto correspondiente A es el constituido por todos los números primos 2, 3, 5, 7, ...

El estudio matemático de los conjuntos se basa en el hecho de que estos pueden ser combinados mediante ciertas operaciones para formar otros conjuntos, al igual que los números se combinan por adición y multiplicación para dar lugar a otros números.

El estudio de las operaciones con los conjuntos constituye el *álgebra de conjuntos*, que tiene muchas semejanzas formales (aunque también presenta diferencias) con el álgebra de los números. El hecho de que los métodos algebraicos puedan aplicarse al estudio de objetos no numéricos, como los conjuntos, pone de manifiesto la gran generalidad de conceptos de la matemática moderna. En los últimos años se ha visto que el álgebra de los conjuntos ilumina muchas ramas de la matemática, tales como la teoría de la medida y la teoría de las probabilidades, y resulta también valiosa en la reducción sistemática de los conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos.

En lo que sigue $\boldsymbol{I}$ representará un conjunto fijo de objetos de naturaleza cualquiera que llamaremos *conjunto universal* o *universo*, y $A, B, C, \ldots$ representarán subconjuntos arbitrarios de $\boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{I}$ es el conjunto de todos los enteros, A puede representar el conjunto de los enteros pares, B el de los impares, C el de los números primos, etc. O bien $\boldsymbol{I}$ puede ser el conjunto de todos los puntos de un plano dado, A el de todos los puntos interiores a una circunferencia determinada, B el conjunto de todos los puntos de otro círculo del plano, etcétera.

Por conveniencia incluimos como "subconjuntos" de $\boldsymbol{I}$ al propio conjunto $\boldsymbol{I}$ y al "conjunto vacío" $\varnothing$, que no contiene elementos. El propósito de esta generalización artificial es el de conservar la regla de que a toda propiedad $\mathcal{U}$ corresponda el subconjunto A de todos los elementos de $\boldsymbol{I}$ que poseen dicha propiedad. En el

caso de que $\mathcal{U}$ sea alguna propiedad válida universalmente, tal como la expresada por la ecuación trivial $x = x$, el correspondiente subconjunto de $\boldsymbol{I}$ será el mismo $\boldsymbol{I}$, puesto que todo objeto satisface a esta ecuación, en tanto que si $\mathcal{U}$ es alguna propiedad contradictoria en sí misma, como $x \neq x$, el correspondiente subconjunto no contendrá ningún objeto y lo representaremos por el símbolo $\varnothing$.

El conjunto A se dice que es un *subconjunto* del B si no hay ningún objeto en A que no esté también en B. En este caso escribimos

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A.$$

Por ejemplo, el conjunto A de todos los enteros múltiplos de 10 es un subconjunto del conjunto B de los enteros múltiplos de 5, ya que todo múltiplo de 10 lo es también de 5. La afirmación de $A \subset B$ no excluye la posibilidad de que sea $B \subset A$. Si ambas relaciones tienen lugar, decimos que los conjuntos A y B son iguales y escribimos

$$A = B.$$

Para que esto se verifique, cada elemento de A debe pertenecer a B, y recíprocamente, de modo que los conjuntos A y B contienen exactamente los mismos elementos.

La relación $A \subset B$ tiene muchas analogías con la relación de orden $a \leq b$ entre los números reales. En particular, se verifica que

1) $A \subset A$.

2) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, $A \equiv B$.

3) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, $A \subset C$.

Por esta razón, la relación $A \subset B$ se denomina una *relación de orden*. Su principal diferencia con la relación $a \leq b$ para los números consiste en que, mientras para cada par de números a y b subsiste siempre una de las relaciones $a \leq b$ o $b \leq a$, esto no se verifica para los conjuntos; por ejemplo, si A designa el conjunto formado por los enteros 1, 2, 3,

$$A = \{1, 2, 3\},$$

y B el formado por los números 2, 3, 4,

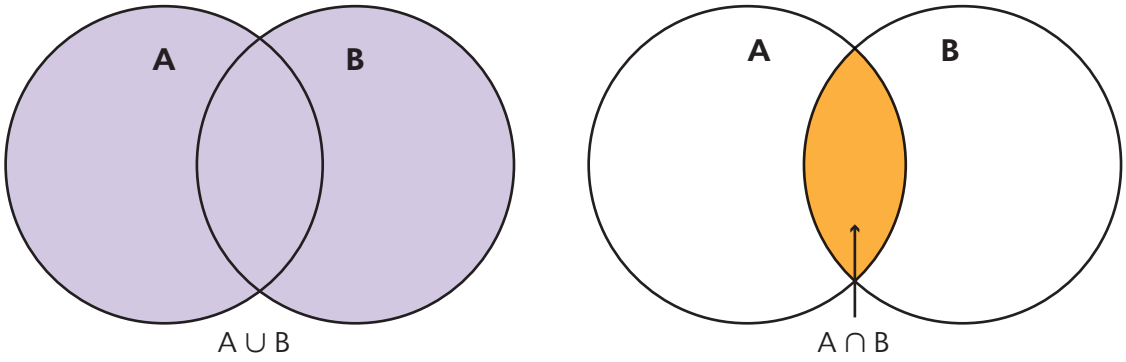
$$B = \{2, 3, 4\},$$

entonces ni $A \subset B$ ni $B \subset A$. Por esta razón, la relación $A \subset B$ se dice que determina una ordenación parcial de los conjuntos, mientras que la relación $a \leq b$ determina una ordenación completa entre los números. De pasada, observemos que en virtud de la definición de la relación $A \subset B$ resulta que

4) $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto A, y

5) $A \subset \boldsymbol{I}$,

siendo A cualquier subconjunto del universo $\boldsymbol{I}$. La relación 4) puede resultar un tanto paradójica, pero se halla de acuerdo con la interpretación estricta del signo $\subset$. Pues la afirmación $\varnothing \subset A$ sería falsa solo si el conjunto vacío $\varnothing$ contuviese un objeto no contenido en A, y como el conjunto vacío no contiene objeto alguno, resulta esto imposible, cualquiera que sea el conjunto A.



Unión o adición e intersección de dos conjuntos.

Vamos a definir ahora dos operaciones con conjuntos que tienen muchas de las propiedades algebraicas de la adición y multiplicación ordinarias de números, aunque conceptualmente son muy distintas. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera; entenderemos por *unión* o *suma lógica* de A y B el conjunto formado por todos los objetos que pertenecen, o bien a A o bien a B (incluidos los que puedan pertenecer a ambos), y este conjunto lo representaremos por el símbolo $A + B$ o por $A \cup B$.

Definimos la *intersección* o *producto lógico* de A y B como el conjunto formado únicamente por aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos A y B, y lo representaremos por el símbolo $A \cdot B$, o simplemente AB, o más frecuentemente por $A \cap B$. Para aclarar estas operaciones, sean de nuevo A y B los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4\}.$$

Entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \; A \cap B = \{2, 3\}.$$

Entre las propiedades algebraicas importantes de las operaciones $A \cup B$ y $A \cap B$ se encuentran las siguientes, que pueden ser comprobadas por el lector basándose en la definición de las mismas:

6) $A \cup B = B \cup A$

7) $A \cap B = B \cap A$

8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

9) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

10) $A \cup A = A$

11) $A \cap A = A$

12) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B \cup A \cap C)$

13) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

14) $A \cup \varnothing = A$

15) $A \cap \boldsymbol{I} = A$

16) $A \cup \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}$

17) $A \cap \varnothing = \varnothing$

18) La relación $A \subset B$ es equivalente a una de las dos relaciones $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

La verificación de estas leyes es un problema de lógica elemental; por ejemplo, 10) dice que el conjunto formado por aquellos objetos que pertenecen o bien a *A* o bien a *A* es precisamente el conjunto *A*, mientras 12) afirma que el conjunto formado por aquellos objetos que son de *A* y también de *B* o de *C* es el mismo que el formado por aquellos objetos que pertenecen, o bien a ambos *A* y *B,* o bien a ambos *A* y *C*. El razonamiento lógico implicado en este y otros razonamientos puede aclararse mediante la representación de los conjuntos *A, B, C* por recintos planos, teniendo cuidado de considerar todas las posibilidades en cuanto a que los conjuntos en cuestión tengan elementos distintos y comunes entre sí.

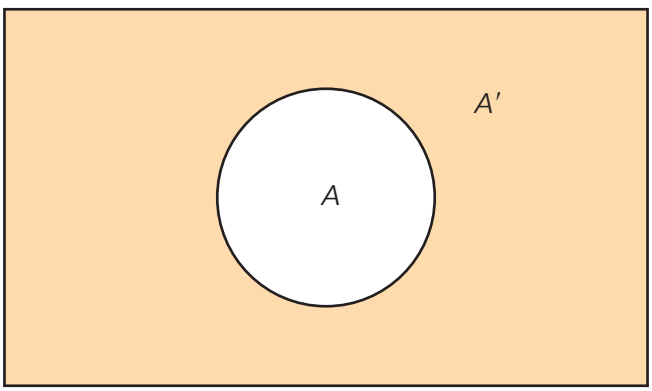
Elementos distintos y comunes dentro de tres conjuntos.

Hemos observado que las leyes 6), 7), 8), 9) y 12) coinciden con las familiares leyes conmutativa, asociativa y distributiva del álgebra, de donde resulta que todas las reglas del álgebra ordinaria de números que sean consecuencia de dichas leyes son también válidas en el álgebra de los conjuntos. Las leyes 10), 11) y 13), por otra parte, no tienen análogas en el caso de los números, lo que da al álgebra de conjuntos una estructura más sencilla que la del álgebra de los números; por ejemplo, el teorema del binomio del álgebra ordinaria, en el álgebra de los conjuntos viene reemplazado por la igualdad

$$(A \cup B)^n \equiv (A \cup B) \cap (A \cup B) \cap \ldots \cap (A \cup B) = A \cup B,$$

que es consecuencia de 11).

Las leyes 14), 15) y 17) nos dicen que las propiedades de $\varnothing$ e $\boldsymbol{I}$ respecto de la unión e intersección de conjuntos son muy similares a las propiedades de los números 0 y 1 respecto de la adición y la multiplicación ordinarias. La ley 16) no tiene análoga en el álgebra de números.



Queda por definir una ulterior operación del álgebra de los conjuntos: sea *A* un subconjunto cualquiera del conjunto universal $\boldsymbol{I}$. Por complemento de *A* en $\boldsymbol{I}$ entendemos el conjunto formado por todos los objetos de $\boldsymbol{I}$ que no pertenecen a *A*, y representaremos este conjunto por el símbolo *A*′ (figura anterior). Así, si $\boldsymbol{I}$ es el

conjunto de todos los números naturales y A el de los números primos, A' estará formado por 1 y todos los números compuestos. La operación A', que no tiene analogía exacta en el álgebra de los números, goza de las siguientes propiedades:

19) $A \cup A' = \boldsymbol{I}$

20) $A \cap A' = \varnothing$

21) $\varnothing' = \boldsymbol{I}$

22) $\boldsymbol{I}' = \varnothing$

23) $A'' = A$

24) La relación $A \subset B$ es equivalente a la relación $B' \subset A'$.

25) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

26) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Verifiquemos estas leyes.

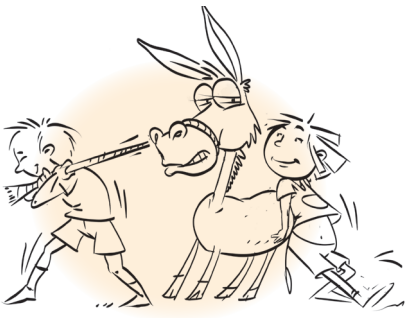
Las leyes 1) a 26) constituyen la base del álgebra de los conjuntos y poseen la notable propiedad de *dualidad*, entendida en el sentido siguiente: **Si en una cualquiera de las leyes 1) a 26) los símbolos**

$$\subset \quad \text{y} \quad \supset$$
$$\varnothing \quad \text{e} \quad \boldsymbol{I}$$
$$\cup \quad \text{y} \quad \cap$$

se intercambian (donde quiera que aparezcan), el resultado es de nuevo una de dichas leyes.

Por ejemplo, la ley 6) se transforma en la 7); la 12) en la 13); la 17) en la 16), etc. De ello resulta que a todo teorema que pueda demostrarse basándose en las leyes 1) a 26) corresponde otro teorema *dual*, que se obtiene mediante los intercambios indicados. En efecto, como la demostración de todo teorema consiste en la aplicación sucesiva en cada etapa de alguna de las leyes 1) a 26), la aplicación a cada etapa de la ley dual nos dará la demostración del teorema dual (una dualidad análoga en geometría, la veremos más adelante).

APLICACIÓN A LA LÓGICA MATEMÁTICA



La verificación de las leyes del álgebra de conjuntos se apoya en el análisis del significado lógico de la relación $A \subset B$ y de las operaciones $A \cup B$, $A \cap B$ y A'. Podemos ahora invertir este proceso y utilizar las leyes 1) a 26) como fundamento de un *álgebra de la lógica*. Con más precisión, aquella parte de la lógica concerniente a los conjuntos o, lo que es equivalente, las propiedades o atributos de los objetos, puede reducirse a un sistema algebraico formal basado en las leyes 1) a 26). El *universo lógico* define el conjunto $\boldsymbol{I}$; cada propiedad o atributo $\mathcal{U}$ de los objetos define el conjunto A, constituido por todos los objetos de $\boldsymbol{I}$ que poseen este atributo. Las reglas para traducir la terminología lógica usual al lenguaje de los conjuntos quedan aclaradas con los siguientes ejemplos:

"Bien A o B"	$A \cup B$
"Ambos A y B"	$A \cap B$
"No A"	A'
"Ni A ni B"	$(A \cup B)'$, o de forma equivalente $A' \cap B'$
"No ambos A y B"	$(A \cap B)'$, o de forma equivalente $A' \cup B'$
"Todo A es B" o "Si A también B"	
o "A implica B"	$A \subset B$
"Algunos A son B"	$A \cap B \neq \varnothing$

"Ningún A es B"	$A \cap B = \varnothing$
"Algunos A no son B"	$A \cap B' \neq \varnothing$
"No hay ningún A"	$A = \varnothing$

En términos del álgebra de conjuntos, el silogismo "Bárbara", que dice: "Si todo A es B, y todo B es C, entonces todo A es C", se escribe sencillamente

$$3)\ \text{Si } A \subset B \text{ y } B \subset C, \text{ entonces } A \subset C.$$

Análogamente, la *ley de contradicción*, que dice: "Un objeto no puede poseer simultáneamente un atributo y no poseerlo", se escribe

$$20)\ A \cap A' = \varnothing,$$

mientras la *ley del tertio excluso* que dice: "Un objeto debe poseer un atributo o no poseerlo" se transforma en

$$19)\ A \cup A' = \boldsymbol{I}.$$

Así, pues, la parte de la lógica que puede expresarse con los símbolos $\subset$, $\cup$, $\cap$, y $'$ puede tratarse como un sistema algebraico formal sometido a las leyes 1) a 26). Esta fusión del análisis lógico de la matemática y del análisis matemático de la lógica ha dado lugar a una nueva disciplina, la *lógica matemática*, que se halla actualmente en curso de vigoroso desarrollo.

Desde el punto de vista de la axiomática es notable el hecho de que las proposiciones 1) a 26), junto con todos los teoremas del álgebra de conjuntos, puedan deducirse de las tres ecuaciones siguientes:

$$27)\ \begin{cases} A \cup B = B \cup A, \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A. \end{cases}$$

Se deduce de ello que el álgebra de conjuntos puede construirse como una teoría puramente deductiva, al igual que la geometría euclídea, sobre la base de estas tres proposiciones aceptadas como axiomas. Cuando se ha hecho esto, la operación $A \cap B$ y la relación de orden $A \subset B$ se definen a partir de $A \cup B$ y A':

$A \cap B$ representa el conjunto $(A' \cup B')$

$A \subset B$ significa que $A \cup B = B$

Un ejemplo completamente distinto de un sistema matemático que satisface a todas las leyes formales del álgebra de conjuntos nos lo procuran los ocho números 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, donde $a + b$ se define como el mínimo común múltiplo de a y b; ab, como el máximo común divisor de a y b; $A \subset B$, como la afirmación "a es un factor de b"; y a', como el número $30/a$. La existencia de tales ejemplos ha llevado al estudio de los sistemas algebraicos generales que satisfacen a las leyes 27). Dichos sistemas se llaman *álgebras de Boole* en honor de George Boole (1815-1864), matemático y lógico inglés, autor del *libro An Investigation of the Laws of Thought* publicado en 1854, como ya lo vimos en el apartado I que inicia este número de *Leñitas Geométricas*.

UNA APLICACIÓN A LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

El álgebra de conjuntos aclara notablemente la teoría de las probabilidades. Para considerar solo el caso más sencillo, imaginemos un experimento con un número finito de resultados posibles, todos los cuales se supondrán *igualmente probables*. El experimento puede consistir, por ejemplo, en sacar una carta al azar de una baraja de 52 cartas perfectamente barajadas. Si el conjunto de los resultados posibles del experimento se representa por $\boldsymbol{I}$, y si A designa cualquier subconjunto de $\boldsymbol{I}$, entonces la probabilidad de que el resultado del experimento pertenezca al subconjunto A se define por el cociente

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \boldsymbol{I}}.$$

Si designamos el número de elementos de un conjunto A por el símbolo $n(A)$, esta definición puede escribirse en la forma

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\boldsymbol{I})}. \qquad (1)$$

En nuestro ejemplo, si A representa el subconjunto de "corazones", entonces

$$n(A) = 13, \qquad n(\boldsymbol{I}) = 52 \quad \text{y} \quad p(A) = 13/52 = 1/4.$$

Los conceptos del álgebra de conjuntos intervienen en el cálculo de probabilidades cuando se conocen las probabilidades de ciertos conjuntos y se desea calcular las correspondientes a otros; por ejemplo, si conocemos $p(A)$, $p(B)$ y $p(A \cap B)$, podemos calcular la probabilidad $p(A \cup B)$:

$$p(A \cup B) = p(A) \cup p(B) - p(A \cap B). \qquad (2)$$

La demostración es inmediata; en efecto,

$$n(A \cup B) = n(A) \cup n(B) - n(A \cap B),$$

ya que los elementos comunes a A y a B, esto es, los elementos de $A \cap B$, están contados dos veces en la suma $n(A) \cup n(B)$ y, en consecuencia, debemos restar de esta suma $n(A \cap B)$ para obtener el resultado correcto que corresponde a $n(A \cup B)$. Dividiendo cada término de esta igualdad por $n(\boldsymbol{I})$ obtenemos la ecuación (2).

Se obtiene una fórmula más interesante al considerar tres subconjuntos, A, B, C, de $\boldsymbol{I}$. De (2) resulta

$$p(A \cup B \cup C) = p[(A \cup B) \cup C] = p(A \cup B) \cup p(C) - p[(A \cup B) \cap C].$$

Por la ley 12) sabemos que $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$. En consecuencia,

$$p[(A \cup B) \cap C] = p(A \cap C \cup B \cap C) = p(A \cap C) \cup p(B \cap C) - p(A \cap B \cap C).$$

Sustituyendo en la ecuación previa este valor de $p[(A \cup B) \cup C]$ y el valor de $p(A \cup B)$ dado por (2), obtenemos el resultado deseado:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) \cup p(B) \cup p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) \cup p(A \cap B \cap C). \quad (3)$$

Como ejemplo, consideremos el siguiente experimento: se escriben al azar los tres dígitos 1, 2, 3 y se pide la probabilidad de que uno al menos ocupe su propio lugar. Sea A el conjunto de todas las permutaciones en las que el 1 está en primer lugar; B el de aquellas donde el 2 está en segundo lugar, y C el conjunto de todas las permutaciones en las que el 3 está en tercer lugar. Deseamos, por tanto, calcular $p(A \cup B \cup C)$. Es obvio que

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

pues cuando un digito ocupa su propio lugar hay dos ordenaciones posibles para los restantes dentro del total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutaciones posibles de los tres dígitos. Además,

$$p(A \cap B) = p(A \cap C) = p(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

y

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6},$$

ya que hay solo una forma de presentarse para cada uno de estos casos. De (3) resulta que

$$p(A \cup B \cup C) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$$

Ejercicio. Hállese la fórmula correspondiente a $p(A + B + C + D)$ y aplíquese al caso de cuatro dígitos. La probabilidad correspondiente es 5/8 = 0,6250

La fórmula general para la suma de n subconjuntos es

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum\nolimits_1 p(A_i) - \sum\nolimits_2 p(A_i A_j) + \sum\nolimits_3 p(A_i A_j A_k) - \ldots \pm \sum\nolimits_n p(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n), \quad (4)$$

donde los símbolos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$ representan las sumas de todas las combinaciones posibles de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tomados uno a uno, dos a dos, …, $(n-1)$ a $(n-1)$. Esta fórmula puede establecerse por inducción matemática de igual modo que dedujimos (3) a partir de (2). De (4) es fácil probar que si los n dígitos 1, 2, 3, ..., n se escriben al azar, la probabilidad de que al menos un dígito ocupe su propio lugar es

$$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}, \qquad (5)$$

en la cual el último término se toma con signo más o menos, según sea n par o impar. En particular, para $n = 5$, la probabilidad es

$$p_5 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{19}{30} = 0{,}63333\ldots$$

Veremos nuevamente más adelante que al tender n a infinito, la expresión

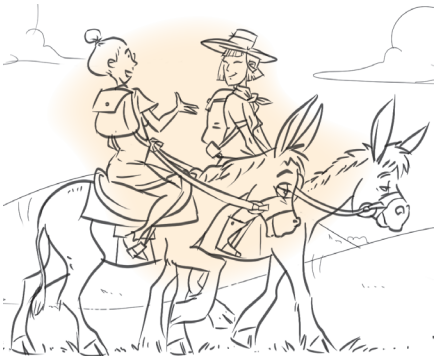
$$S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

tiende al límite $1/e$, cuyo valor con cinco decimales es 0,86788. Dado que, por (5), $p_n = 1 - S_n$, queda demostrado que al tender n a infinito

$$p_n \to 1 - 1/e = 0{,}63212.$$

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Qué es la realidad?



Los números en el mundo físico

¿UNA CATÁSTROFE PITAGÓRICA?

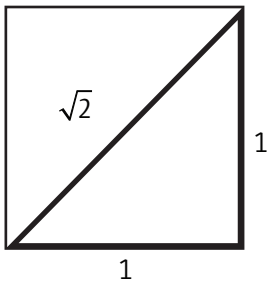
Roger Penrose en su importante libro *El camino a la realidad* analiza los números en el espacio físico en el mundo científico y cultural contemporáneo. Nadie como un físico matemático de su talla tiene autoridad para este estudio.

Volvamos ahora a las dudas sobre las pruebas por contradicción, el principio que Giovanni Gerolamo Saccheri trató en vano de utilizar en su intento de justificar el quinto postulado de Euclides. Hay muchos casos en las matemáticas clásicas en los que el principio ha sido usado con éxito. Uno de los más notorios se remonta a los pitagóricos y zanjó una cuestión matemática en un sentido que les iba a causar grandes problemas. La cuestión era la siguiente: **¿es posible encontrar un número racional (es decir, una fracción) cuyo cuadrado sea exactamente el número 2?** Resulta que la respuesta es no y la afirmación matemática que voy a demostrar dentro de poco es, en efecto, que no existe tal número racional.

¿Por qué estaban los pitagóricos tan molestos por este descubrimiento? Recordemos que una fracción –es decir, un número racional– es algo que puede expresarse como la razón a/b de dos enteros a y b, siendo b distinto de cero.

Al principio, los pitagóricos tenían la esperanza de que toda su geometría pudiera expresarse en términos de longitudes susceptibles de medirse en cuanto a números racionales. Los números racionales son cantidades bastante simples, pues son descriptibles y comprensibles en términos finitos simples; pese a todo, pueden utilizarse para especificar distancias tan pequeñas o tan grandes como queramos. Si pudiera hacerse toda la geometría con los racionales, esto haría las cosas relativamente sencillas y fácilmente comprensibles.

La noción de un número *irracional*, por el contrario, requiere procesos infinitos, y esto hubiera planteado dificultades considerables a los antiguos (y con toda la razón).



Un cuadrado de lado longitud unidad tiene diagonal $\sqrt{2}$, por el teorema de Pitágoras.

¿Qué dificultad plantea el hecho de que no exista un número racional cuyo cuadrado sea 2? Esta procede del propio teorema de Pitágoras. Si en la geometría euclídea tenemos un cuadrado con lados de longitud unidad, entonces la longitud de su diagonal es un número cuyo cuadrado es $1^2 + 1^2 = 2$ (véase la figura anterior). Sería realmente catastrófico para la geometría que no hubiera ningún número que pudiera describir la longitud de la diagonal de un cuadrado.

Al principio, los pitagóricos trataron de arreglárselas con una noción de *número de hecho* que pudiera describirse simplemente en términos de razones de números enteros. Veamos por qué esto no puede funcionar. La cuestión consiste en ver por qué la ecuación $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ no tiene solución para enteros a y b, donde estos enteros se consideran positivos. Utilizaremos la demostración por el absurdo para evidenciar que no pueden existir tales a y b. Supongamos, por lo tanto, que sí existen tales a y b. Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por b^2, encontramos que se convierte en

$$a^2 = 2b^2$$

y concluimos claramente que $a^2 > b^2 > 0$. Las notaciones $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, frecuentemente utilizadas, significan, respectivamente, "es mayor que", "es menor que", "es mayor o igual que" y "es menor o igual que".

Ahora, el segundo miembro, $2b^2$, de la ecuación anterior es par, de donde se sigue que a debe ser par (y no impar, puesto que el cuadrado de cualquier número impar es impar). Así pues, existe un entero positivo c tal que $a = 2c$. Sustituyendo a por $2c$ en la ecuación anterior, y elevando al cuadrado, obtenemos

$$4c^2 = 2b^2,$$

es decir, dividiendo ambos miembros por 2,

$$b^2 = 2c^2,$$

y concluimos que $b^2 > c^2 > 0$. Ahora bien, esta es exactamente la misma ecuación que teníamos antes, excepto que b reemplaza ahora a a y c reemplaza a b. Nótese que los enteros correspondientes son ahora más pequeños que antes. Podemos repetir lo visto una y otra vez, obteniendo una secuencia interminable de ecuaciones

$$a^2 = 2b^2, \quad b^2 = 2c^2, \quad c^2 = 2d^2, \quad d^2 = 2e^2, \ldots,$$

donde

$$a^2 > b^2 > c^2 > d^2 > e^2 > \ldots,$$

siendo todos estos enteros positivos. Pero cualquier secuencia decreciente de enteros positivos debe llegar a un final, lo que contradice el hecho de que esta secuencia es interminable.

Esto nos da una contradicción respecto de lo que se había supuesto, a saber, que existe un número racional cuyo cuadrado es 2. De ello se sigue que no existe tal número racional, como queríamos demostrar.

Quizá se conozca un argumento aparentemente más corto que empieza exigiendo que a/b esté "en sus menores términos" (es decir, que a y b no tengan factores comunes). Sin embargo, esto supone que esta expresión en términos menores existe siempre, lo que, aunque sea completamente cierto, necesita ser probado. Encontrar una expresión en términos menores para una fracción dada A/B, implícita o explícitamente, significa utilizar el algoritmo de Euclides. Algunos puntos de la demostración anterior merecen un comentario;

pues, en primer lugar, de acuerdo con los procedimientos normales de la explicación matemática, en el argumento se ha apelado a ciertas propiedades de los números que se tomaron como "obvias" o como previamente establecidas. Por ejemplo, hemos utilizado el hecho de que el cuadrado de un número impar es siempre impar y, además, que si un entero no es impar, entonces es par. También utilizamos el hecho fundamental de que cada secuencia estrictamente decreciente de números enteros positivos debe llegar a un final.

Una razón por la que puede ser importante identificar las hipótesis precisas que entran en una demostración –incluso si algunas de estas hipótesis pudieran ser cosas perfectamente "obvias"– es que los matemáticos están a menudo interesados en otros tipos de entidades, distintas de aquellas a las que originalmente concernía la demostración.

Si estas otras entidades satisfacen las mismas hipótesis, entonces la demostración será extrapolable y se verá que la afirmación que ha sido demostrada tiene una generalidad mayor que la originalmente percibida, puesto que se aplicará también a estas otras entidades. Por el contrario, si alguna de las hipótesis necesarias deja de ser válida para estas entidades alternativas, entonces la afirmación en cuestión puede resultar falsa para dichas entidades.

En el argumento anterior, las entidades originales son números enteros y estamos interesados en aquellos números –los números racionales– que se construyen como cocientes de enteros. Con tales números se da realmente el caso de que ninguno de ellos tiene 2 como cuadrado. Pero hay otros tipos de números, además de los simples enteros y racionales. En realidad, la necesidad para una raíz cuadrada de 2 obligó a los antiguos griegos, muy en contra de su voluntad en aquel tiempo, a salir de los confines de los números enteros y los racionales, los únicos tipos de números que previamente habían estado dispuestos a aceptar.

El tipo de número al que se vieron llevados fue el que hoy en día llamamos un *número real*: un número que ahora expresamos mediante un desarrollo decimal interminable (aunque una representación semejante no estaba disponible para los antiguos griegos). De hecho, 2 tiene una raíz cuadrada dentro de los números reales, a saber, como ahora la escribiríamos:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,72\ldots$$

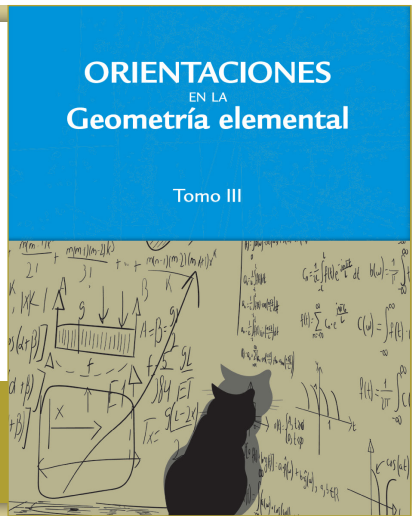
En la próxima sección consideraremos con más detalle el estatus *físico* de tales números *reales* en el ámbito cultural moderno.

Como curiosidad, podemos preguntar por qué la demostración anterior de la no existencia de una raíz cuadrada de 2 falla para números reales (o para razones de números reales, lo que es equivalente). ¿Qué sucede si reemplazamos "entero" por "número real" en todo el argumento? La diferencia básica es que no es cierto que cualquier sucesión estrictamente decreciente de reales positivos (o incluso de fracciones) debe llegar a un final, y el argumento se viene abajo en ese punto.

En efecto, podría objetarse que resulta algo curioso utilizar números reales en la demostración anterior, puesto que los "racionales reales" (esto es, cocientes de reales) serían de nuevo números reales, simplemente. Esto no invalida, sin embargo, lo que se acaba de decir. Puede señalarse que, en el argumento original, *a* y *b* se tomaban además enteros, y no racionales en sí mismos. En efecto, si *a* y *b* fueran meramente racionales,

Ya salió el tomo III

Un libro que reúne una serie de Notas escritas por matemáticos profesionales, con el fin de incorporar al área curricular algunas ideas importantes y temáticas interesantes, en forma clara y comprensible.



red olímpica

fenchu@oma.org.ar

11 4826 8976 **+54 9 11 5035 7537**

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

el argumento fallaría en la parte de la "secuencia decreciente", incluso si el propio resultado siguiera siendo cierto.

Consideremos, por ejemplo, la secuencia interminable $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ Podríamos preguntarnos qué sería un número real "impar" y uno "par" en este contexto. De hecho, el argumento no encuentra ninguna dificultad en este punto porque todos los números reales tendrían que contar como "pares", puesto que para cualquier real a hay siempre un real c tal que $a = 2c$, al ser siempre posible la división por 2 para los reales.

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Así fue como los griegos se vieron obligados a admitir que los números racionales no son suficientes para desarrollar adecuadamente las ideas de la geometría (de Euclides). En la actualidad no nos preocupa excesivamente que cierta cantidad geométrica no pueda ser medida en términos de números racionales simplemente. Esto se debe a que la noción de un *número real* resulta muy familiar para nosotros. Aunque nuestras calculadoras de bolsillo expresan los números mediante un número finito de dígitos, aceptamos que esta es una aproximación a la que nos obliga el hecho de que la calculadora es un objeto finito. Estamos dispuestos a admitir que el número matemático ideal (platónico) podría requerir que el desarrollo decimal se prolongue indefinidamente. Esto se aplica, por supuesto, incluso a la representación decimal de la mayoría de las fracciones, tales como

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333\ldots,$$

$$\frac{29}{12} = 2{,}416\,666\,666\ldots$$

$$\frac{9}{7} = 1{,}285\,714\,285\,714\,285\ldots$$

$$\frac{237}{148} = 1{,}601\,351\,351\,35\ldots$$

En el caso de una fracción, el desarrollo decimal siempre acaba siendo periódico, lo que quiere decir que llega un momento en que la secuencia infinita de dígitos consiste en una secuencia finita que se repite indefinidamente. En los ejemplos citados, las secuencias repetidas son 3, 6, 285 714 y 135, respectivamente.

Los desarrollos decimales no estaban disponibles para los antiguos griegos, pero ellos tenían sus propios modos de entender los números irracionales. En efecto, lo que adoptaron era un sistema de representación de números en términos de lo que ahora llamamos *fracciones continuas*. No hay necesidad de entrar aquí en detalles, pero es apropiado hacer algunos breves comentarios. Una fracción continua, como lo hemos visto, es una expresión finita o infinita $a + (b + (c + (d + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1}$ donde $a, b, c, d, \ldots$ son enteros positivos:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{\ldots}}}}.$$

En una ojeada informal, expresiones como $a + (b + (c + (d + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1}$ pueden parecer bastante extrañas. Sin embargo, son muy naturales en el contexto del pensamiento griego antiguo (aunque los griegos no utilizaban esta notación concreta). El algoritmo de Euclides se ha mencionado en el contexto de encontrar la forma en términos más sencillos de una fracción. El algoritmo de Euclides (cuando se desenmaraña) lleva precisamente a dicha expresión como fracción continua. Los griegos aplicarían este mismo procedimiento a la razón de dos longitudes geométricas. En el caso más general, el resultado sería una fracción continua infinita, del tipo considerado aquí.

Cualquier número racional mayor que 1 puede escribirse como una de estas expresiones *terminada* (donde, para evitar ambigüedades, exigimos normalmente que el último entero sea mayor que 1), por ejemplo,

$$52/9 = 5 + (1 + (3 + (2)^{-1})^{-1})^{-1}:$$

$$\frac{52}{9} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

y, para representar un racional positivo menor que 1, simplemente admitimos que el primer entero en la expresión sea cero. Para expresar un número real, que no es racional, simplemente permitimos que la expresión de la fracción continua siga de manera indefinida, siendo algunos ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1 + (2 + (2 + (2 + (2 + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1},$$

$$7 - \sqrt{3} = 5 + (3 + (1 + (2 + (1 + (2 + (1 + (2 + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1},$$

$$\pi = 3 + (7 + (15 + (1 + (292 + (1 + (1 + (1 + (2 + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}.$$

En los dos primeros de estos ejemplos infinitos, las secuencias de números naturales que aparecen –a saber, 1, 2, 2, 2, 2, … en el primer caso y 5, 3, 1, 2, 1, 2, … en el segundo– tienen la propiedad de que son finalmente periódicas (repitiéndose indefinidamente el 2 en el primer caso y repitiéndose indefinidamente la secuencia 1, 2 en el segundo). Recordemos que, como ya se ha advertido antes, en la notación decimal familiar son los números *racionales* los que tienen expresiones (finitas o) finalmente periódicas.

Puede señalarse que en ciertos aspectos la representación como fracciones continuas de los números reales es más profunda e interesante que la normal en términos de desarrollos decimales, y encuentra aplicaciones en muchas áreas diferentes de la matemática moderna, incluida la geometría hiperbólica. En otro orden, las fracciones continuas no son en absoluto apropiadas para la mayor parte de los cálculos prácticos, pues la representación decimal convencional es mucho más fácil de utilizar.

Por otra parte, podemos considerar que una virtud de la representación de "fracción continua" griega es que los números racionales tienen ahora siempre una descripción finita. Una pregunta natural que se puede plantear en este contexto es: ¿qué números tienen una representación en forma de fracción continua *finalmente periódica*?

Un teorema notable, demostrado por primera vez que sepamos por el gran matemático del siglo XVIII Joseph L. Lagrange (cuyas otras ideas más importantes abordaremos más adelante), dice que los números cuyas representaciones en términos de fracciones continuas son finalmente periódicas son los denominados *irracionales cuadráticos*.

Los irracionales cuadráticos se denominan así porque aparecen en la solución de una ecuación cuadrática general

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

con A distinto de cero, cuya solución es

$$-\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}} \quad \text{y} \quad -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}$$

donde, para permanecer dentro del dominio de los números reales, debemos tener B^2 mayor que $4AC$. Cuando A, B y C son números enteros o racionales y no hay solución racional para la ecuación, las soluciones son irracionales cuadráticos.

¿Qué es un irracional cuadrático y qué importancia tiene para la geometría griega? Es un número que puede escribirse en la forma

$$a + \sqrt{b},$$

donde a y b son fracciones, y donde b no es un cuadrado perfecto. Estos números son básicos en geometría euclídea porque son los números irracionales más inmediatos que se encuentran en las construcciones con regla y compás. Recordemos el teorema de Pitágoras, que nos ha llevado por primera vez a considerar el problema de $\sqrt{2}$, y otras construcciones sencillas de longitudes euclídeas que nos llevaron directamente a otros números de la forma anterior.

Ejemplos concretos de irracionales cuadráticos son aquellos casos donde $a = 0$ y b es un número natural (no cuadrado) o racional mayor que 1; por ejemplo:

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{3},\quad \sqrt{5},\quad \sqrt{6},\quad \sqrt{7},\quad \sqrt{8},\quad \sqrt{10},\quad \sqrt{11},\ \ldots$$

La representación de fracción continua de un número semejante es especialmente notable. La secuencia de números naturales que la define como una fracción continua tiene una curiosa propiedad característica. Empieza con cierto número *A*, que luego es seguido inmediatamente por una secuencia *palindrómica* (es decir, una que se lee igual hacia atrás), *B, C, D, …, D, C, B*, seguida por 2*A*, tras el cual la propia secuencia *B, C, D, …, D, C, B,* 2*A* se repite indefinidamente. El número $\sqrt{14}$ es un buen ejemplo, para el que la secuencia es

3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, …

Aquí, *A* = 3 y la secuencia palindrómica *B, C, D, …, D, C, B* es simplemente la secuencia de tres términos 1, 2, 1.

¿Cuánto de esto era conocido por los antiguos griegos? Parece probable que conocían mucho –muy posiblemente todas las cosas que he descrito antes (incluido el teorema de Lagrange)–, aunque quizá carecieran de demostraciones rigurosas para todo. Al parecer, gran parte de esto fue establecido por Teeteto, contemporáneo de Platón. Parece incluso que existe alguna evidencia de este conocimiento (incluidas las secuencias palindrómicas repetidas antes mencionadas), manifiesta en la dialéctica de Platón.

Aunque la incorporación de los irracionales cuadráticos nos acerca algo hacia los números adecuados para la geometría euclídea, no hace todo lo que se necesita. En el décimo (y más difícil) libro de Euclides se consideran números como $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ (con *a* y *b* racionales positivos). Estos no son generalmente irracionales cuadráticos, pero se dan, de todas formas, en construcciones de regla y compás.

Números suficientes para tales construcciones geométricas serían aquellos que pueden formarse a partir de números naturales por uso repetido de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y toma de la raíz cuadrada. Pero operar exclusivamente con tales números se hace muy complicado, y estos son todavía demasiado limitados para consideraciones de geometría euclídea que van más allá de las construcciones de regla y compás.

Es mucho más satisfactorio dar el paso capital –y hasta qué punto es capital se verá más adelante–, para permitir expresiones de fracciones continuas infinitas que son completamente generales. Esto proporcionó a los griegos una forma de describir números que resulta adecuada para la geometría euclídea.

Estos números, en realidad y en terminología moderna, son los denominados *números reales*. Aunque se considera que una definición completamente satisfactoria de tales números no fue encontrada hasta el siglo XIX (con el trabajo de Dedekind, Cantor y otros), el gran matemático y astrónomo griego Eudoxo, que había sido uno de los discípulos de Platón, había obtenido las ideas esenciales ya en el siglo IV a. C. Aquí resulta apropiado comentar las ideas de Eudoxo.

En primer lugar, notemos que los números en geometría euclídea pueden expresarse en términos de razones de longitudes, más que directamente en términos de longitudes. De esta forma, no se necesitaba ninguna unidad específica de longitud (tal como la "pulgada" o el "dactylos" griego). Además, con razones de longitudes no habría restricciones en cuanto al número de tales razones que podían multiplicarse (obviando la aparente necesidad de "hipervolúmenes" en dimensiones más altas cuando se multiplican más de tres longitudes).

El primer paso en la teoría de Eudoxo consistía en proporcionar un criterio acerca de cuándo una razón de longitudes *a* : *b* sería mayor que otra razón semejante *c* : *d*. Este criterio es que existen ciertos enteros positivos *M* y *N* tales que la longitud *a* sumada a sí misma *M* veces supera a *b* sumada a sí misma *N* veces, mientras que también *d* sumada a sí misma *N* veces supera a *c* sumada a sí misma *M* veces. Un criterio correspondiente es válido para expresar la condición de que la razón *a* : *b* es menor que la razón *c* : *d*. La condición para la igualdad de ambas razones sería que no se cumpla ninguno de estos criterios. Con esta ingeniosa noción de "igualdad" de tales razones, Eudoxo tenía, en efecto, un concepto abstracto de *número real* en términos de razones de longitudes. Él también proporcionó reglas para la suma y el producto de tales números reales.

Sin embargo, había una diferencia básica en el punto de vista entre la noción griega de número real y la moderna, porque los griegos creían que el sistema de números nos estaba básicamente "dado" en términos de la noción de *distancia* en el espacio físico, de modo que el problema consistía en tratar de establecer cómo

se comportaban realmente estos números "distancia"; pues el propio "espacio" podría haber parecido un absoluto platónico, incluso si los objetos físicos reales existentes en dicho espacio estuvieran inevitablemente muy lejos del ideal platónico. (Sin embargo, podríamos ver que la teoría de la relatividad general de Einstein ha cambiado ahora esta perspectiva del espacio y la materia de un modo fundamental.)

Un objeto físico tal como un cuadrado dibujado en la arena o un cubo esculpido en mármol podría haber sido considerado por los antiguos griegos como una razonable o, a veces, una excelente aproximación al ideal geométrico platónico. Pese a todo, cualquier objeto semejante proporcionaría en cualquier caso una mera aproximación. Detrás de tales aproximaciones a las formas platónicas –así hubiera parecido– estaría el propio espacio: una entidad de existencia tan abstracta o conceptual que muy bien podría haber sido considerada como una realización directa de una realidad platónica. La medida de distancia en esta geometría ideal sería algo a determinar; en consecuencia, sería apropiado tratar de extraer esta noción ideal de número real de una geometría del espacio que se suponía dada. De hecho, esto es lo que Eudoxo consiguió hacer.

No obstante, en los siglos XIX y XX había surgido la idea de que la noción matemática de número debería presentarse con independencia de la naturaleza del espacio físico. Puesto que se había demostrado que existían geometrías matemáticamente consistentes diferentes de la de Euclides, resultaba inoportuno insistir en que la noción matemática de "geometría" debería ser extraída necesariamente de la naturaleza supuesta del espacio físico "real". Además, podría ser muy difícil, si no imposible, establecer la naturaleza detallada de esta supuesta "geometría física platónica" subyacente en términos del comportamiento de objetos físicos imperfectos. Para conocer la naturaleza de los números de acuerdo con los cuales debe definirse la *distancia geométrica*, por ejemplo, sería necesario saber qué sucede, tanto a distancias infinitamente minúsculas como infinitamente grandes. Incluso hoy, estas cuestiones no tienen una clara respuesta. Así pues, era mucho más oportuno establecer la naturaleza del número de un modo que no remitiera de manera directa a medidas físicas. En consecuencia, Richard Dedekind y Georg Cantor elaboraron sus ideas de lo que "son" los números reales mediante el uso de nociones que no se refieren directamente a la geometría.

Dedekind define un número real a partir de conjuntos infinitos de números racionales. Lo que se hace, básicamente, es considerar que los números racionales, tanto positivos como negativos (y el cero), están dispuestos en orden de tamaño. Podemos imaginar que este ordenamiento tiene lugar de izquierda a derecha, considerando que los racionales negativos se extienden indefinidamente hacia la izquierda y los racionales positivos lo hacen hacia la derecha, estando 0 en el centro. (Esto es solo para propósitos de visualización; de hecho, el procedimiento de Dedekind es completamente abstracto.) Dedekind imagina un *corte* que divide esta disposición claramente en dos, de modo que aquellos números que están a la izquierda del corte son más pequeños que los que están a la derecha. Cuando el "filo del cuchillo" que hace el corte no "incide" sobre un número racional, sino que cae entre ellos, entonces decimos que define un *número real irracional*. Dicho de forma más correcta, esto ocurre cuando los que están a la izquierda no tienen un miembro máximo, y los que están a la derecha no tienen un miembro mínimo. Cuando se añade el sistema de los *irracionales*, definidos en términos de tales *cortes*, al sistema de los números racionales que ya teníamos, se obtiene la familia completa de los *números reales*.

Un libro para imaginar, jugar y construir figuras; para comprender el pensamiento y el para qué de la geometría moderna.

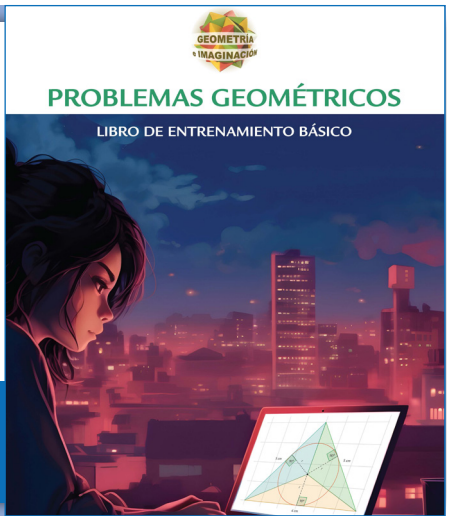
red olímpica

fenchu@oma.org.ar

11 4826 8976 **+54 9 11 5035 7537**

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



El procedimiento de Dedekind conduce directamente, por medio de simples definiciones, a las leyes de adición, sustracción, multiplicación y división de números reales. Además, permite ir más allá y definir límites, mediante los cuales pueden asignarse significados en números reales a cosas tales como la fracción continua infinita que, como hemos visto recientemente, se escribe

$$1 + (2 + (2 + (2 + (2 + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1},$$

o la suma infinita

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

De hecho, la primera nos da el número irracional $\sqrt{2}$ y la segunda $\frac{1}{4}\pi$. La capacidad de tomar límites es fundamental para muchas nociones matemáticas, y es esto lo que da a los números reales su fuerza especial. (Quizá se recuerde que la necesidad de "procedimientos de paso al límite" era un requisito para la definición general de áreas, como ya se fue indicando).

Más sobre la definición de número real y el concepto de *cortadura* de Dedekind

Dirichlet murió durante el crítico año 1872, y solo un año más tarde moría también, a la temprana edad de 34 años, un joven profesor que prometía hacer importantes contribuciones tanto a la matemática como a su historia. Se trataba de Hermann Hankel (1839-1873), alumno de Bernhard Riemann y más tarde profesor de matemática en Leipzig. En 1867 publicó Hankel un libro titulado *Teoría de sistemas de números complejos*, en el que señalaba que "la condición para construir una aritmética universal es, por lo tanto, la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles".

Ya hemos visto que la revolución en geometría tuvo lugar cuando Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski y János Bolyai lograron librarse de ideas preconcebidas sobre la estructura del espacio. En un sentido muy similar, la aritmetización plena y correcta del análisis recién se hizo posible cuando los matemáticos sintieron que, como había previsto Hankel, los números reales había que pensarlos como *estructuras intelectuales* y no como las magnitudes dadas intuitivamente heredadas de la geometría de Euclides.

El punto de vista de Hankel no era en realidad tan nuevo; durante una generación al menos, como veremos más adelante, los algebristas, especialmente los ingleses, habían estado desarrollando ya una aritmética universal y diversas álgebras. Sin embargo, los efectos para el análisis apenas habían sido reconocidos. Bernard Bolzano había hecho un intento de desarrollar una teoría de números reales como límites de sucesiones de números racionales a comienzos de la década de 1830, pero esta teoría pasó desapercibida y no se publicó hasta 1862. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) quizá había sentido tal necesidad de alguna manera; sin embargo, el hecho de que hiciera referencia básicamente al tiempo en vez de al espacio supuso un cambio de lenguaje, aunque no, desde luego, de forma lógica, del usual en el marco geométrico. El punto clave del problema fue atacado y resuelto efectivamente por primera vez por el quinteto que mencionamos antes, que publicó sus resultados en 1872.

Charles Méray fue uno de los más rápidos en compartir sus ideas, pues ya en 1869 publicó un artículo en el que llamaba la atención sobre un grave lapsus de razonamiento del que se habían mostrado culpables prácticamente todos los matemáticos desde la época de Augustin Louis Cauchy. El hecho principal en cuestión consistía esencialmente en definir el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales.

Hay que recordar que tanto Bolzano como Cauchy habían intentado demostrar que una sucesión que "converge en sí misma", es decir, una S_n tal que S_{m+p} difiere de S_m (para m suficientemente grande y p cualquier número natural) en menos que cualquier magnitud ε dada de antemano, también converge en el sentido de su relación *externa* con un número real S, el límite de la sucesión. En su obra *Nueva precisión del análisis infinitesimal*, de 1872, Méray cortó el nudo gordiano al renunciar a utilizar la condición externa de convergencia, es decir, el número real S. Utilizando solamente el criterio de Bolzano-Cauchy, en el que m y p son números naturales y ε un número racional positivo, se puede describir completamente la convergencia sin hacer referencia alguna a los números irracionales.

En un sentido general, Méray consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un *número ficticio* como su *límite ficticio*. Estos números ficticios pueden ordenarse, como demostraba, y son esencialmente lo que conocemos como los *números irracionales*. Méray no es muy preciso acerca de si su sucesión convergente es o no el número mismo. Si lo es, como parece deducirse de las consecuencias, entonces su teoría viene a ser equivalente a la que desarrolló al mismo tiempo Karl Weierstrass.

Dedekind dedicó su atención al problema de los números irracionales tan pronto como en 1858, año en que se encontraba dando clases de análisis. Entonces llegó a la conclusión de que el concepto de límite habría que desarrollarlo de una manera puramente aritmética, sin referencia alguna a la geometría, como era lo usual, si se quería que fuese un concepto riguroso. En vez de buscar simplemente una salida al círculo vicioso de Cauchy, Dedekind se preguntó, tal como expresa el título de su libro, qué es lo que distingue las magnitudes geométricas continuas de los números racionales. Tanto Galileo como Leibniz habían pensado que la "continuidad" de los puntos de una recta era el resultado de su densidad, es decir, del hecho de que entre dos puntos distintos cualesquiera hay siempre otro.

Sin embargo, los números racionales gozan de esta propiedad a pesar de que no forman obviamente un continuo.

Reflexionando sobre este problema, Dedekind llegó a la conclusión de que la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión, sino a una propiedad opuesta exactamente a esta, la de la división de un segmento en dos partes por un punto del segmento. En cualquier división de los puntos del segmento en dos clases tales que cada punto pertenezca a una y solo a una de las dos clases, y tal que todo punto de una de las dos clases esté a la izquierda de cualquier punto de la otra clase, hay uno y solo un punto que produce la división. Tal como escribía Dedekind: "En esta observación trivial se revela el secreto de la continuidad". La observación puede haber sido trivial, pero su autor parece haber tenido algunos escrúpulos acerca de ella, ya que dudó en publicarla durante algunos años.

Dedekind vio que se podía extender el dominio de los números racionales para formar un continuo de números reales si se admite lo que hoy suele llamarse el axioma de Cantor-Dedekind, que afirma que los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales. Expresado este hecho aritméticamente, significa que, para cualquier partición de los números racionales en dos clases disjuntas *A* y *B* tales que todo número de la primera clase *A* sea menor que todo número de la segunda clase *B*, existe uno y solo un número real que produce esta *cortadura* de Dedekind.

Si en *A* hay un número máximo o en *B* un mínimo, entonces la cortadura define un número racional, pero si en *A* no hay máximo ni en *B* mínimo, entonces la cortadura define un número irracional. Si ponemos, por ejemplo, en *A* todos los números racionales negativos, el cero y todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2, y en *B* todos los números racionales positivos cuyos cuadrados sean mayores que 2, entonces habremos dividido el dominio de los números racionales de manera que queda definido un número irracional, en este caso el número que solemos escribir convencionalmente como $\sqrt{2}$.

Ahora bien, señalaba Dedekind, con esta definición los teoremas fundamentales sobre límites se pueden demostrar rigurosamente sin recurrir ya a la intuición geométrica. La geometría fue, sin duda alguna, la que mostró el camino para una definición adecuada de la idea de continuidad, pero al final quedó excluida, como se pretendía, de la definición aritmética formal del concepto. La idea de *cortadura de Dedekind* en el dominio de los números racionales, o cualquier otra construcción formal equivalente de los números reales, ha venido a reemplazar así a la idea de magnitud geométrica como columna vertebral del análisis.

Las distintas definiciones de los números reales son, como había hecho observar Hankel que debían ser, construcciones intelectuales hechas sobre la base de los números racionales y no algo impuesto a la matemática desde fuera. De las definiciones anteriores una de las más populares ha sido la de Dedekind; y en los primeros años del siglo XX Bertrand Russell (1872-1970) propuso una ligera modificación del concepto de cortadura de Dedekind: **Russell observó que, dado que cualquiera de las dos clases *A* y *B* en una cortadura de Dedekind quedaba unívocamente determinada por la otra, una sola bastaba para la determinación de un número real**.

Así $\sqrt{2}$ puede definirse simplemente como el *segmento* o *subclase* del conjunto de los números racionales formado por todos los números racionales negativos, el cero y todos los números racionales positivos cuyos

cuadrados sean menores que 2. Y, de la misma manera, todo número real no es nada más que un segmento del sistema de los números racionales.

LOS NÚMEROS REALES EN EL MUNDO FÍSICO

Aquí estamos tocando una cuestión profunda. Una fuerza impulsora inicial en el desarrollo de las ideas matemáticas ha sido siempre el intento de encontrar estructuras matemáticas que reflejen de forma precisa el comportamiento del mundo físico. Pero normalmente no es posible examinar el propio mundo físico con un detalle tan preciso que de él puedan extraerse directamente nociones matemáticas de la claridad adecuada. El progreso se produce más bien debido a que las nociones matemáticas tienden a tener un "impulso" propio que parece brotar casi por entero del interior de la propia disciplina.

Las ideas matemáticas evolucionan y varios tipos de problemas parecen surgir de manera natural. Algunos de estos (como sucedió con el problema de encontrar la longitud de la diagonal de un cuadrado) pueden llevar a una expansión esencial de los propios conceptos matemáticos en cuyos términos se había planteado originalmente el problema.

Puede parecer que tales ampliaciones nos vienen obligadas, o también pueden surgir de maneras que aparentan ser cuestiones de conveniencia, consistencia o elegancia matemática. En consecuencia, podría presentarse que el desarrollo de la matemática se aleja de lo que se había propuesto conseguir, a saber: reflejar el comportamiento físico. Pero, en muchos casos, este mismo impulso hacia la consistencia y elegancia matemática nos lleva a estructuras y conceptos matemáticos que resultan reflejar el mundo físico de una forma mucho más profunda y de mayor alcance que aquellas de las que partimos. Es como si la propia naturaleza se guiara por el mismo tipo de criterios de consistencia y elegancia que guían al pensamiento matemático humano.

Un ejemplo de esto es el propio sistema de los números reales. No tenemos ninguna evidencia directa en la naturaleza de que haya una noción física de *distancia* que se extienda hasta escalas arbitrariamente grandes; menos evidencia hay aún de que semejante noción sea aplicable en el nivel infinitamente minúsculo.

En realidad, no hay evidencia de que existan *puntos del espacio*, de acuerdo con una geometría que haga uso precisamente de distancias en números reales. En la época de Euclides había escasa evidencia para apoyar siquiera la pretensión de que tales "distancias" euclídeas se extendían hacia fuera hasta más allá de, digamos, unos 10^{12} metros, o hacia dentro, hasta algo tan pequeño como 10^{-5} metros.

La notación científica "10^{12}" para "un millón de millones" hace uso de exponentes, como se describieron anteriormente. Tenderemos a evitar términos verbales tales como "millón", y en especial "billón", dando preferencia a esta notación científica mucho más clara. La palabra "billón" es particularmente confusa, pues en su uso estadounidense y también en el Reino Unido "billón" se refiere a 10^9, mientras que en el uso más antiguo (y más lógico) en el Reino Unido, de acuerdo con la mayoría de las restantes lenguas europeas, se refiere a 10^{12}. Los exponentes negativos, tales como en 10^{-6}, que se refiere a una "millonésima", se utilizan también aquí de acuerdo con la notación científica normal.

La distancia 10^{12} metros es aproximadamente 7 veces la separación entre la Tierra y el Sol. Esta es aproximadamente la distancia al planeta Júpiter, aunque no era conocida en tiempos de Euclides y se hubiera conjeturado mucho menor.

Pero, al haber sido impulsadas matemáticamente por la consistencia y elegancia del sistema de los números reales, todas nuestras teorías físicas satisfactorias y de más amplio alcance hasta la fecha han seguido ateniéndose, sin excepción, a esta antigua noción de *número real*.

Aunque podría parecer que ha habido muy poca justificación para hacer esto a partir de la evidencia de que se disponía en la época de Euclides, nuestra fe en el sistema de los números reales parece haberse visto recompensada. En efecto, nuestras modernas y satisfactorias teorías cosmológicas nos permiten ahora ampliar el rango de nuestras distancias en números reales hasta aproximadamente 10^{26} metros o más, mientras que la precisión de nuestras teorías de la física de partículas extiende este rango hacia dentro, hasta 10^{-17} metros o menos. (La única escala para la que se ha propuesto con seriedad que podría llegar un cambio es de unos

dieciocho órdenes de magnitud inferior a esta, a saber 10^{-35} metros, que es la *escala de Planck* de la gravitación cuántica, que cobrará una importancia especial en nuestras discusiones posteriores.

Puede considerarse una notable justificación de nuestro uso de idealizaciones matemáticas el hecho de que el rango de validez del sistema de los números reales se ha ampliado desde un total de aproximadamente 10^{17} desde lo más pequeño a lo más grande, que parecía adecuado en la época de Euclides, hasta al menos los 10^{43} que nuestras teorías actuales utilizan directamente, lo que supone un extraordinario incremento en un factor de 10^{26}.

Hay mucho más a favor de la validez física del sistema de los números reales. En primer lugar, debemos considerar que también las áreas y los volúmenes son magnitudes para las que convienen medidas muy precisas en números reales. Una medida de volumen es el cubo de una medida de distancia (y un área es el cuadrado de una distancia). En consecuencia, en el caso de los volúmenes podemos considerar que el intervalo relevante es el cubo del anterior. Así, para la época de Euclides esto nos daría un rango de aproximadamente $(10^{17})^3 = 10^{51}$; para las teorías actuales, el intervalo es al menos $(10^{43})^3 = 10^{129}$.

Además, existen otras medidas físicas que requieren descripciones en números reales, según las teorías que hoy en día resultan satisfactorias. La más digna de mención de estas es el tiempo. Según la teoría de la relatividad, este tiene que añadirse al espacio para que nos proporcione el espacio-tiempo (que será objeto de estudio). Los volúmenes espaciotemporales son tetradimensionales, y muy bien podría considerarse que el rango temporal (de nuevo de aproximadamente 10^{43} o más en rango total, en nuestras teorías mejor comprobadas) debería ser incorporado también en nuestras consideraciones, dando así un total del orden de 10^{172}. Veremos algunos números reales todavía mucho mayores que este, aunque en algunos casos no esté realmente claro que sea esencial el uso de números reales (antes que, por ejemplo, enteros).

Más importante para la teoría física es el hecho de que, desde Arquímedes hasta Maxwell, Einstein, Schrödinger, Dirac y otros, pasando por Galileo y Newton, un papel crucial del sistema de los números reales ha consistido en proporcionar un marco necesario para la formulación estándar del *cálculo infinitesimal*.

Todas las teorías dinámicas satisfactorias han requerido para su formulación las nociones del cálculo. Ahora bien, el enfoque convencional del cálculo exige que la naturaleza *infinitesimal* de los reales sea la que es. Es decir, en el extremo inferior de la escala es el rango entero de los números reales el que está siendo utilizado. Las ideas del cálculo infinitesimal subyacen en otras nociones físicas, tales como velocidad, momento o energía. En consecuencia, el sistema de los números reales entra en nuestras teorías físicas satisfactorias de una manera fundamental para nuestra descripción de todas aquellas magnitudes. Aquí, como se ha mencionado antes en relación con las áreas, se está invocando el límite infinitesimal de la estructura a pequeña escala del sistema de los números reales.

Pese a todo, podemos seguir preguntándonos si el sistema de los números reales es realmente "correcto" para la descripción de la realidad física en sus niveles más profundos. Cuando empezaron a introducirse las ideas mecanocuánticas, a comienzos del siglo xx, existía la sensación de que quizá entonces empezábamos a ser testigos de una naturaleza discreta o granular del mundo físico en sus escalas más pequeñas. Aparentemente, la energía solo podía existir en paquetes discretos –o *cuantos*– y las magnitudes físicas de *acción* y *espín* parecen darse solo en múltiplos discretos de una unidad fundamental para el concepto clásico de *acción* y para su contrapartida cuántica, el *espín*. Por ello, varios físicos intentaron construir una imagen alternativa del mundo en la que procesos discretos gobernaban todas las acciones en los niveles más ínfimos.

Sin embargo, y tal como ahora entendemos la mecánica cuántica, esta teoría no nos obliga (ni siquiera nos lleva) a la idea de que hay una naturaleza discreta o granular para el espacio, el tiempo o la energía en sus niveles más ínfimos.

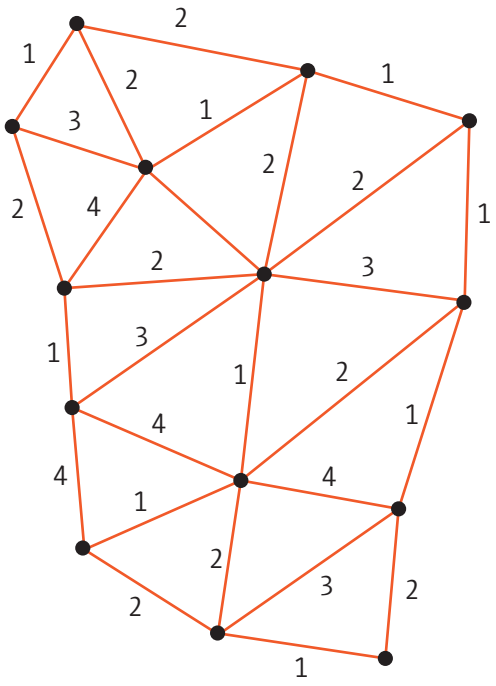
De todos modos, nos ha quedado la idea de que quizá haya realmente una discretización tal en la naturaleza, pese al hecho de que la mecánica cuántica, en su formulación estándar, no implica esto ni mucho menos. Por ejemplo, el gran físico cuántico Erwin Schrödinger fue uno de los primeros en sugerir que podría ser necesario un cambio hacia alguna forma de discretización espacial fundamental:

> **"La idea de un *rango continuo*, tan familiar para los matemáticos de nuestros días, es algo bastante exorbitante, una enorme extrapolación de lo que es accesible para nosotros"**.

Relacionó dichas propuestas con algunas ideas griegas antiguas relativas a la discretización de la naturaleza. También Einstein sugirió, en sus últimas palabras publicadas, que una teoría *algebraica* basada en la discretización podría ser el camino hacia la física futura:

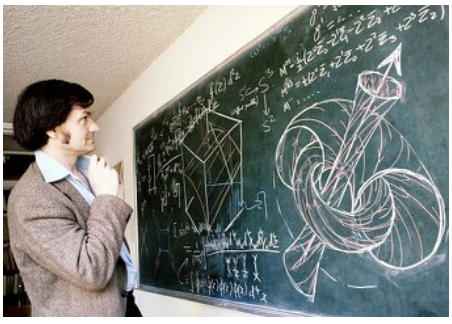
> **"Se pueden dar buenas razones por las que la realidad no puede representarse como un campo continuo [...] Los fenómenos cuánticos [...] deben llevar a un intento de encontrar una teoría puramente algebraica para la descripción de la realidad. Pero nadie sabe cómo obtener la base de una teoría semejante"**.

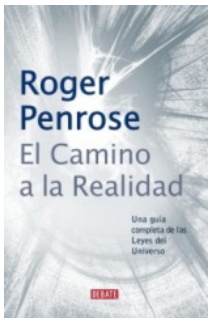
Otros también han perseguido ideas de este tipo. A finales de la década de 1950, Roger Penrose ensayó algo parecido, llegando a un esquema al que denominó *teoría de redes de espín*, en la que la naturaleza discreta del espín mecanocuántico se toma como el bloque constituyente fundamental para un enfoque *combinatorio* (es decir, discreto en lugar de basado en números reales) de la física.



Ejemplo de red de espín.

Roger Penrose, como ya dijimos, es un físico matemático británico y profesor emérito de Matemáticas de la Universidad de Oxford. Es reconocido por su trabajo en física matemática, en particular por sus contribuciones a la teoría de la relatividad general y a la cosmología.



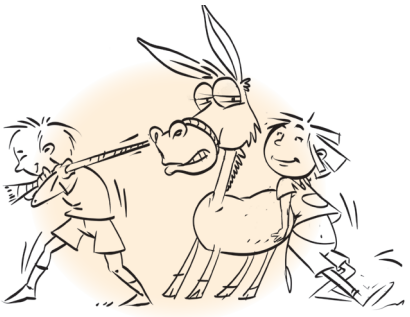


Nació el 8 de agosto de 1931 (edad 93 años) en Colchester, Reino Unido. Se formó en el *University College* de Londres (1955), *University College School Junior Branch*, *St John's College*. Entre otros premios, recibió el premio Nobel de Física, y la Medalla Copley.

Aunque las ideas de Roger Penrose que venimos comentando por su libro *El camino a la realidad* van en esta dirección, no se desarrollaron hasta convertirse en la teoría de redes de espín que ha sido ahora interpretada por otros, en uno de los programas principales para atacar el problema fundamental de la gravitación cuántica. En cualquier caso, tal como hoy se ensaya y pone a prueba la teoría física y como lo ha sido durante los veinticuatro siglos pasados, los números reales siguen constituyendo un ingrediente esencial en nuestra comprensión

del mundo físico. Recordemos que el espín (del inglés *spin*: giro, girar) es una propiedad física de las partículas elementales por la cual tienen un momento angular intrínseco de valor fijo. El espín fue introducido en 1925 por Ralph Kronig. La otra propiedad intrínseca de las partículas elementales es la *carga eléctrica*.

¿NECESITAN LOS NÚMEROS NATURALES EL MUNDO FÍSICO?



En las descripciones anteriores de la aproximación de Dedekind al sistema de los números reales, hemos supuesto que los *números racionales* se daban por "entendidos". De hecho, no es difícil pasar de los enteros a los racionales. Los racionales son simplemente razones de enteros. ¿Qué pasa entonces con los enteros propiamente dichos? ¿Están enraizados en ideas físicas? Incluso los enfoques discretos de la física, que se mencionaron en los dos párrafos anteriores, dependen de nuestra noción de *número natural* (esto es, *número para recuento*) y su extensión, mediante la inclusión de los números negativos, a los *enteros*. Los griegos no consideraban los números negativos como "números" en acto, así que continuemos nuestras consideraciones preguntando primero por el estatus físico de los propios números naturales.

Los *números naturales* son las cantidades que ahora denotamos por 0, 1, 2, 3, 4, etc., es decir, son los números *enteros no negativos*. (Hoy se incluye al 0 en esta lista, lo que es apropiado desde el punto de vista matemático, aunque parece que los antiguos griegos no reconocieron el "cero" como un número en acto. Esto tuvo que esperar hasta los matemáticos hindúes de la India, empezando con Brahmagupta en el siglo VII, seguido de Mahavira y Bhaskara en los siglos IX y XII, respectivamente.) El papel de los números naturales es claro e inequívoco. Son los "números para recuento" más elementales y tienen un papel básico, cualesquiera que puedan ser las leyes de la geometría o de la física. Los números naturales están sujetos a ciertas operaciones familiares, muy en especial las operaciones de *adición* (tal como 37 + 79 = 116) y *multiplicación* (por ejemplo, 37 × 79 = 2 923), que permiten combinar pares de números naturales para producir nuevos números naturales. Estas operaciones son independientes de la geometría del mundo.

No obstante, podemos plantear la cuestión de si los propios números naturales tienen un significado o una existencia con independencia de la naturaleza real del mundo físico. Quizá nuestra noción de los números naturales depende de que en nuestro universo haya objetos discretos razonablemente bien definidos y que persisten en el tiempo. Después de todo, los números naturales aparecen inicialmente cuando queremos contar cosas. Pero esto parece depender de que existan realmente "cosas" persistentes y distinguibles en el universo y que estén disponibles para ser "contadas".

Supongamos, por el contrario, que nuestro universo fuera tal que el número de los objetos tuviese tendencia a variar. ¿Realmente serían los números naturales conceptos *naturales* en un universo semejante? Más aún, quizá el universo contenga solo un número finito de *objetos*, en cuyo caso ¡los propios números *naturales* podrían terminar en algún punto!

Podemos concebir incluso un universo que consista solo en una sustancia amorfa e indiferenciada, para la cual la noción misma de cuantificación numérica podría parecer intrínsecamente inadecuada. ¿Tendría la noción de *número natural* la más mínima relevancia para la descripción de universos de este tipo?

Aunque muy bien pudiera darse el caso de que los habitantes de un universo semejante encontraran difícil de captar nuestro concepto matemático presente de "número natural", es difícil imaginar que no siguiera habiendo un papel importante para entidades tan fundamentales. Hay varias formas de introducir los números naturales en la matemática pura, y estas no parecen depender en absoluto de la naturaleza real del mundo físico. Básicamente, es la noción de un *conjunto* la que necesita ser invocada, siendo esta una noción abstracta que no parece estar relacionada de ninguna manera esencial con la estructura específica del universo físico. De hecho, existen ciertas sutilezas concernientes a esta cuestión y seguramente volveremos a ello más adelante. Por el momento, será conveniente ignorarlas.

Consideremos un modo (anticipado por Cantor y defendido por el destacado matemático John von Neumann) de introducir los números naturales utilizando simplemente la noción abstracta de conjunto. Este modo permite definir lo que se denominan *números ordinales*. Al conjunto más simple de todos se lo llama *conjunto nulo* o *conjunto vacío*, y está caracterizado por el hecho de que **¡no contiene ningún miembro!** El conjunto vacío se suele denotar por el símbolo ∅ y podemos escribir esta definición

$$\varnothing = \{\},$$

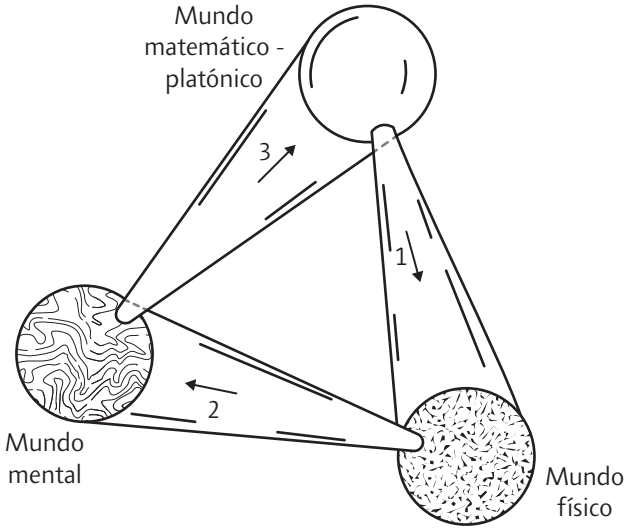
donde los corchetes delimitan un conjunto, el conjunto específico bajo consideración, que tiene como miembros las cantidades indicadas dentro de los corchetes.

En este caso, no hay nada dentro de los corchetes, de modo que el conjunto descrito es realmente el conjunto vacío. Asociemos ∅ con el número natural 0. Ahora podemos continuar y definir el conjunto cuyo único miembro es ∅; es decir, el conjunto {∅}. Es importante darse cuenta de que {∅} no es el mismo conjunto que el conjunto vacío ∅. El conjunto {∅} tiene un miembro (a saber, ∅), mientras que el propio ∅ no tiene ninguno. Asociemos {∅} con el número natural 1.

A continuación, definimos el conjunto cuyos dos miembros son los dos conjuntos que ya hemos encontrado, a saber, ∅ y {∅}, de modo que este nuevo conjunto es {∅, {∅}}, que será asociado al número natural 3. Luego, asociamos con 3 la colección de las tres entidades que hemos encontrado hasta ahora, a saber, el conjunto {0, {0}, {0, {0}}}; y con 4, el conjunto {0, {0}, {0, {0}}, {0, {0}, {0, {0}}}}, cuyos miembros son de nuevo los conjuntos que hemos encontrado previamente, y así sucesivamente.

Quizá no sea así como se consideran normalmente los números naturales, en cuanto a su definición, pero es una de las formas en que los matemáticos pueden llegar al concepto. Más aún nos muestra, al menos, que cosas como los números naturales pueden ser extraídas literalmente de la nada, empleando solo la noción abstracta de *conjunto*. La noción de *número ordinal*, proporcionada aquí en el caso finito, se extiende también a *números ordinales infinitos*, de los que el menor es el "ω" de Cantor, que es la colección ordenada de todos los ordinales finitos.

Obtenemos así una serie infinita de entes matemáticos abstractos *platónicos*: conjuntos que contienen, respectivamente, cero, uno, dos, tres, etc., elementos, un conjunto por cada uno de los números naturales, de forma completamente independiente de la naturaleza física real del universo. En la figura siguiente ya analizada (véase *Leñitas Geométricas* 7ª época, Nº 3, pp. 23-27):

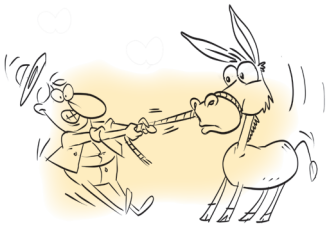


imaginábamos un tipo de *existencia* independiente para las nociones matemáticas platónicas –en este caso, los propios números naturales–, pero esta "existencia" puede ser extraída en apariencia, y ciertamente puede accederse a ella por el mero ejercicio de nuestra imaginación, sin ninguna referencia a los detalles de la naturaleza del universo físico.

Además, la construcción de Dedekind muestra cómo puede llevarse más lejos este tipo de procedimiento "puramente mental", lo que nos permite "construir" el sistema entero de los números reales, sin ninguna referencia tampoco a la naturaleza física real del mundo. No obstante, esta noción de *constructor* no debería tomarse en un sentido demasiado estricto. Más adelante encontraremos que hay ciertos números reales (de hecho, la mayoría de ellos) que son inaccesibles mediante cualquier procedimiento computacional.

Pese a todo, y como se ha señalado antes, los *números reales* parecen tener realmente una relevancia directa para la estructura real del mundo, lo que ilustra la muy misteriosa naturaleza del "primer misterio" representado en la figura de arriba.

NÚMEROS DISCRETOS EN EL MUNDO FÍSICO



Podemos recordar que la construcción de Dedekind utiliza realmente conjuntos de números racionales, y no directamente de números naturales. Como se ha mencionado antes, no es difícil "definir" lo que entendemos por número racional una vez que tenemos la noción de número natural. Pero como paso intermedio es oportuno definir la noción de *entero*, que es un número natural o el negativo de un número natural (siendo el número cero su propio negativo). En un sentido formal, no hay ninguna dificultad para dar una definición matemática de *negativo*: dicho de forma muy tosca, simplemente añadimos un "signo", escrito como "–", a cada número natural (excepto el 0) y definimos consistentemente todas las reglas aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división (excepto por cero). Sin embargo, esto no aborda la cuestión del *significado físico* de un número negativo. ¿Qué podría significar, por ejemplo, decir que hay "menos tres vacas" en un campo?

Creo que está claro que, a diferencia de los propios números naturales, no hay contenido físico evidente para la noción de un número negativo de objetos físicos. Ciertamente, los enteros negativos tienen un papel organizador extraordinariamente valioso, como se ve en los balances bancarios y otras transacciones financieras. Pero, ¿tienen relevancia directa para el mundo físico? Cuando decimos "relevancia directa", no nos referimos a circunstancias donde podría parecer que son los números reales negativos los que constituyen las medidas relevantes, como sucede cuando una distancia medida en una dirección cuenta como positiva mientras que medida en dirección contraria contaría como negativa, o lo mismo con respecto al tiempo, en cuyo caso el tiempo que se extiende hacia el pasado cuenta como negativo. Nos estamos refiriendo más bien a números que son cantidades escalares, en el sentido de que no hay un aspecto direccional (o temporal) en la magnitud en cuestión. En estas circunstancias, parece ser que es el sistema de los enteros, tanto positivos como negativos, el que tiene relevancia física directa.

Resulta notable que solo en los últimos cien años aproximadamente se ha hecho manifiesto que el sistema de los enteros parece tener realmente una relevancia física directa. El primer ejemplo de una magnitud física que parece estar cuantificada apropiadamente por enteros es la *carga eléctrica*.

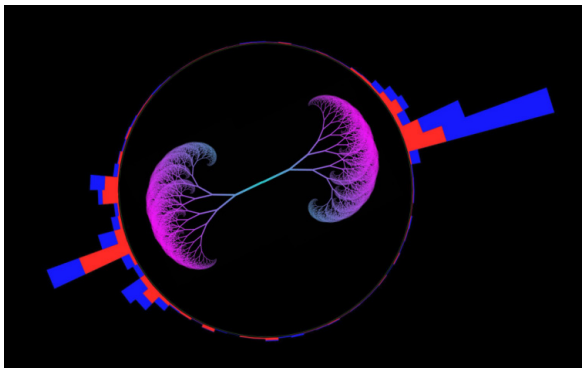
George Johnstone Stoney (15 de febrero de 1826-5 de julio de 1911) fue un físico angloirlandés. Es famoso principalmente por haber introducido el término electrón como la *unidad fundamental de la cantidad de electricidad*. Introdujo el concepto de electrón antes de que se descubriera la propia partícula. Se dedicó a realizar una primera evaluación del número de Avogadro. En 1874 estableció la hipótesis según la cual la electricidad era creada por unos corpúsculos elementales que llamó electrones. En 1897, su intuición sobre la naturaleza de la electricidad fue confirmada por el físico inglés Joseph John Thomson.

En 1909, el físico estadounidense Robert Andrews Millikan diseñó su famoso experimento de la "gota de aceite", que demostró de forma precisa que la carga en cuerpos eléctricamente cargados (las gotas de aceite en su experimento) se da en múltiplos enteros de un valor bien definido: la *carga del electrón*.

Hasta donde sabemos (aunque todavía no hay una completa justificación teórica para ello), la carga eléctrica de cualquier cuerpo discreto aislado está realmente cuantificada en términos de múltiplos enteros, positivos, negativos o nulos, de un valor concreto, a saber, la carga del protón (o del electrón, que es la negativa de la del protón).

En 1959, R. A. Lyttleton y H. Bondi propusieron que una ligerísima diferencia entre la carga del protón y (menos) la del electrón, del orden de una parte en 10^{18} podría explicar la expansión del universo. Por desgracia para esta teoría, fue pronto refutada en varios experimentos. De todas formas, esta idea dio un excelente ejemplo de pensamiento creativo.

Ahora pensamos que los protones son objetos compuestos construidos a partir de entidades más pequeñas conocidas como *quarks* y otras entidades sin carga denominadas *gluones*. Hay tres quarks en cada protón, que tienen cargas eléctricas con valores respectivos de 2/3, 2/3, –1/3. La suma de estas cargas constituyentes da un valor total de 1 para el protón. Si los quarks son entidades fundamentales, entonces la unidad básica de carga es un tercio de la que parecíamos tener antes. En cualquier caso, sigue siendo cierto que la carga eléctrica se mide en términos de enteros, aunque ahora son múltiplos enteros de un tercio de la carga del protón. El papel de los quarks y los gluones en la moderna física de partículas esperamos verlo más adelante.



Los quarks y los gluones son las partículas elementales que componen los protones y los neutrones, que a su vez son los componentes básicos del núcleo de cada átomo. Los gluones son las partículas que median la fuerza nuclear fuerte, que es responsable de *pegar* los quarks juntos en protones y neutrones. La interacción entre quarks y gluones se describe mediante la cromodinámica cuántica (QCD), la teoría cuántica de la fuerza nuclear fuerte. Si bien los quarks y los gluones no son directamente observables, tenemos formas de estudiarlos sin detección directa.

La carga eléctrica es solo un ejemplo de lo que se denomina un *número cuántico aditivo*. Los números cuánticos son cantidades que sirven para caracterizar a las partículas de la naturaleza. Un número cuántico semejante, que consideraremos aquí que es un número real de algún tipo, es *aditivo* si para obtener su valor para una entidad compuesta sumamos simplemente los valores individuales de las partículas constituyentes –teniendo en cuenta debidamente, por supuesto, los signos, como en el caso del protón y sus quarks constituyentes que se ha señalado antes–. Aquí distinguimos los números cuánticos *aditivos* de los números que los físicos llaman *multiplicativos*.

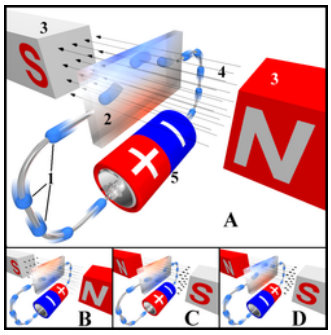
Es un hecho muy sorprendente, de acuerdo con el estado actual de nuestro conocimiento físico, que todos los números cuánticos aditivos conocidos estén cuantificados realmente en términos del sistema de los enteros, no en términos de números reales en general, ni tampoco de simples números naturales, de modo que realmente se dan los valores negativos.

De hecho, según la física del siglo xx, ahora hay un sentido en el que tiene significado referirse a un número negativo de entidades físicas. El gran físico Paul Dirac propuso, en 1929-1931, su teoría de las antipartículas, según la cual (tal como se entendió posteriormente) por cada tipo de partícula existe también su correspondiente *antipartícula* para la que cada número cuántico aditivo tiene exactamente el negativo del valor que tiene para la partícula original. Así pues, el sistema de los enteros (incluidos los negativos) parece tener realmente una clara relevancia para el universo físico, una relevancia física que se ha hecho manifiesta solo en el siglo xx a pesar de los muchos siglos durante los cuales los enteros han encontrado gran valor en la matemática, el comercio y muchas otras actividades humanas.

Llegados a este punto, habría que hacer una matización importante. Aunque es verdad que, en cierto sentido, un antiprotón es un protón negativo, no es realmente "menos un protón". La razón está en que la inversión de signo se refiere solo a los números cuánticos aditivos, mientras que la noción de masa no es aditiva en la teoría física moderna.

"Menos un protón" tendría que ser un antiprotón cuya masa fuera el negativo del valor de la masa de un protón ordinario. Pero la masa de una partícula física real no puede ser negativa. Un antiprotón tiene la misma masa que un protón ordinario, que es una masa positiva. Veremos más adelante que, según las ideas de la teoría cuántica de campos, existen objetos denominados *partículas virtuales* para los que la masa (o, más correctamente, la energía) puede ser negativa. "Menos un protón" sería realmente un antiprotón virtual. Pero una partícula virtual no tiene una existencia independiente como la de una "partícula real".

Ahora nos haremos la correspondiente pregunta acerca de los números racionales. ¿Ha encontrado este sistema de números cualquier relevancia directa para el universo físico? Hasta donde sabemos, no parece que sea así, al menos en lo que respecta a la teoría convencional. Existen algunas curiosidades físicas en las que la familia de los números racionales desempeña su papel, pero sería difícil sostener que esto revela algún papel físico fundamental para los números racionales. Por ejemplo, en el "efecto Hall cuántico fraccionario" se observa que los números fraccionarios desempeñan un papel clave. Se conoce como *efecto Hall* a la aparición de un campo eléctrico por separación de cargas en el interior de un conductor por el que circula una corriente en presencia de un campo magnético con componente perpendicular al movimiento de las cargas.



En la imagen A, una carga negativa aparece en el borde superior del sensor Hall (simbolizada con el color azul), y una positiva en el borde inferior (color rojo). En B y C, el campo eléctrico o el magnético están invertidos, causando que la polaridad se invierta. Invertir tanto la corriente como el campo magnético (imagen D) causa que la sonda asuma de nuevo una carga negativa en la esquina superior.

Este campo eléctrico (campo Hall) es ortogonal al movimiento de las cargas y a la componente perpendicular del campo magnético aplicado. Lleva el nombre de su primer modelador, el físico estadounidense Edwin Herbert Hall (1855-1938). En épocas contemporáneas (1985), el físico alemán Klaus von Klitzing y sus colaboradores descubrieron el hoy conocido como *efecto Hall cuántico*, lo que les valió la obtención del premio Nobel de Física en 1985. En 1998 se otorgó un nuevo premio Nobel de Física a los profesores Robert Laughlin, Horst Strömer y Daniel Tsui por el descubrimiento de un nuevo fluido cuántico con excitaciones de carga fraccionarias. Este nuevo efecto ha traído grandes problemas a los físicos teóricos y actualmente constituye uno de los campos de investigación de mayor interés y actualidad en toda la física del estado sólido.

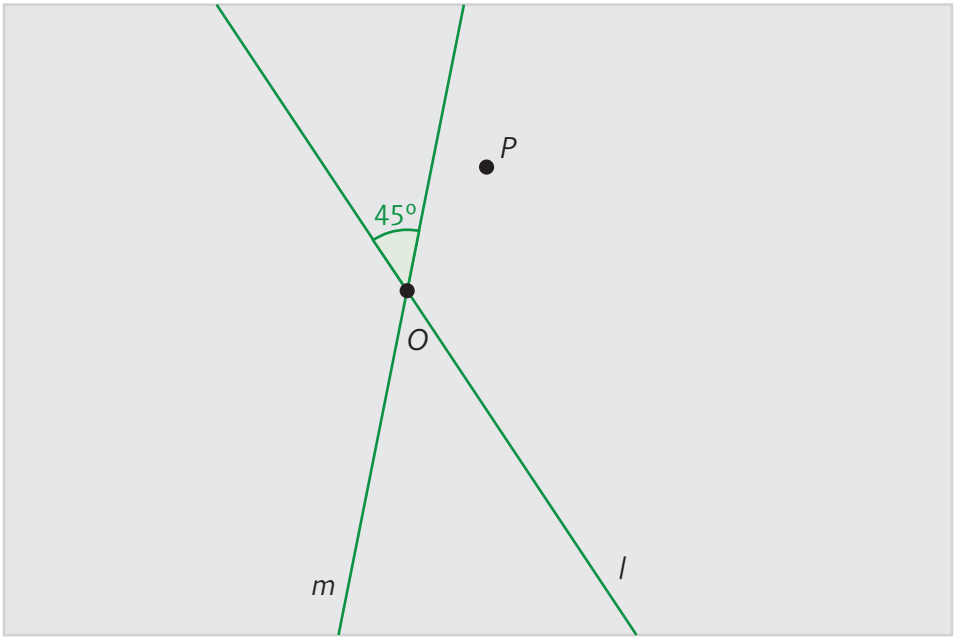
Por otra parte, pudiera ser que hubiera un papel especial para los racionales en la probabilidad mecanocuántica fundamental, donde la probabilidad racional representa una elección entre alternativas, cada una de las cuales implica solo un número finito de posibilidades. Este tipo de cosas desempeña un papel en la teoría de las redes de espín. De momento, el estatus adecuado de estas ideas no está claro.

Pese a todo, existen otros tipos de números que, según la teoría aceptada, sí parecen desempeñar un papel fundamental en la marcha del universo. Los más importantes y sorprendentes de estos son los *números complejos*, en los que se introduce la cantidad aparentemente mística $\sqrt{-1}$, normalmente denotada por "i", y los cuales se añaden al sistema de los números reales.

Encontrados por primera vez en el siglo XVI, pero tratados con desconfianza durante cientos de años, la utilidad matemática de los números complejos impresionó poco a poco a la comunidad matemática en un grado cada vez mayor, hasta que los números complejos se convirtieron en un ingrediente indispensable y casi mágico de nuestro pensamiento matemático. Y ahora resulta que no solo son fundamentales para la matemática, estos extraños números desempeñan también un papel extraordinario y muy básico en el funcionamiento del universo físico en sus escalas más ínfimas.

Esto produce asombro, y como ejemplo de la convergencia entre las ideas matemáticas y los mecanismos más profundos del universo físico es más sorprendente incluso que el sistema de números reales que hemos estado considerando culturalmente. Iremos pues ahora a estos números notables que ya invaden la vida cotidiana.

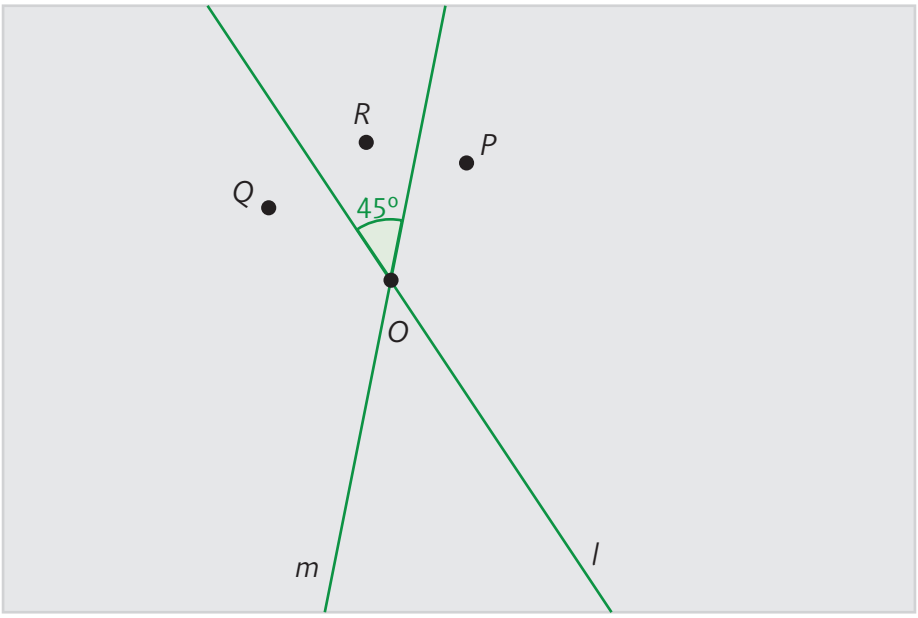
En la hoja de papel se trazaron dos rectas distantes de 45° que pasan por el punto *O* y se marcó un punto *P*, tal como muestra la figura.



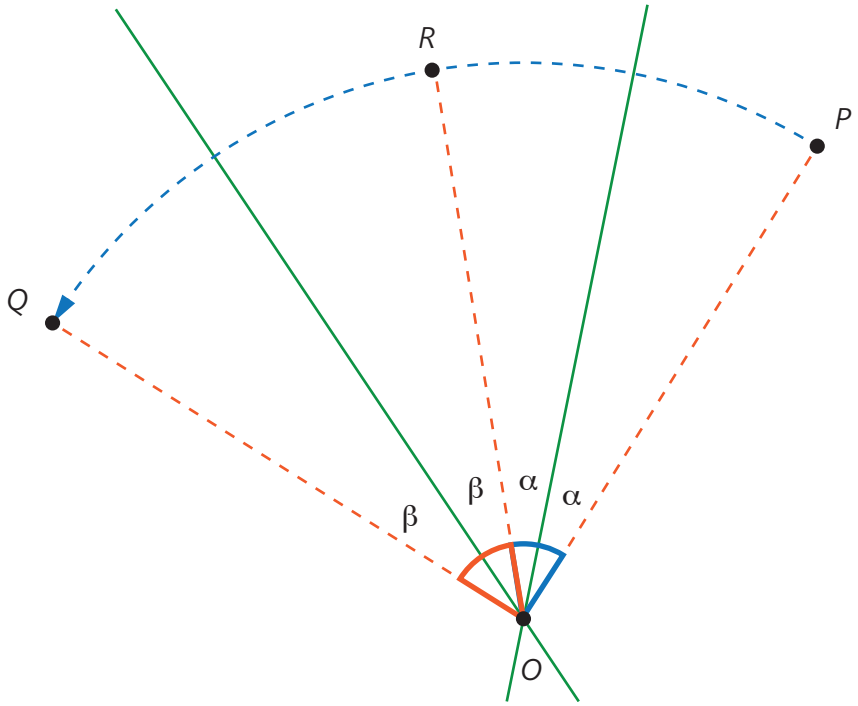
Mostrar cómo marcar el punto *Q* que se obtendría rotando *P* 90° alrededor de *O* en sentido antihorario usando solo un alfiler.

Solución

Usando solo un alfiler, es posible marcar el punto simétrico de un punto dado respecto de una recta dada (ver Problema semanal 10-2025). Marcamos el punto *R* simétrico de *P* respecto de la recta *m*; luego, marcamos el punto *Q*, simétrico de *R* respecto de la recta *l*.



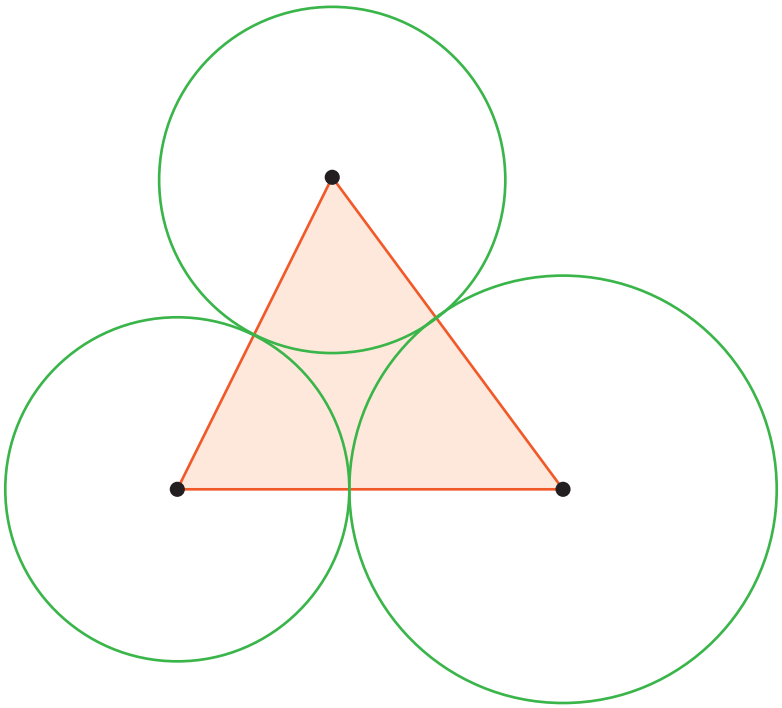
Observemos los ángulos que se forman con vértice en *O*.



Se tiene $\alpha + \beta = 45^\circ$ y los segmentos *OP*, *OR* y *OQ* son de igual longitud.

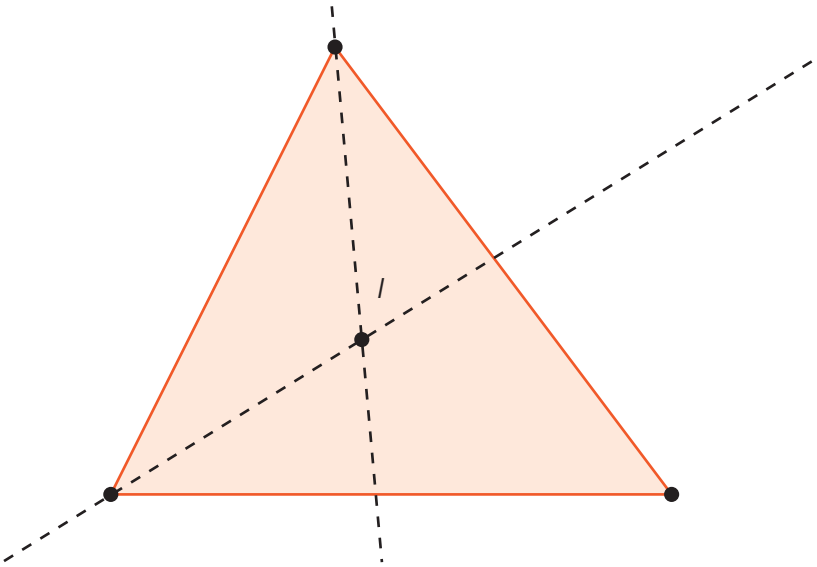
Pregunta: Si se deseara rotar *P* en sentido horario, ¿cómo proceder?

Dado un triángulo, indicar cómo construir, usando GeoGebra, circunferencias con centro en los vértices del triángulo que sean tangentes dos a dos, tal como muestra la figura.

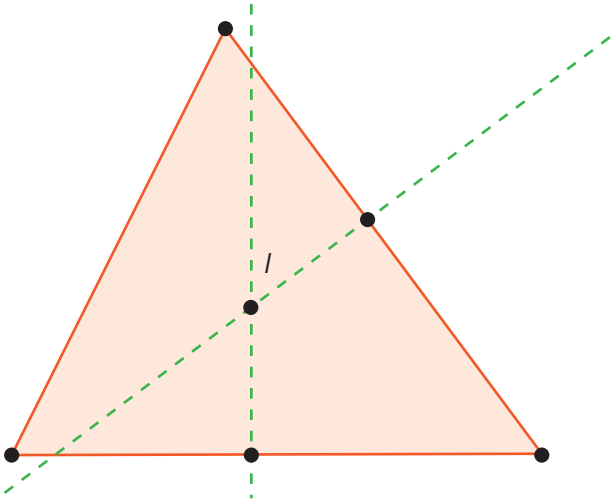


Solución

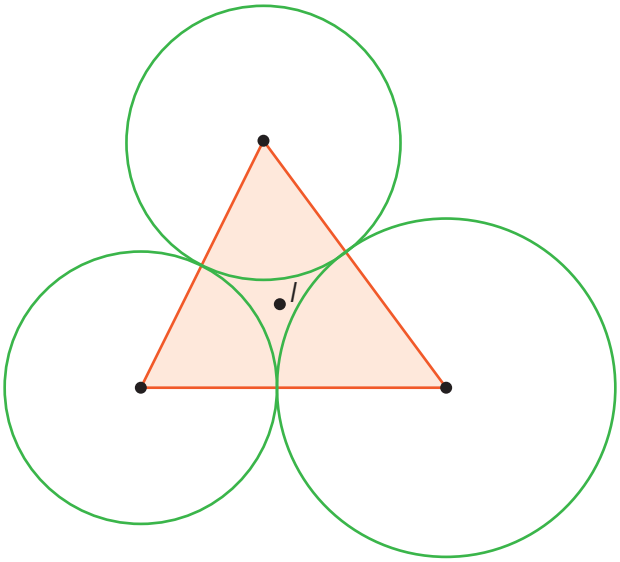
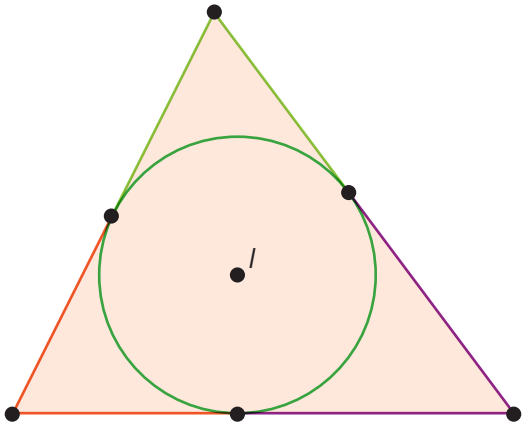
Con el recurso ***Bisectriz*** trazamos dos bisectrices del triángulo para determinar el incentro *I* del triángulo.



Ocultamos las bisectrices y con el recurso ***Perpendicular*** trazamos por el punto *I* dos perpendiculares a dos lados del triángulo.



La solución al problema está en las circunferencias cuyos centros son vértices del triángulo y que pasan por uno de los puntos marcados sobre los dos lados del triángulo.



El motivo por el que con esta construcción se resuelve el problema es que las dos tangentes desde un punto a una circunferencia son de igual longitud. Si se toma la circunferencia inscripta en el triángulo, los puntos de contacto de esta con los lados del triángulo descomponen a los lados del triángulo en la forma apropiada para trazar las tres circunferencias.