

“[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen”. *Dr. Alberto Calderón*



I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

La época heroica de la geometría

INTRODUCCIÓN

Entre todas las ramas de la matemática, la geometría ha sido la que más sometida ha estado a cambios, según evolucionaban las preferencias de una época a otra. En la Grecia clásica alcanzó su cenit, solo para caer hasta su nadir hacia la época del hundimiento del Imperio romano. En Arabia y en la Europa renacentista recuperó parte del terreno perdido; durante el siglo XVII se encontraba en el umbral de una nueva era, para ser casi olvidada a continuación durante más de un siglo, al menos por los matemáticos que se dedicaban a la investigación, languideciendo así a la sombra de las ramas del análisis, que proliferaban de una manera exuberante. Inglaterra había librado una batalla perdida, especialmente a finales del siglo XVIII, para reponer los *Elementos* de Euclides en el glorioso lugar que ocuparan antaño, pero lo cierto es que poco se hizo por promover la investigación en el tema.



Los esfuerzos de Gaspard Monge y de Lazare Carnot condujeron a un movimiento de renovación de la geometría pura durante el período de la Revolución francesa, pero el verdadero renacimiento, en forma casi explosiva, de la geometría como rama viva de la matemática se produjo a comienzos del siglo XIX. Y, como podría haberse imaginado, la Escuela Politécnica francesa jugó un papel importante en este movimiento,

Elementos de geometría afín en el plano y en el espacio

fenchu@oma.org.ar

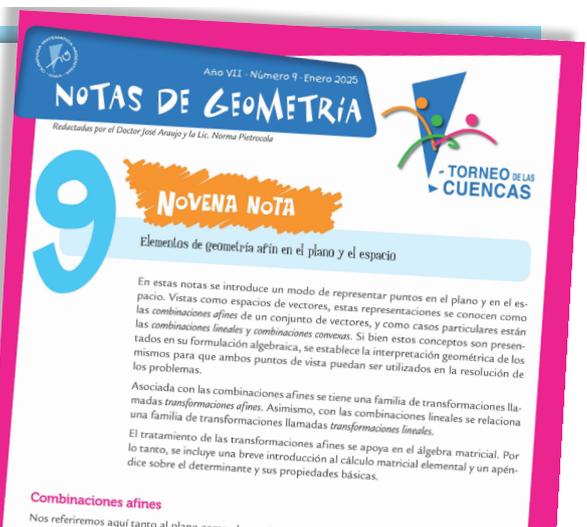
☎ 11 4826 8976

☎ +54 9 11 5035 7537



¡Hacé tu pedido!

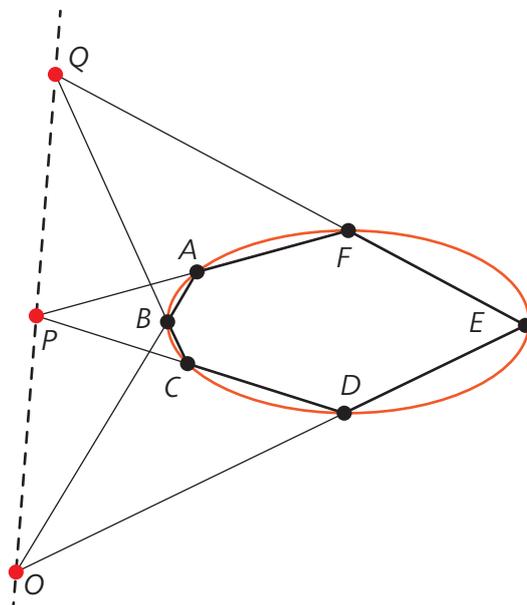
En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

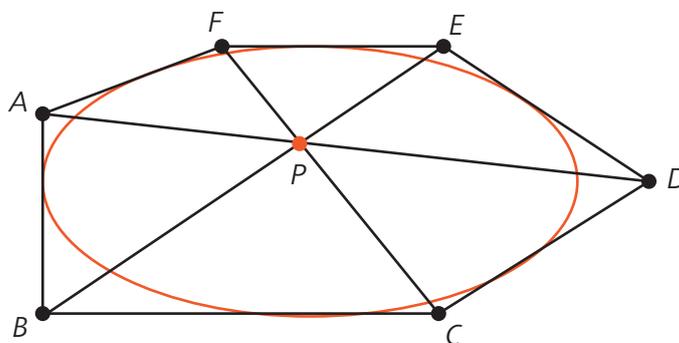
pues allí fue descubierto el bien conocido teorema de Brianchon por un estudiante, y se publicó en 1806 en el *Journal de l'École Polytechnique*. Charles Julien Brianchon (1785-1864) acababa de ingresar en la escuela el año anterior, estudiando con Monge y leyendo la *Geometría de posición* de Carnot. Este estudiante de 21 años, que llegó a ser más tarde oficial de artillería y profesor, demostró en primer lugar el teorema de Pascal, olvidado durante largo tiempo, teorema que formulaba Brianchon ya en su forma moderna:

Para todo hexágono inscrito en una cónica, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos están en una recta (figura siguiente).



Siguiendo unas cuantas demostraciones, nos encontramos con el teorema que lleva su nombre, ilustrado a continuación:

En cualquier hexágono circunscrito a una cónica, las tres diagonales se cortan en el mismo punto.



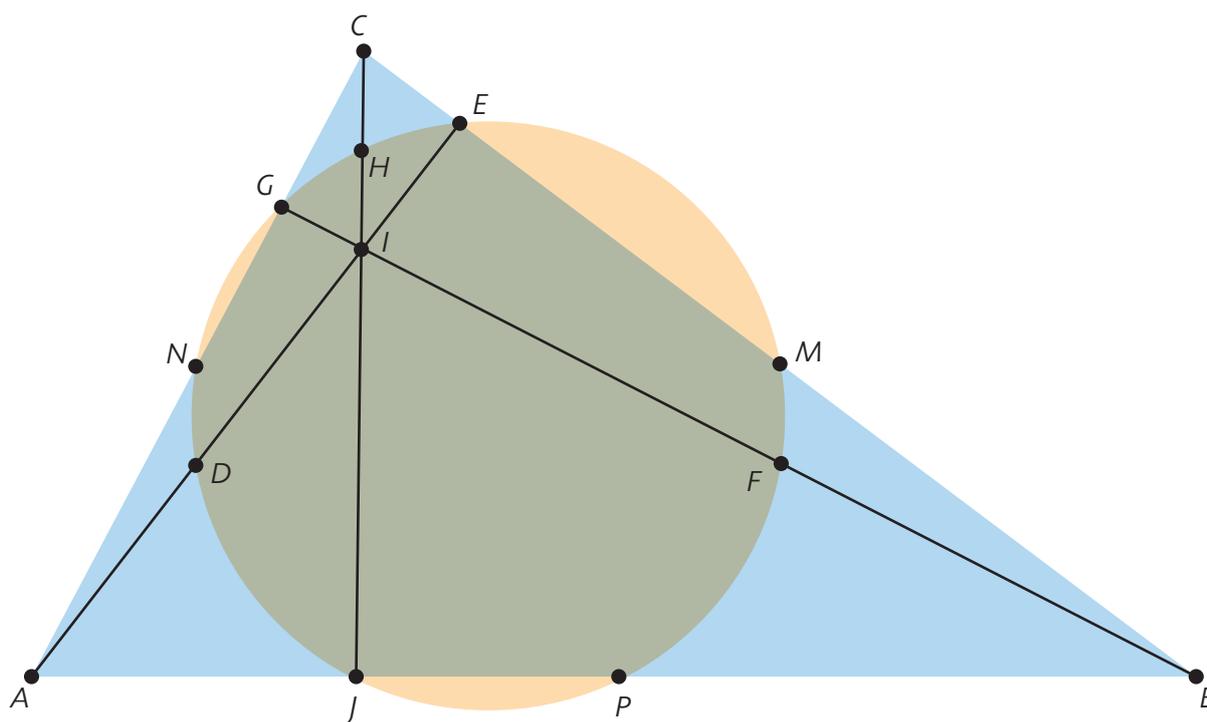
Lo mismo que Pascal se había mostrado impresionado por el gran número de corolarios que había conseguido deducir de su teorema, así también Brianchon observó que su propio teorema “está preñado de consecuencias curiosas”.

Los teoremas de Pascal y Brianchon, de hecho, son fundamentales para el estudio proyectivo de las cónicas. Además, constituyen el primer ejemplo claro de un par de importantes teoremas *duales* en geometría, es decir, de teoremas que se convierten el uno en el otro si se intercambian las palabras “punto” y “recta”. Si leemos la frase “una recta es tangente a una cónica” como “una recta está sobre una cónica”, entonces podemos enunciar los dos teoremas de la siguiente forma combinada:

Los seis $\left\{ \begin{array}{l} \text{vértices} \\ \text{lados} \end{array} \right\}$ de un hexágono están sobre una cónica si y solo si los/las tres $\left\{ \begin{array}{l} \text{puntos} \\ \text{rectas} \end{array} \right\}$ comunes a los tres pares de $\left\{ \begin{array}{l} \text{lados} \\ \text{vértices} \end{array} \right\}$ opuestos tienen una/un $\left\{ \begin{array}{l} \text{recta} \\ \text{punto} \end{array} \right\}$ común.

Este tipo de relaciones entre puntos y rectas con respecto a una cónica fue explotado más tarde de una manera efectiva por otro alumno del Politécnico, el hombre al que podemos considerar con razón como el verdadero fundador de la geometría proyectiva. Nos referimos a Jean-Victor Poncelet (1788-1867), que estudió también con Monge, ingresó en el cuerpo de ingenieros del ejército con el tiempo justo para tomar parte en la desdichada campaña de Napoleón en Rusia en 1812, y permaneció prisionero varios años en una cárcel de Moscú.

A su regreso a Francia se convirtió en la figura más importante quizá del renacimiento de la geometría pura. Entre sus primeros descubrimientos está uno que compartió con Brianchon, y que ambos publicaron en un artículo conjunto de los *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, fundados por Joseph Diez Gergonne, correspondientes a los años 1820-1821. El título de este artículo, "Investigaciones sobre la determinación de una hipérbola equilátera", no da ninguna pista sobre uno de los bellos teoremas que contiene, el que se refiere a lo que conocemos hoy como "la circunferencia de los nueve puntos".



La circunferencia de los nueve puntos.

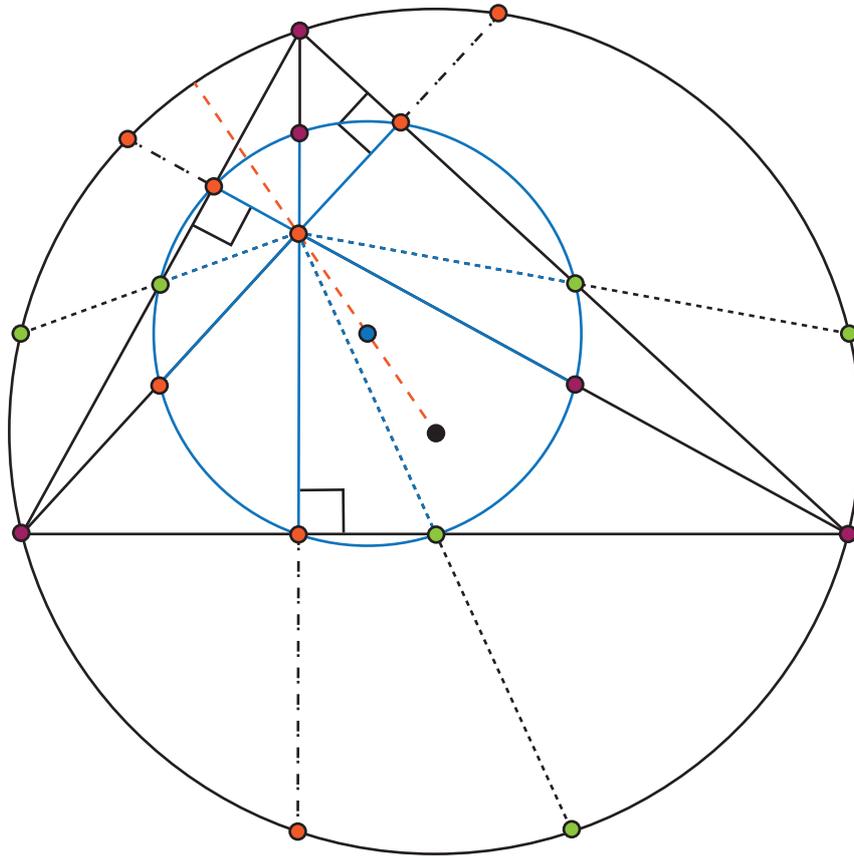
Brianchon y Poncelet demuestran en este trabajo que **la circunferencia que pasa por los pies de las perpendiculares trazadas por los vértices de un triángulo a los lados opuestos pasa también por los puntos medios de los lados, así como por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices del triángulo con el punto de intersección de las tres perpendiculares.**

Este notable teorema no suele llevar los nombres ni de Brianchon ni de Poncelet, sino el de otro matemático, Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834), que, de manera independiente, publicó este teorema y otros análogos en 1822 en un breve libro en alemán con un título prolijo y difuso. El hecho de que la circunferencia de los nueve puntos se conozca hoy como la "circunferencia de Feuerbach" está justificado, en parte, no por la prioridad en su publicación, sino por otras propiedades de dicha circunferencia descubiertas por Feuerbach.

El centro de la circunferencia de los nueve puntos está situado sobre la recta de Euler del triángulo, tal como demostró Feuerbach, y coincide con el punto medio del segmento cuyos extremos son el ortocentro y el circuncentro. Aún más notable es la propiedad expresada en lo que hoy se conoce como el teorema de Feuerbach:

"La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo cualquiera es tangente internamente a la circunferencia inscrita y tangente externamente a las tres circunferencias exinscritas",

lo que constituye posiblemente, en palabras de Julian Lowell Coolidge, "el teorema más bello de la geometría elemental que se ha descubierto desde la época de Euclides".



Teorema de Feuerbach.

En su demostración, Feuerbach hace uso del hecho de que los radios de las circunferencias inscrita y exinscritas a un triángulo vienen dados por

$$\frac{2K}{\pm a \pm b \pm c}$$

donde a, b, c , son los lados del triángulo y K su área, y donde debe usarse un signo menos como máximo.

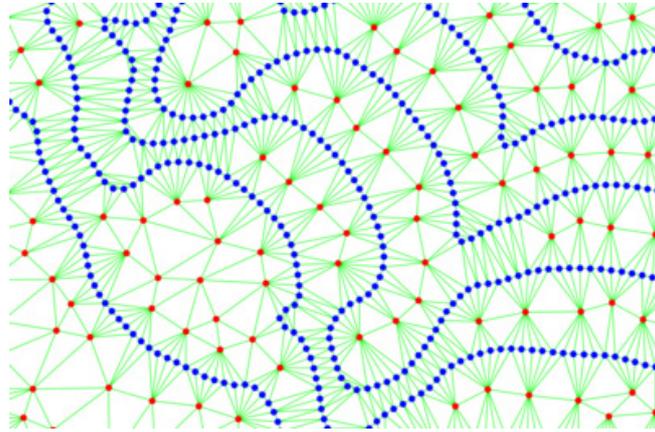
LA GEOMETRÍA DE LA INVERSIÓN. TRANSFORMACIONES CONFORMES



La obra de Feuerbach, que murió cuando solo tenía 34 años, puede considerarse como un ejemplo típico de los numerosos resultados nuevos sobre la geometría del triángulo y la circunferencia que se fueron descubriendo a lo largo del siglo XIX. Ningún país en especial tuvo el monopolio de este desarrollo de la matemática elemental, pero quizá se pueda atribuir a Alemania el papel principal, por ser la patria de Jakob Steiner (1796-1863), uno de los muchos descubridores independientes de la circunferencia de los nueve puntos y, mucho más importante aún, el matemático al que se suele considerar generalmente como el más grande de los geómetras de la época moderna, tal como Apolonio lo fue en la Antigüedad.

En realidad, Steiner nació en Suiza, pero hizo sus estudios en Heidelberg y en Berlín y, gracias al apoyo de Carl Gustav Jacobi, obtuvo en Berlín una cátedra que ocupó hasta su muerte. En sus manos, la geometría sintética hizo progresos comparables a los que había hecho anteriormente el análisis, y rivalizó con Niels Henrik Abel en el número de artículos publicados en el *Journal de Crelle*. El nombre de Steiner aparece en geometría en muchos contextos, incluido el que se refiere a las propiedades de los "puntos de Steiner": si se unen de todas las maneras posibles los seis puntos de una cónica en el *hexagrama místico* de Pascal, se obtienen 60 rectas de Pascal que se cortan tres a tres en 20 puntos de Steiner.

En geometría computacional, un punto de Steiner es un punto que no es parte del argumento en un problema de optimización geométrica, pero que es añadido durante la solución del problema, para crear una mejor solución que pudiera ser posible a partir de los puntos originales por sí solos.



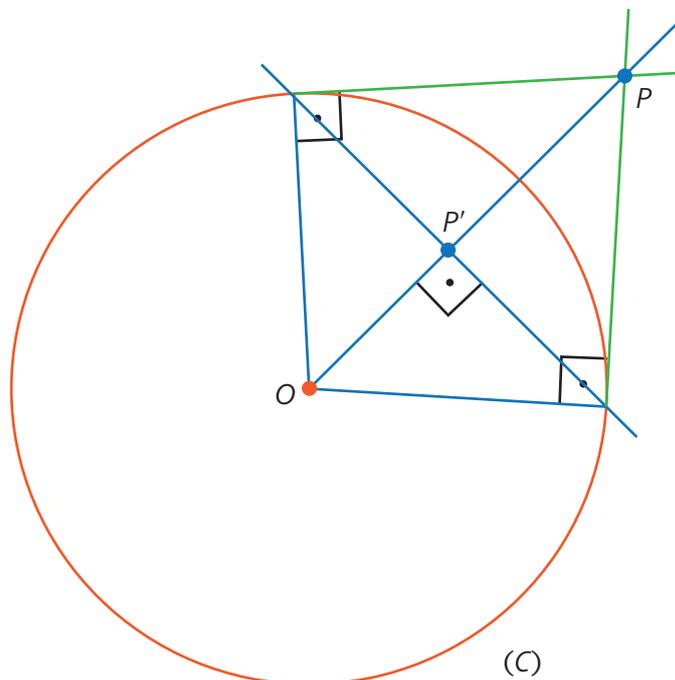
Puntos de Steiner.

También demostró que todas las construcciones euclídeas pueden efectuarse con la regla únicamente, siempre que se nos dé además una única circunferencia fija. Steiner sentía una gran aversión por los métodos analíticos y demostró, en un artículo publicado en el *Journal de Crelle*, y utilizando exclusivamente métodos sintéticos, un sorprendente teorema que parece pertenecer de manera natural, por su complejidad, al análisis, el de que una superficie de tercer orden solo puede contener 27 rectas.

La historia de la geometría durante el siglo XIX está llena de casos de descubrimientos independientes y casi simultáneos, y Steiner se vio implicado en varios de estos casos. En 1822, Poncelet, inspirado por la obra de Lorenzo Mascheroni, había sugerido que todas las construcciones euclídeas planas podrían efectuarse con la regla, únicamente, si se daba además una circunferencia concreta y su centro, teorema que Steiner demostró en 1833, como hemos visto.

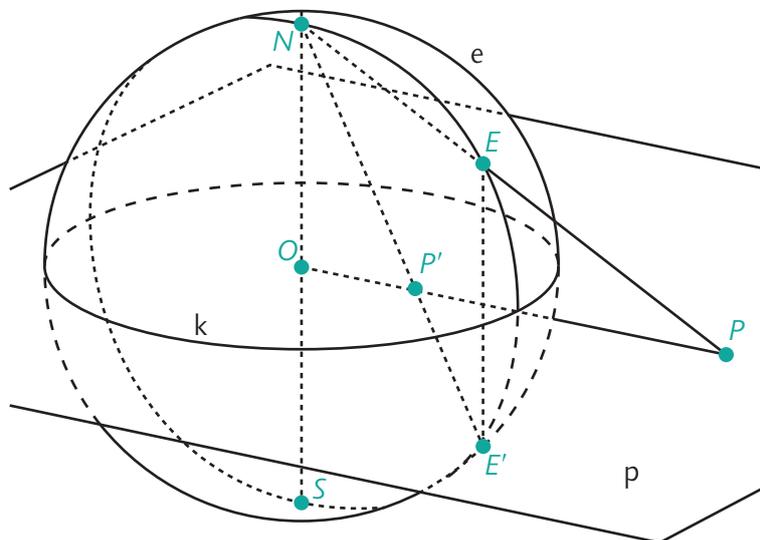
Es decir que el teorema de Poncelet-Steiner demuestra que no podemos prescindir completamente del compás en la geometría euclídea, pero que una vez utilizado para trazar una circunferencia cualquiera, podremos desecharlo a favor de la regla únicamente, de una manera parecida a como Mascheroni había utilizado únicamente el compás.

Steiner nos recuerda en cierto modo a Carl Friedrich Gauss, por el hecho de que las ideas y los descubrimientos se amontonaban en su mente con tal rapidez que a duras penas conseguía ponerlos ordenadamente por escrito. En 1824 había descubierto ya la fructífera transformación geométrica conocida como *inversión*. Si los puntos P y P' están sobre una semirrecta cuyo origen es el centro O de una circunferencia C de radio $r \neq 0$, y si el producto de las distancias OP y OP' es r^2 , entonces se dice que cada uno de los puntos P, P' , es inverso del otro con respecto a la circunferencia C (figura siguiente).



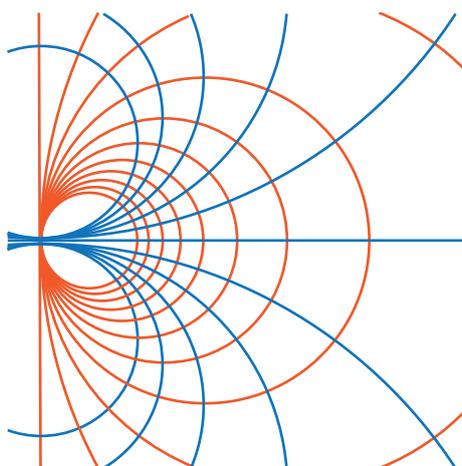
A todo punto P exterior al círculo que determina C le corresponde en la inversión uno y solo uno P' interior al círculo, mientras que el centro O es el único punto interior al círculo que no corresponde a ningún punto exterior.

Nos encontramos aquí, de una manera indirecta, con una paradoja del tipo de las de Bolzano: el interior de un círculo cualquiera, por pequeño que sea, contiene, como si dijéramos, un punto más que la región del plano exterior al círculo. De una manera totalmente análoga al caso del plano, se puede definir fácilmente la inversión con respecto a una superficie esférica en el espacio tridimensional (figura siguiente).



Se puede probar sin dificultad gran cantidad de teoremas pertenecientes a la geometría de la inversión del plano o del espacio, bien sea por métodos analíticos o sintéticos. En particular, es inmediato probar que, en una inversión plana, toda circunferencia que no pase por el centro de inversión se transforma en otra circunferencia, mientras que toda circunferencia que pase por el centro de inversión se transforma en una recta que no pasa por él, así como resultados análogos relativos a esferas y planos en la geometría de la inversión tridimensional.

Un poco más difícil de demostrar es el importante resultado de que la inversión es una *transformación conforme*, es decir, que conserva los ángulos entre curvas. En matemática, la geometría conforme es el estudio de las transformaciones conformes (aquellas que preservan ángulos) en un espacio. En dos dimensiones reales, la geometría conforme es precisamente la geometría de las superficies de Riemann.



Ejemplo de geometría conforme.

En más de dos dimensiones, la geometría conforme puede referirse tanto al estudio de la transformación conforme en los espacios "planos" (como, por ejemplo, los espacios euclídeos o las esferas) como, más comúnmente, al estudio de las variedades conformes, que son variedades de Riemann dotadas de una clase de métrica definida a falta de escala. El estudio de esas estructuras se llama a veces *geometría de Möbius*, y es un tipo de *geometría de Klein* (disciplina llamada así en referencia al matemático alemán Felix Klein).

Un teorema demostrado por Joseph Liouville muestra claramente que las transformaciones que conservan los ángulos no son frecuentes en absoluto; este teorema afirma que en el espacio las únicas transformaciones conformes son las *inversiones*, las *semejanzas* y las *congruencias* como caso particular.

Steiner no publicó sus ideas sobre la teoría de la inversión, y otros matemáticos del mismo siglo volvieron a descubrir repetidas veces esta transformación; entre ellos figura lord Kelvin (o William Thompson) (1824-1907), que se vio conducido a ella en 1845 a través de la física, aplicándola a problemas de electrostática.

Si el centro O de la circunferencia de inversión de radio a coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas del plano, entonces las coordenadas x', y' , del inverso P' de un punto arbitrario (x, y) distinto del origen, vienen dadas por las ecuaciones

$$x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Estas ecuaciones sugirieron más tarde a Luigi Cremona (1830-1903), que fue profesor de geometría sucesivamente en Bolonia, Milán y Roma, el estudio de unas transformaciones mucho más generales, de la forma

$$x' = R_1(x, y)$$

$$y' = R_2(x, y)$$

donde R_1 y R_2 son funciones algebraicas racionales. Tales transformaciones, de las que las inversiones son solo un caso muy especial, se conocen hoy con el nombre de *transformaciones de Cremona*, en honor al matemático que publicó en 1863 una exposición acerca de ellas y que más tarde las generalizaría para el espacio tridimensional.

II. Dialogando con los profesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

El Renacimiento

LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CÚBICA

Cardano usaba poca álgebra sincopada, como buen discípulo de Al-Khowarizmi, y, como los árabes en general, consideraba a sus ecuaciones con coeficientes numéricos concretos como representantes de tipos generales. Por ejemplo, cuando escribe "Sea el cubo y seis veces el lado igual a 20" (o, como escribiríamos nosotros, $x^3 + 6x = 20$), está pensando obviamente en esta ecuación como típica de todas aquellas que presentan "el cubo y la cosa igual a un número", es decir, de la forma $x^3 + px = q$. La solución de esta ecuación ocupa un par de páginas en estilo retórico, que nosotros escribiríamos en símbolos de la manera siguiente.

Substitúyase x por $u - v$ y supóngase u y v relacionadas de manera que su producto, considerado como un área, sea igual a un tercio del coeficiente de x en la ecuación, es decir, $uv = 2$. Haciendo la sustitución obtenemos como resultado $u^3 - v^3 = 20$, y eliminando v nos queda $u^6 = 20u^3 + 8$, una ecuación de segundo grado en u^3 . Por lo tanto, se tiene que $u^3 = \sqrt{108} + 10$; de la relación $u^3 - v^3 = 20$ obtenemos $v^3 = \sqrt{108} - 10$; luego, como $x = u - v$ resulta $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. Una vez efectuado todo el proceso para este caso concreto, Cardano termina dando una formulación verbal de la regla equivalente a nuestra solución moderna de $x^3 + px = q$ como

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

A continuación, Cardano pasa a estudiar otros casos, tales como el de "el cubo igual a la cosa y a un número". Aquí, se hace la sustitución $x = u + v$ en vez de la $x = u - v$, con el resto del proceso esencialmente de la



misma manera que antes. En este caso, sin embargo, hay una dificultad. Si se aplica la regla, por ejemplo, a la ecuación $x^3 = 15x + 4$, el resultado al que se llega es

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano sabía muy bien que no existe la raíz cuadrada de un número negativo; sin embargo, sabía también que $x = 4$ era una raíz de esta ecuación, de manera que no podía entender qué sentido tenía su regla en esta situación. Cardano había jugado ya en otra ocasión con las raíces cuadradas de números negativos, al intentar resolver el problema de dividir 10 en dos partes tales que su producto valga 40. Las reglas usuales del álgebra conducen a la solución $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ o, en la notación de Cardano, $5p : Rm : 15$ y $5m : Rm : 15$. Refiriéndose a estas raíces cuadradas de números negativos, Cardano las denominó como *sofísticas*, concluyendo que en este caso su resultado era “tan sutil como inútil”.

A los matemáticos posteriores les correspondería la tarea de demostrar que tales manipulaciones eran de veras sutiles, pero que estaban muy lejos de ser inútiles. Hay que apuntar entre los méritos de Cardano el que al menos prestase cierta atención a esta situación desconcertante.

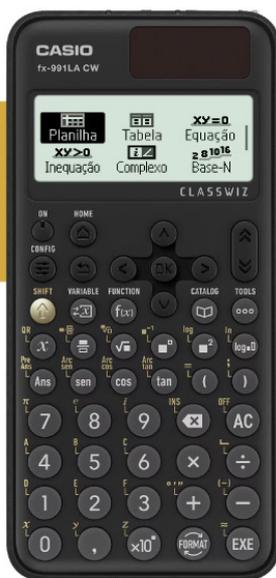
LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUÁRTICA POR FERRARI

Sobre la regla para resolver ecuaciones cuárticas nos dice Cardano en el *Ars magna* que “se debe a Luigi Ferrari, que la inventó a petición mía”. Una vez más, miraremos uno tras otro todos los casos posibles separadamente, veinte en total, pero bastará con que exponamos un caso. Sea “el cuadrado del cuadrado, el cuadrado y el número igual al lado”. Cardano sabía ya cómo eliminar el término de grado 3 en caso de que apareciese, aumentando o disminuyendo las raíces en un cuarto del coeficiente del término cúbico. Entonces, las sucesivas etapas en la solución de $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, las presenta Cardano esencialmente como sigue.



- 1) En primer lugar, añádanse suficientes cuadrados y números a ambos miembros de la ecuación para convertir el primer miembro en un cuadrado perfecto; en este caso, sería $x^4 + 12x^2 + 36$ o bien $(x^2 + 6)^2$.

Calculadora Científica
CLASSWIZ CASIO.



CASIO ha mejorado sus calculadoras científicas de la línea **ClassWiz**, creando calculadoras intuitivas y fáciles de usar.

Descubrí toda línea CASIO en:

www.calculadoras.ar

@calculadoras.ar

- 2) Añádanse ahora a los dos miembros de la ecuación términos en los que aparezca una nueva incógnita y de tal manera que el primer miembro siga siendo un cuadrado perfecto, tal como $(x^2 + 6 + y)^2$. La ecuación se convierte entonces en

$$\begin{aligned}(x^2 + 6 + y)^2 &= 6x^2 + 60x + y^2 + 12y + 2yx^2 \\ &= (2y + 6)x^2 + 60x + (y^2 + 12y).\end{aligned}$$

- 3) La etapa siguiente, que es la crucial, consiste en elegir y de tal manera que el trinomio del segundo miembro se convierta en un cuadrado perfecto. Esto se consigue, obviamente, igualando el discriminante a cero, una receta antigua y bien conocida que en nuestro caso equivale a hacer

$$60^2 - 4(2y + 6)(y^2 + 12y) = 0.$$

- 4) El resultado de la etapa 3 es una ecuación cúbica en y , $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$, que hoy conocemos como la *cúbica resolvente* de la ecuación cuártica dada. Esta cúbica se resuelve ahora en y por medio de las reglas dadas anteriormente para resolver ecuaciones cúbicas, con el resultado de

$$y = \sqrt[3]{287\frac{1}{2} + \sqrt{80449\frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{287\frac{1}{2} - \sqrt{80449\frac{1}{2}}} - 5.$$

- 5) Sustitúyase un valor de y obtenido en la etapa 4, en la ecuación en x de la etapa 2, y tómesese la raíz cuadrada de los dos miembros.
- 6) El resultado de la etapa 5 es una ecuación cuadrática que debemos resolver para hallar el valor buscado de x .

LAS CÚBICAS IRREDUCIBLES Y LOS NÚMEROS COMPLEJOS

La solución de las ecuaciones cúbica y cuártica fue probablemente la mayor contribución al álgebra desde que los babilonios, casi cuatro milenios antes, hubiesen aprendido a completar el cuadrado para resolver las ecuaciones cuadráticas. Ningún otro descubrimiento había supuesto un estímulo tal para el desarrollo del álgebra como el que representaban los descubrimientos que se revelaban en el *Ars magna*.

Las soluciones de la cúbica y de la cuártica no eran de ninguna manera el resultado de consideraciones de tipo práctico, ni tampoco eran de ningún valor especial para los ingenieros o los matemáticos aplicados. La resolución aproximada de algunos tipos de cúbicas había sido conocida ya en la Antigüedad, y un siglo antes de Cardano, Al-Kashi era capaz de resolver cualquier ecuación cúbica que se presentase en un problema práctico, con el grado de aproximación que se desease. Así pues, las fórmulas de Tartaglia-Cardano tenían una gran importancia lógica, pero para el hombre práctico no eran ni siquiera comparables en utilidad con los métodos de aproximaciones sucesivas.

La consecuencia más importante, sin la menor duda, de los descubrimientos publicados en el *Ars magna* fue el enorme estímulo que dieron a la investigación algebraica en distintas direcciones. Parecía natural intentar generalizar estos resultados a ecuaciones polinómicas de grado mayores que cuatro, y aquí el primer paso consistiría en la búsqueda de una solución para la quintica.

Los matemáticos se encontraron aquí, sin sospecharlo, y durante más de dos siglos y medio, con un problema algebraico insoluble comparable a los tres problemas geométricos clásicos de la Antigüedad. El resultado de todo este trabajo iba a producir mucha y muy buena matemática, pero llevaría inevitablemente a una conclusión negativa. Otra consecuencia, y esta vez inmediata, de la solución de la cúbica fue que condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número.

Los números irracionales habían sido aceptados ya con normalidad en la época de Cardano, a pesar de que no estaban fundamentados aún de una manera rigurosa, puesto que se les podía aproximar fácilmente por números racionales. Los números negativos producían más dificultades puesto que no se les podía aproximar en ningún sentido natural por números positivos, pero la idea de sentido o de dirección sobre una recta los hacía plausibles en cuanto que magnitud orientada. De hecho, Cardano los utilizó, a pesar de llamarlos *numeri ficti*. Si un algebrista decidiese negar la existencia de los números irracionales o los negativos, simplemente tendría que decir, como hacían los antiguos griegos, que las ecuaciones $x^2 = 2$ o $x + 2 = 0$ son insolubles.



De manera análoga, los algebristas habían podido evitar los números imaginarios diciendo sencillamente que las ecuaciones del tipo de la $x^2 + 1 = 0$ son insolubles. No parecía haber ninguna necesidad de animales tales como las raíces cuadradas de números negativos. Pero con la solución algebraica de la cúbica, la situación cambió radicalmente. Siempre que las tres raíces de una ecuación cúbica sean reales y no nulas, la fórmula de Cardano-Tartaglia conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos. La meta buscada, se sabía que era un número real, pero no se veía cómo alcanzarla sin entender el comportamiento de los “números imaginarios”. Había, pues, que contar con estos números imaginarios, incluso si uno quería restringirse a la búsqueda de raíces reales.

En esta situación de perplejidad, otro importante algebrista italiano, Rafael Bombelli (ca. 1526-1573), tuvo lo que él mismo llamó “una idea loca”, puesto que todo el asunto “parecía basarse en sofística”. Los dos radicandos bajo las raíces cúbicas que aparecen en la fórmula final solo difieren en un signo y, como hemos visto, para la ecuación $x^3 = 15x + 4$ esta fórmula nos da $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ mientras que la única raíz positiva de la ecuación es $x = 4$, como puede comprobarse por sustitución directa.

Cardano había observado que cuando todos los términos que figuran a un lado del signo de igualdad son de grados mayores que los de los términos que figuran en el otro lado, entonces la ecuación tiene una y solo una raíz positiva, anticipando, en cierto modo, una pequeña parte de la futura regla de los signos de Descartes. Rafael Bombelli tuvo la feliz idea de imaginar que los radicales mismos podrían estar relacionados entre sí de la misma manera que lo están los radicandos, es decir que, como diríamos ahora, son complejos conjugados que dan como suma el número real 4.

Es obvio que, si la suma de las partes reales debe ser 4, entonces la parte real común a ambos debe ser 2, y si un número de la forma $2 + b\sqrt{-1}$ tiene que ser una raíz cúbica de $2 + 11\sqrt{-1}$, entonces se comprueba fácilmente que b tiene que ser 1, y por último nos queda que $x = 2 + 1\sqrt{-1} + 2 - 1\sqrt{-1} = 4$.

Por medio de su ingenioso razonamiento venía a mostrar Bombelli el importante papel que estaban destinados a jugar en el futuro los números complejos conjugados, pero en aquel momento la observación en cuestión no tenía la menor utilidad para la tarea concreta de resolver ecuaciones cúbicas, puesto que él necesitaba conocer de antemano una de las raíces; en este caso, la ecuación ya está resuelta y no se necesita ninguna fórmula, y sin tal conocimiento previo a su planteamiento falla. Cualquier intento de calcular algebraicamente las raíces cúbicas de los números complejos que aparecen en la fórmula de Cardano-Tartaglia nos conduce a la mismísima cúbica de la que salieron las raíces cúbicas al tratar de resolverla, así que volvemos al punto de partida.

Debido a que este callejón sin salida se presenta siempre que las tres raíces son reales, a este caso se le conoce como el *caso irreducible*. En este caso, la fórmula nos da realmente una expresión correcta para el valor de la incógnita, pero la forma en que aparece es inútil para la mayor parte de los fines.

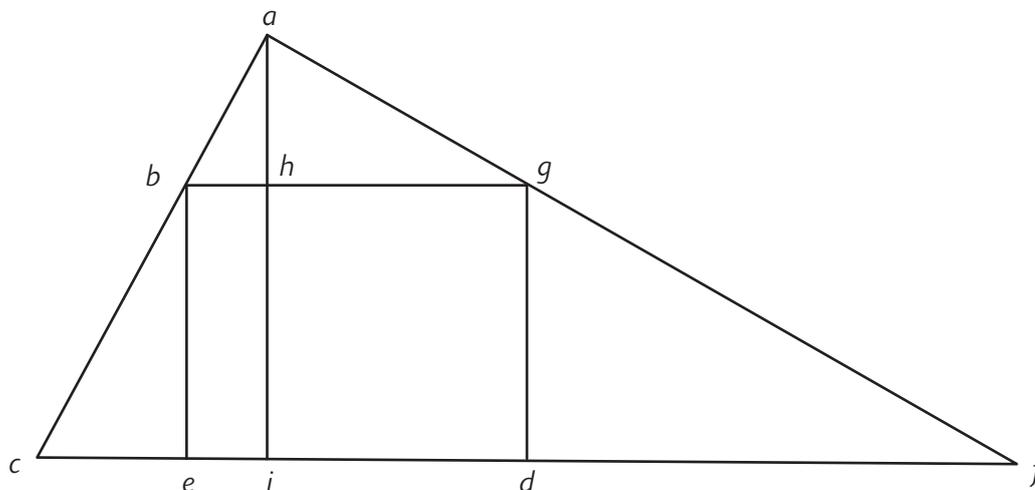
Bombelli acabó de escribir su *Algebra* hacia el 1560, pero no se publicó impresa hasta el 1572, casi un año antes de su muerte, y aun entonces solo en parte. Uno de los aspectos interesantes de este libro es el de que contiene un simbolismo que nos recuerda al álgebra sincopada. Bombelli escribe a veces, por ejemplo, 1 Z p. 5Rm. 4, es decir, “1 zensus plus 5 res minus 4”, para expresar $x^2 + 5x - 4$, pero también utiliza otra forma de expresión, $1^2p. 5^1m. 4$, en que las potencias de la incógnita vienen representadas simplemente por los correspondientes numeralés árabes escritos encima de un pequeño arco circular. Bombelli, desde luego, usa en su *Algebra* los símbolos italianos estándar p y m para la suma y la resta, pero no tiene aún, en cambio, un símbolo para la igualdad. El símbolo que nosotros utilizamos para la igualdad había sido inventado ya antes de que Bombelli escribiera su libro, pero este símbolo apareció en 1557 en un lugar de Europa alejado de Italia, en Inglaterra.

EL ALGEBRA DE BOMBELLI

Papo de Alejandría, hacia el 320, había tratado de impulsar un renacimiento de la geometría, pero el hecho es que no encontró ningún sucesor capacitado para cultivar la geometría pura en Grecia. En China y en la India no hubo nunca un verdadero interés por la geometría que sobrepasara los problemas elementales de medición, pero los árabes, en cambio, que sí lucían aprecio por el razonamiento deductivo, utilizaron argumentos geométricos en su



álgebra. En la Europa medieval, como hemos visto, hubo una doble tendencia a aproximar el álgebra y la geometría. Siguiendo esta tradición medieval, los Libros IV y VI del *Algebra* de Bombelli estaban llenos de problemas geométricos resueltos de una manera algebraica, algo parecido al estilo de Johann Müller Regiomontano, pero haciendo uso de un nuevo simbolismo. Por ejemplo, Bombelli pregunta por el lado de un cuadrado inscrito en un triángulo de lados $ac = 13$, $cf = 14$, $fa = 15$, tal que uno de sus lados esté situado sobre cf (figura siguiente),



problema que resuelve de la manera siguiente: sea $bg = 14^x$ es decir, $14x$; entonces $ag = 15^x$ y $ab = 13^x$. Ahora bien, $ah = 12^x$ y $hi = 14^x$, y, como $ai = 12$, tenemos que $26^x = 12$, luego la "cosa" o x es igual a $\frac{6}{13}$ de manera que hi , que es el lado del cuadrado, debe ser 14 veces $\frac{6}{13}$, o sea, $6\frac{6}{13}$. He aquí un álgebra ya bastante simbólica, después de la sincopada, que viene en ayuda de la geometría, pero Bombelli investigó también en dirección opuesta: en el *Algebra*, la solución algebraica de la ecuación cúbica viene acompañada por una demostración geométrica en términos de subdivisiones del cubo. Desgraciadamente para el futuro de la geometría, y también de la matemática en general, los últimos libros del *Algebra* de Bombelli no se incluyeron en la publicación de 1572, sino que quedaron en forma manuscrita hasta 1929.

Continúa de *Leñitas geométricas 7ª época N° 6, Capítulo "Sistemas de números"*

NÚMEROS COMPLEJOS



1. Origen de los números complejos

Por muchas razones, el concepto de número ha tenido que ser extendido más allá del continuo numérico real mediante la introducción de los llamados números complejos. Debe observarse que, en el desarrollo histórico y psicológico de la matemática, todas estas generalizaciones y nuevas invenciones no han sido en forma alguna el resultado de algún esfuerzo individual, sino que más bien aparecen como el desenlace de una evolución gradual y cautelosa que no puede atribuirse a una sola persona determinada.

Fue la necesidad de una mayor libertad en el cálculo formal lo que llevó a la utilización de los números racionales negativos, y solo al final de la Edad Media empezaron los matemáticos a perder el temor de usar estos conceptos que no tenían el mismo carácter concreto e intuitivo de los números naturales. Hasta la mitad del siglo XIX los matemáticos no percibieron de una forma completamente clara que la base esencial lógico-filosófica de las operaciones en un conjunto numérico ampliado es formalista, y que las ampliaciones han de hacerse mediante definiciones que, como tales, son libres, pero resultan inútiles si no son hechas de manera que las leyes y propiedades válidas en el campo numérico original se conserven al ampliar este. El hecho de que estas ampliaciones puedan estar a veces relacionadas con objetos "reales" y que, de esta forma, procuren una herramienta para nuevas aplicaciones es de la mayor importancia, si bien esto es solo una justificación, pero no constituye una prueba lógica de la validez de la ampliación.

El primer problema que requiere el uso de los números complejos es el de la resolución de las ecuaciones cuadráticas. Recordemos el concepto de ecuación lineal $ax = b$, en la cual hay que determinar la incógnita x . La solución es simplemente $x = \frac{b}{a}$ y la exigencia de que toda ecuación de coeficientes enteros $a \neq 0$ y b tenga solución precisa de la introducción de los números racionales. Ecuaciones tales como

$$x^2 = 2, \quad (1)$$

que carecen de solución en el campo de los números racionales, nos llevan a construir el campo más amplio de los números reales, en el cual existe solución. Pero incluso el campo de los números reales no es suficientemente amplio como para procurarnos una teoría completa de las ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación sencilla tal como

$$x^2 = -1 \quad (2)$$

carece de solución real, pues el cuadrado de cualquier número real no es nunca negativo.

Podemos contentarnos con la afirmación de que esta sencilla ecuación no es resoluble, o bien seguir el camino usual de extender nuestro concepto de número mediante la introducción de números que permitan resolver la ecuación. Exactamente esto es lo que se hace al introducir el nuevo símbolo i por la definición $i^2 = -1$.

Naturalmente, este objeto i , la *unidad imaginaria*, no tiene nada que ver con el concepto de número tal como resulta de la operación de contar. Es puramente un símbolo, sometido a la regla fundamental $i^2 = -1$, y su valor dependerá por completo de si mediante su introducción se ha conseguido una extensión del sistema numérico que resulte útil y manejable.

Puesto que deseamos sumar y multiplicar con el símbolo i en igual forma que con los números reales ordinarios, deberemos ser capaces de formar símbolos tales como $2i$, $3i$, $-i$, $2 + 5i$ o, más en general, $a + bi$, donde a y b son dos números reales cualesquiera. Si estos símbolos han de obedecer a las familiares leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y del producto, se tendrá, por ejemplo,

$$\begin{aligned} (2 + 3i) + (1 + 4i) &= (2 + 1) + (3 + 4)i = 3 + 7i, \\ (2 + 3i) + (1 + 4i) &= 2 + 8i + 3i + 12i^2 = \\ &= (2 - 12) + (8 + 3)i = -10 + 11i. \end{aligned}$$

Guiados por estas razones, iniciamos nuestra exposición sistemática haciendo la siguiente definición: llamamos *número complejo de parte real a y parte imaginaria b* a un símbolo de la forma $a + bi$, donde a y b representan dos números reales cualesquiera.

Con estos símbolos pueden realizarse las operaciones de adición y multiplicación en igual forma que si i fuera un número real ordinario, salvo que i^2 debe ser sustituido siempre por -1 ; con mayor precisión, definimos la adición y multiplicación de números complejos mediante las reglas

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) + (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned} \quad (3)$$

En particular, se tiene:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2. \quad (4)$$

Mediante estas definiciones se comprueba fácilmente que subsisten para los números complejos las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Además, no solamente la adición y multiplicación, sino también la sustracción y la división de dos números complejos dan lugar a números de la forma $a + bi$, de modo que los números complejos forman un cuerpo.

$$\begin{aligned} (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i, \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i. \end{aligned} \quad (5)$$

La segunda ecuación carece de significado cuando $c + di = 0 + 0i$, pues en este caso $c^2 + d^2 = 0$. Así que de nuevo debemos excluir la división por cero; es decir, por $0 + 0i$. Por ejemplo:

$$(2 + 3i) - (1 + 4i) = 1 - i,$$

$$\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{2+3i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i} = \frac{2-8i+3i+12}{1+16} = \frac{14-5i}{17}.$$

El cuerpo de los números complejos incluye el cuerpo de los números reales como un subcuerpo de él, pues el número complejo $a + 0i$ puede considerarse igual al número real a . Por otra parte, un número complejo de la forma $0 + bi$ se llama *imaginario puro*.

Ejercicios para fijar ideas

1. Exprésese $\frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1-i)}$ en la forma $a + bi$.

2. Exprésese $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ en la forma $a + bi$.

3. Exprésense en la forma $a + bi$:

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{1+i}{2-i}, \quad \frac{1}{i^5}, \quad \frac{1}{(-2+i)(1-3i)}, \quad \frac{(4-5i)^2}{(2-3i)^2}.$$

4. Calcúlese $\sqrt{5+12i}$. (Indicación: Escribbase $\sqrt{5+12i} = x + yi$, elévese al cuadrado e iguálense partes reales e imaginarias.)



Mediante la introducción del símbolo i hemos extendido el cuerpo de los números reales al cuerpo de los símbolos $a + bi$, en el cual la ecuación cuadrática especial

$$x^2 = -1$$

tiene las dos soluciones: $x = i$ y $x = -i$. En efecto, por definición, $i \cdot i = (-i)(-i) = i^2 = -1$. En realidad, hemos conseguido mucho más, pues es fácil comprobar que ahora toda ecuación cuadrática, que podemos escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{6}$$

tiene solución. En efecto, de (6) resulta

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a}, \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\ x + \frac{b}{2a} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora bien: si $b^2 - 4ac \geq 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es un número real ordinario y las soluciones (7) son reales, mientras que si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $4ac - b^2 > 0$ y $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-(4ac - b^2)} = i\sqrt{4ac - b^2}$, de forma que las soluciones (7) son números complejos; por ejemplo, las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

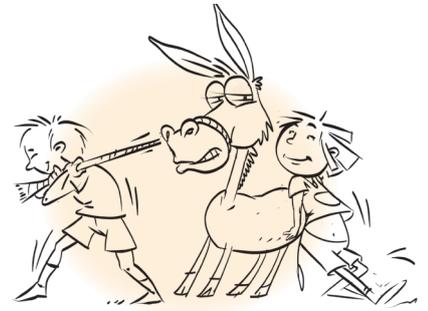
son $x = \frac{(5 \pm \sqrt{25 - 24})}{2} = \frac{(5 \pm 1)}{2} = 2$ y 3 ; en tanto que las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

son $x = \frac{(2 \pm \sqrt{4 - 8})}{2} = \frac{(2 \pm 2i)}{2} = 1 + i$ y $1 - i$.

2. Interpretación geométrica de los números complejos

Ya en el siglo XVI los matemáticos se vieron obligados a introducir símbolos para representar las raíces cuadradas de los números negativos y poder resolver todas las ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Sin embargo, no fueron capaces de explicar el significado exacto de estos símbolos, que eran abordados con cierto temor supersticioso. El nombre de *imaginarios* es todavía un vestigio del hecho de que estas expresiones fueran consideradas como algo ficticio e irreal.



Por fin, a principios del siglo XIX, al ponerse de manifiesto la importancia de estos números en muchas ramas de la matemática, una sencilla interpretación geométrica de las operaciones con los números complejos fue suficiente para hacer desaparecer las dudas acerca de su validez. Por supuesto que tal interpretación es innecesaria desde el punto de vista moderno, de acuerdo con el cual la justificación del cálculo formal con los números complejos está basada directamente en las definiciones formales de adición y multiplicación. Pero la interpretación geométrica, que fue dada casi al mismo tiempo por Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1768-1822) y Gauss, hizo que estas operaciones resultaran más naturales desde un punto de vista intuitivo, habiendo resultado, por otra parte, de mayor alcance en las aplicaciones de los números complejos en la matemática y en las ciencias físicas.

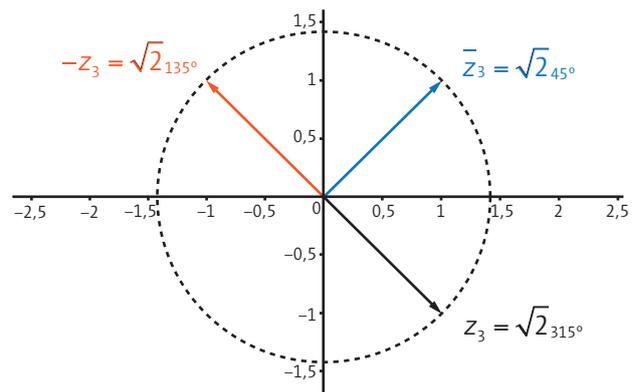
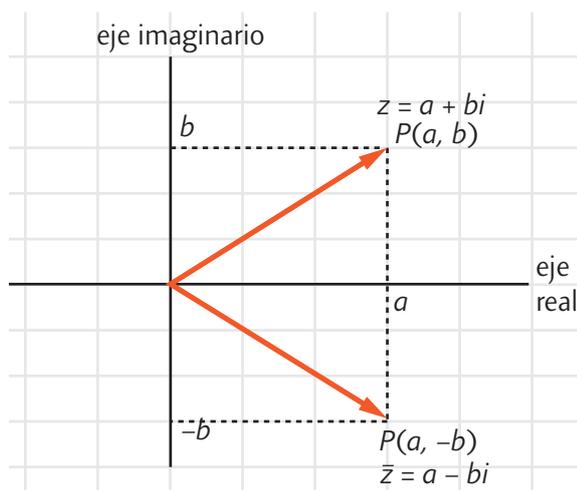
Esta interpretación geométrica consiste simplemente en representar el número complejo $z = x + yi$ por el punto del plano de coordenadas rectangulares x, y . Así, la parte real de z es su coordenada x , y la parte imaginaria su coordenada y . Con ello queda establecida una correspondencia entre los números complejos y los puntos del "plano numérico", en forma análoga a la correspondencia establecida entre los números reales y los puntos de una recta, la recta numérica.

Los puntos del eje x del plano numérico corresponden a los números reales $z = x + 0i$, mientras los puntos del eje y corresponden a los números imaginarios puros $z = 0 + yi$. Si $z = x + yi$ es un número complejo cualquiera, al número complejo $\bar{z} = x - yi$ lo llamaremos *conjugado de \bar{z}* .

El punto \bar{z} se representa en el plano numérico por el simétrico del punto z respecto del eje x . Si designamos la distancia desde el origen al punto z por ρ , entonces, por el teorema de Pitágoras

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z \cdot \bar{z}.$$

El número real $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ se llama *módulo* de z , y se escribe $\rho = |z|$ (ver la figura siguiente).



Representación geométrica de los números complejos. El punto z tiene como coordenadas rectangulares x e y .

Si z está sobre el eje real, su módulo es su valor absoluto ordinario. Los números complejos de módulo 1 están sobre la *circunferencia unidad*, con centro en el origen y radio 1.

Si $|z| = 0$, entonces $z = 0$. Esto resulta de la definición de $|z|$ como distancia de z al origen. Además, el módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de sus módulos:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

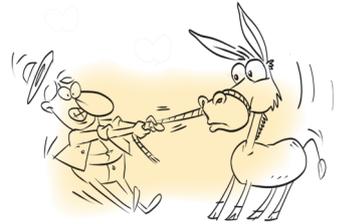
Esta propiedad resulta de un teorema más general que será demostrado más adelante.

Ejercicios para fijar ideas

1. Demuéstrase este teorema basándose directamente en la definición del producto de dos números complejos

$$z_1 = x_1 + y_1 i \text{ y } z_2 = x_2 + y_2 i.$$

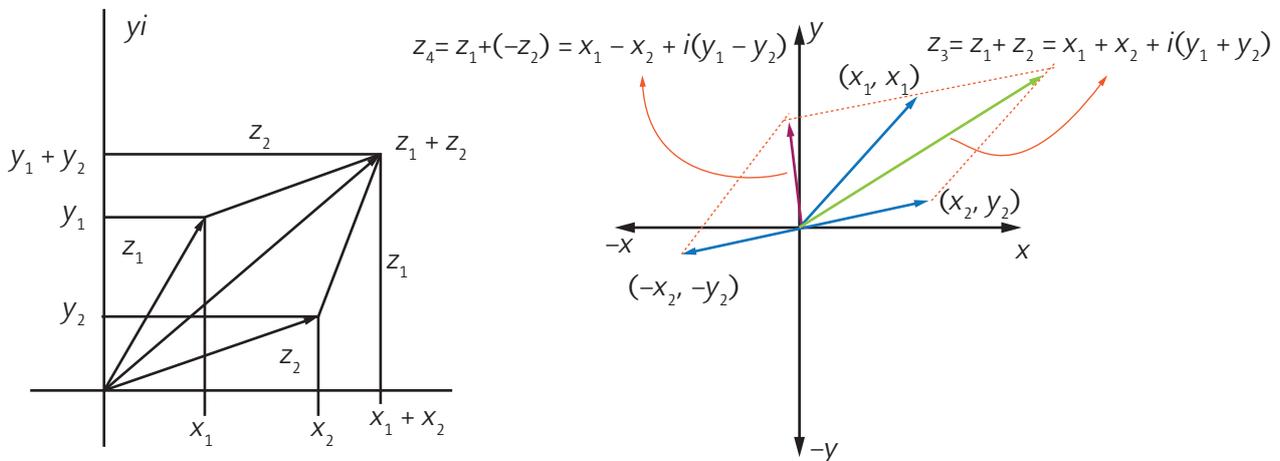
2. Basándose en el hecho de que el producto de dos números reales únicamente es 0 si uno de los factores es 0, demuéstrase el teorema correspondiente para los números complejos. (Hágase uso de los dos teoremas que se acaban de enunciar.)



De la definición de suma de dos números complejos, $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, se tiene

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Por tanto, el punto $z_1 + z_2$ está representado en el plano numérico por el cuarto vértice de un paralelogramo cuyos otros tres vértices son los puntos 0, z_1 , z_2 (figura siguiente).



Construcción geométrica de la suma de dos números complejos.

Esta sencilla construcción geométrica de la suma de dos números complejos es de gran importancia en muchas aplicaciones; de ella puede deducirse la consecuencia importante de que el módulo de la suma de dos números complejos no excede nunca a la suma de los módulos:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Esta propiedad resulta del hecho de ser la longitud de un lado cualquiera de un triángulo menor que la suma de las longitudes de los otros dos.

Ya salió el tomo III

Un libro que reúne una serie de Notas escritas por matemáticos profesionales, con el fin de incorporar al área curricular algunas ideas importantes y temáticas interesantes, en forma clara y comprensible.



fenchu@oma.org.ar

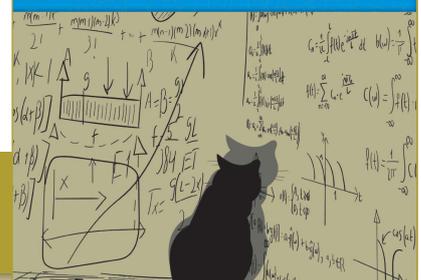
☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

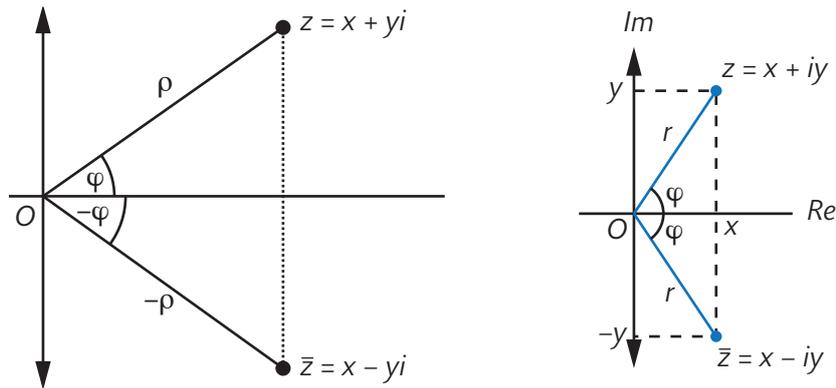
ORIENTACIONES
EN LA
Geometría elemental

Tomo III



Ejercicio. ¿En qué caso tiene lugar la igualdad $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$?

El ángulo formado por la dirección positiva del eje x y la recta Oz se llama *argumento* de z , y se representa como mostrado a continuación:



El módulo de \bar{z} es el mismo que el de z

$$|\bar{z}| = |z|,$$

pero el argumento de \bar{z} es opuesto al de z ; esto es,

$$\bar{\varphi} = -\varphi.$$

Naturalmente, el argumento de z no está determinado unívocamente, ya que puede sumarse o restarse a un ángulo cualquier múltiplo entero de 360° , sin que esto afecte a la posición gráfica de sus lados. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\varphi, \varphi + 360^\circ, \varphi + 720^\circ, \varphi + 1080^\circ, \dots, \\ &\varphi - 360^\circ, \varphi - 720^\circ, \varphi - 1080^\circ, \dots \end{aligned}$$

representan todos gráficamente el mismo ángulo. Utilizando el módulo ρ y el argumento φ , el número complejo z puede escribirse en la forma

$$z = x + yi = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi); \quad (8)$$

en efecto, por definición de seno y coseno,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

Por ejemplo, para $z = i$, $\rho = 1$, $\varphi = 90^\circ$, de manera que $i = 1(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$;

para $z = 1 + i$, $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$, de modo que $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$;

para $z = 1 - i$, $\rho = \sqrt{2}$, $\varphi = -45^\circ$, de modo que $1 - i = \sqrt{2}[\cos(-45^\circ) + i \operatorname{sen}(-45^\circ)]$;

para $z = -1 + \sqrt{3}i$, $\rho = 2$, $\varphi = 120^\circ$, de forma que $-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$.

Podemos comprobar estas igualdades por sustitución de los valores de las funciones trigonométricas. La representación trigonométrica (8) es de gran interés para la multiplicación de números complejos. Pues si

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

y

$$z' = \rho'(\cos \varphi' + i \operatorname{sen} \varphi'),$$

se tiene

$$zz' = \rho\rho'\{(\cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi') + i(\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi')\}.$$

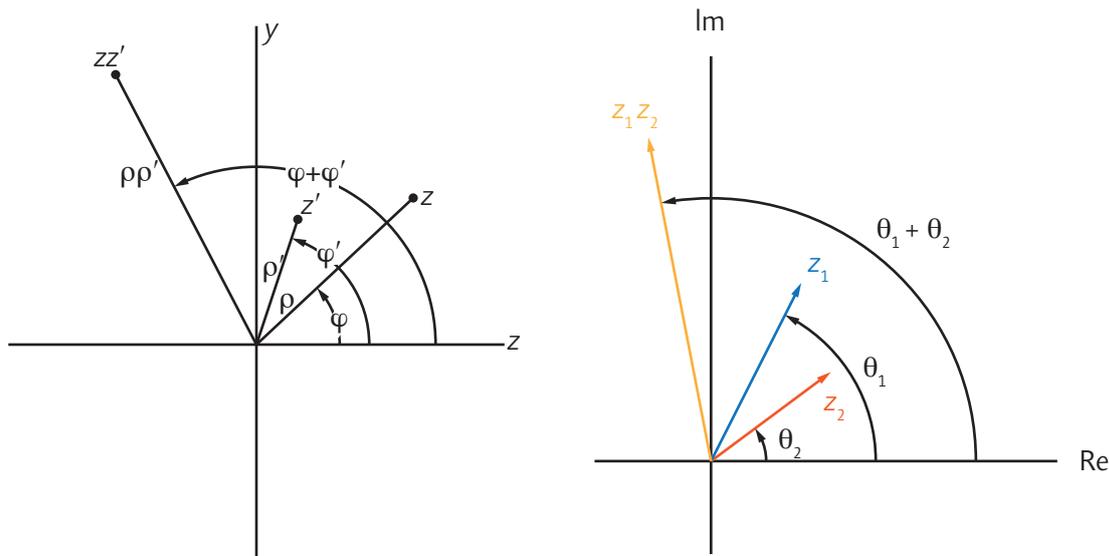
Ahora bien: por los teoremas de adición del seno y del coseno,

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \varphi' - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi' &= \cos(\varphi + \varphi'), \\ \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi' + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi' &= \operatorname{sen}(\varphi + \varphi'). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$zz' = \rho\rho'\{\cos(\varphi + \varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi')\}. \quad (9)$$

Esta es la forma trigonométrica del número complejo de módulo $\rho\rho'$ y argumento $\varphi + \varphi'$. En otras palabras, para multiplicar dos números complejos, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.



Multiplicación de dos números complejos; los argumentos se suman y los módulos se multiplican.

Vemos así que la multiplicación de números complejos está atada a la operación geométrica de *rotación*. Con más precisión, denominemos al segmento dirigido que une el origen con el punto z *vector* z ; su longitud será $\rho = |z|$. Sea z' un número sobre la *circunferencia unidad*, es decir, $\rho' = 1$; entonces, al multiplicar z por z' el vector z gira un ángulo igual a φ' . Si $\rho' \neq 1$, la longitud del vector ha de ser multiplicada por ρ' una vez efectuada la rotación. Podemos comprobar gráficamente estos hechos, haciendo el producto de varios números por $z_1 = i$ (giro de 90°); $z_2 = -i$ (giro de 90° en sentido opuesto); $z_3 = 1 + i$, y $z_4 = 1 - i$.

La fórmula (9) tiene una consecuencia particularmente importante cuando $z = z'$, pues en este caso resulta

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi).$$

Al multiplicar de nuevo por z obtenemos

$$z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi),$$

y si se continúa indefinidamente en esta forma,

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) \quad (10)$$

para cualquier entero n .

En particular, si z es un punto de la *circunferencia unidad*, $\rho = 1$, obtenemos la fórmula dada a conocer por el matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754):

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \quad (11)$$

Esta fórmula es una de las más notables y útiles de la matemática elemental, según vamos a poner de manifiesto con un ejemplo. Si aplicamos la fórmula para $n = 3$ y desarrollamos el primer miembro por la fórmula del binomio

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3,$$

obtenemos la relación

$$\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}^3 \varphi).$$

Una sola ecuación, tal como esta, entre dos números complejos equivale a un par de ecuaciones entre números reales, pues la igualdad de dos números complejos exige la igualdad de sus partes reales e imaginarias, respectivamente. En consecuencia, podemos escribir:

$$\cos 3\varphi - \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad \operatorname{sen} 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}^3 \varphi.$$

Si utilizamos la igualdad

$$\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi = 1,$$

obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= -4 \sin^2 \varphi + 3 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Fácilmente pueden obtenerse fórmulas análogas para cualquier valor entero n que expresen $\sin n\varphi$ y $\cos n\varphi$ en función de las potencias de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$, respectivamente.

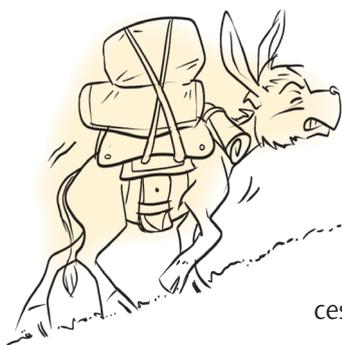
Ejercicios para fijar ideas

- Hállense las fórmulas correspondientes para $\sin 4\varphi$ y $\cos 4\varphi$.
- Demuestre que, para un punto $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ de la circunferencia unidad, $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.
- Pruebe, sin efectuar cálculos, que $(a + bi)/(a - bi)$ tiene siempre módulo 1.
- Si z_1 y z_2 son dos números complejos, demuestre que el argumento de $z_1 - z_2$ es igual al ángulo formado por el eje real y el vector dirigido de z_2 a z_1 .
- Interprete el argumento del complejo $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ en el triángulo formado por los puntos z_1, z_2 y z_3 .
- Demuéstrese que el cociente de dos números complejos del mismo argumento es real.
- Demuestre que si, dados cuatro números complejos z_1, z_2, z_3, z_4 , los argumentos de $(z_2 - z_1)/(z_3 - z_2)$ y $(z_4 - z_1)/(z_4 - z_2)$ son iguales, los cuatro puntos están sobre una circunferencia o una recta, y recíprocamente.
- Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que los cuatro puntos z_1, z_2, z_3, z_4 estén sobre una circunferencia o una recta es que sea real el cociente

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \bigg/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$



3. Fórmula de De Moivre y raíces de la unidad



Entendemos por raíz n -ésima de un número a aquel número b tal que $b^n = a$. En particular, el número 1 tiene dos raíces cuadradas, 1 y -1 , pues $1^2 = (-1)^2 = 1$. El número 1 tiene una sola raíz cúbica real mientras que tiene cuatro raíces cuartas: los números reales 1 y -1 y los imaginarios i y $-i$. Estos hechos sugieren que debe haber otras dos raíces cúbicas de 1 en el campo complejo, haciendo un total de tres. Que efectivamente es así puede verse sin dificultad mediante la fórmula de De Moivre.

Vamos a demostrar que en el cuerpo de los números complejos hay exactamente n raíces n -ésimas diferentes de 1, las cuales están representadas por los vértices de un n -ágono

**Un libro para imaginar, jugar y construir figuras;
para comprender el pensamiento y el para qué
de la geometría moderna.**



fenchu@oma.org.ar

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

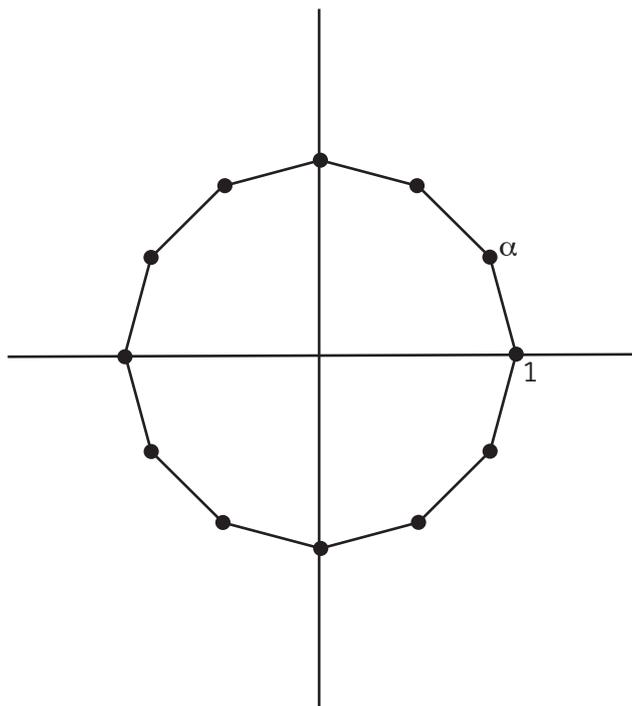


PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

LIBRO DE ENTRENAMIENTO BÁSICO



regular inscrito en la circunferencia unidad, siendo uno de sus vértices el punto $z = 1$. Esto resulta casi evidente de la figura siguiente



Representación geométrica de las raíces doceavas de la unidad.

(dibujada para el caso $n = 12$). El primer vértice del polígono es 1, y el siguiente es

$$\alpha = \cos \frac{360^\circ}{n} + i \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}, \quad (12)$$

ya que su argumento debe ser la n -ésima parte del ángulo total de 360° . El vértice inmediato es $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$, pues se obtiene girando el vector α un ángulo de $\frac{360^\circ}{n}$. El vértice siguiente será α^3 , etc., y, finalmente, después de reiterar n veces, volvemos nuevamente al vértice 1; esto es, se tiene

$$\alpha^n = 1,$$

lo que también resulta evidente de la fórmula (11), ya que

$$\left[\cos \frac{360^\circ}{n} + i \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n} \right]^n = \cos 360^\circ + i \operatorname{sen} 360^\circ = 1 + 0i.$$

Resulta que $\alpha^1 = \alpha$ es una raíz de la ecuación $x^n = 1$, y lo mismo ocurre con el vértice inmediato

$$\alpha^2 = \cos \left(\frac{720^\circ}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{720^\circ}{n} \right).$$

Esto se obtiene sin más que escribir $(\alpha^2)^n = \alpha^{2n} = (\alpha^n)^2 = (1)^2 = 1$,

o, por la fórmula de De Moivre:

$$(\alpha^2)^n = \cos \left(n \frac{720^\circ}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(n \frac{720^\circ}{n} \right) = \cos 720^\circ + i \operatorname{sen} 720^\circ = 1 + 0i = 1.$$

De la misma manera veríamos que todos los n números son raíces n -ésimas de 1.

Si seguimos adelante en la sucesión de exponentes o utilizamos exponentes negativos, no se obtienen nuevas raíces; en efecto,

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^n}{\alpha} = \alpha^{n-1}, \quad \text{y} \quad \alpha^n = 1, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \text{etc.,}$$

de forma que se repiten los valores anteriores. Se deja como ejercicio demostrar que no hay otras raíces n -ésimas.

Si n es par, uno de los vértices del n -ágono coincide con el punto -1 , de acuerdo con el hecho algebraico de que en este caso -1 es una raíz n -ésima de 1. La ecuación a la que satisfacen las raíces n -ésimas de la unidad

$$x^n - 1 = 0 \quad (13)$$

es de grado n , pero puede reducirse fácilmente a una ecuación de grado $n - 1$, para lo cual basta con hacer uso de la identidad algebraica

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1). \quad (14)$$

Dado que el producto de dos números es 0 si, y solo si, uno al menos de los factores es 0, el primer miembro de (14) se anula solo si uno de los dos factores del segundo miembro es cero, esto es, solo si $x - 1$, o bien

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1 = 0. \quad (15)$$

Por tanto, esta es la ecuación a la que deben satisfacer las raíces $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$, y recibe el nombre de *ecuación ciclotómica* (divisora de la circunferencia); por ejemplo, las raíces cúbicas imaginarias de 1,

$$\alpha = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = 1/2(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\alpha^2 = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = 1/2(-1 - i\sqrt{3}),$$

son las raíces de la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

como se puede comprobar por sustitución directa. Análogamente, las raíces quintas de 1, aparte la unidad, satisfacen a la ecuación

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0. \quad (16)$$

Para construir un pentágono regular debemos resolver esta ecuación de cuarto grado, la cual, por un simple artificio algebraico, se reduce a una ecuación cuadrática en $w = x + \frac{1}{x}$. Si dividimos (16) por x^2 y reagrupamos los términos:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

o bien, ya que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ obtenemos la ecuación $w^2 + w - 1 = 0$.

Mediante la fórmula (7) anterior, esta ecuación tiene las raíces

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad w_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Por consiguiente, las raíces quintas de 1 son las correspondientes a dos ecuaciones cuadráticas

$$x + \frac{1}{x} = w_1, \quad \text{o} \quad x^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)x + 1 = 0,$$

y

$$x + \frac{1}{x} = w_2, \quad \text{o} \quad x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)x + 1 = 0,$$

que podemos resolver por medio de la fórmula ya utilizada.

Ejercicios de entrenamiento

- Hállense las raíces sextas de 1.
- Calcúlese $(1 + i)^{11}$.
- Hállense los diferentes valores de $\sqrt{1+i}, \sqrt[3]{7-4i}, \sqrt[3]{i}, \sqrt[3]{i}$.
- Calcúlese $\frac{1}{2i}(i^7 - i^{-7})$.



4. El teorema fundamental del álgebra

No solo toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ o de la forma $x^n - 1 = 0$ es resoluble en el cuerpo de los números complejos, sino que se verifica en general que toda ecuación algebraica de grado n , de coeficientes reales o complejos,

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (17)$$

tiene soluciones en el cuerpo de los números complejos.

Este resultado fue establecido para las ecuaciones de tercero y cuarto grados en el siglo XVI por Tartaglia, Cardano y otros, que resolvieron dichas ecuaciones mediante fórmulas esencialmente análogas a la de la ecuación de segundo grado, si bien mucho más complicadas. Durante casi doscientos años se estudiaron con gran insistencia las ecuaciones de quinto grado y grados superiores; pero todos los esfuerzos para resolverlas por métodos similares fracasaron. Fue una gran hazaña del joven Gauss el dar en su tesis doctoral (1799) la primera demostración completa de la existencia de soluciones, aunque la cuestión de generalizar las fórmulas clásicas que expresan las soluciones de las ecuaciones de grado inferior al quinto mediante operaciones racionales y extracción de raíces quedó sin respuesta en su tiempo.

El teorema de Gauss dice que para toda ecuación algebraica de la forma (17), donde n es un entero positivo y los coeficientes, números reales cualesquiera o incluso números complejos, existe al menos un número complejo $\alpha = c + di$ tal que

$$f(\alpha) = 0.$$

El número α se llama una *raíz* de la ecuación (17). Daremos una demostración de este teorema más adelante. Si de momento lo consideramos demostrado, podemos probar el llamado *teorema fundamental del álgebra* (con mayor propiedad debería llamarse *teorema fundamental del sistema de los números complejos*); esto es, todo polinomio de grado n

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad (18)$$

puede descomponerse en el producto de exactamente n factores

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \quad (19)$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ números complejos, raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Como ejemplo para aclarar este teorema, el polinomio

$$f(x) = x^4 - 1$$

puede escribirse en la forma

$$f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x + 1).$$

De la descomposición (19) resulta evidente que las α son raíces de la ecuación $f(x) = 0$, ya que para $x = \alpha_1$ un factor de $f(x)$, y en consecuencia $f(x)$ mismo es igual a cero.

En algunos casos, los factores $(x - \alpha_1), (x - \alpha_2), \dots$ de un polinomio $f(x)$ de grado n no son todos distintos, como se ve en el ejemplo

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1),$$

que tiene solo la raíz $x = 1$, "contada dos veces" o "con multiplicidad 2". En todo caso, un polinomio de grado n no puede tener más de n factores distintos $(x - \alpha)$, y la correspondiente ecuación, n raíces. Para demostrar el teorema de la descomposición en factores, haremos uso de la identidad algebraica

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-2} x + \alpha^{k-1}), \quad (20)$$

que para $\alpha = 1$ se reduce a la fórmula de sumación de una progresión geométrica. Como hemos supuesto que se verifica el teorema de Gauss, podemos admitir que $\alpha = \alpha_1$ es una raíz de la ecuación (17), de modo que

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + a_{n-2}\alpha_1^{n-2} + \dots + a_1\alpha_1 + a_0 = 0.$$

Restando esta de $f(x)$ y reagrupando los términos, obtenemos la identidad

$$f(x) - f(\alpha_1) = (x^n - \alpha_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha_1^{n-1}) + \dots + a_1(x - \alpha_1). \quad (21)$$



Ahora bien: según (20), podemos sacar el factor $(x - \alpha_1)$ de cada término de (21), con lo cual el grado del otro factor de cada término se reduce en una unidad. Si de nuevo reagrupamos los términos, obtenemos

$$f(x) = (x - \alpha_1)g(x),$$

donde $g(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$:

$$g(x) = x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0.$$

(Para nuestro objeto resulta innecesario calcular los coeficientes b_k .) Ahora podemos aplicar el mismo procedimiento a $g(x)$; por el teorema de Gauss, existe una raíz α_2 de la ecuación $g(x) = 0$, de modo que

$$g(x) = (x - \alpha_2)h(x),$$

siendo $h(x)$ un polinomio de grado $n - 2$. Reiterando el mismo proceso un total de $(n - 1)$ veces (por supuesto que esta frase no es sino un equivalente del proceso de inducción matemática), obtenemos finalmente la descomposición completa en factores

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n). \quad (22)$$

De (22) resulta no solo que los números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son raíces de la ecuación (17), sino también que son sus únicas raíces; pues si fuera y una raíz de la ecuación (17), por (22) se tendría

$$f(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \dots (y - \alpha_n) = 0.$$

Hemos visto que un producto de números complejos se anula si, y solo si, uno de los factores es igual a 0; en consecuencia, una de las diferencias $(y - \alpha_r)$ debe ser nula, e y igual a α_r , como queríamos demostrar.

NÚMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

1. Definición y existencia

Un *número algebraico* es cualquier número x , real o complejo, que satisface a una ecuación algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0) \quad (1)$$

donde los coeficientes a_k son enteros; por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número algebraico, pues satisface a la ecuación

$$x^2 - 2 = 0.$$

En forma análoga, toda raíz de una ecuación de coeficientes enteros de grados 3°, 4°, 5°, o superior es un número algebraico, sean o no expresables dichas raíces mediante radicales. El concepto de número algebraico es una generalización natural del de número racional, que constituye el caso especial para $n = 1$.

Que no todo número real es algebraico puede probarse por un procedimiento debido a Georg Cantor, consistente en demostrar que el conjunto de los números algebraicos es *numerable*. Como el conjunto de todos los números reales no es numerable, de ello resulta la existencia de números reales no algebraicos.

Un método para enumerar el conjunto de los números algebraicos es el siguiente: a cada ecuación de la forma (1) se le adjunta el entero positivo

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| + n$$

que llamaremos su *altura*. Para un valor fijo de h existe solo un número finito de ecuaciones (1) de altura h , y cada una de estas tiene a lo sumo n raíces diferentes; por tanto, existe solo un número finito de números algebraicos cuyas ecuaciones son de altura h , y podemos ordenar todos los números algebraicos en una sucesión, partiendo de los de altura 1, a continuación, los de altura 2, y así sucesivamente.

Esta demostración de que el conjunto de los números algebraicos es numerable asegura la existencia de números no algebraicos: tales números se llaman *trascendentes*, pues, como dijo Leonhard Euler, "trascienden al poder de los métodos algebraicos".

La demostración de Cantor de la existencia de números trascendentes a duras penas puede llamarse *constructiva*. Teóricamente, se puede construir un número trascendente aplicando el proceso diagonal de Cantor



$$|z - z_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

para m suficientemente grande. Combinando esta desigualdad con la (4) tendríamos

$$\frac{1}{10^{(n+1)m!}} < \frac{10}{10^{(m+1)!}} = \frac{1}{10^{(m+1)!-1}},$$

de modo que $(n+1)m! > (m+1)! - 1$ para todo m suficientemente grande, y esto es evidentemente falso para todo valor de m mayor que n (podemos hacer una demostración detallada de esta afirmación), lo que conduce a una contradicción; en consecuencia, z es trascendente.

Queda ahora por demostrar el teorema de Liouville. Supongamos que z es un número algebraico de grado $n > 1$ que satisface a (1), de forma que

$$f(z) = 0. \quad (5)$$

Sea $z_m = p_m/q_m$ una sucesión de números racionales tales que $z_m \rightarrow z$. Entonces,

$$f(z_m) = f(z_m) - f(z) = a_1(z_m - z) + a_2(z_m^2 - z^2) + \dots + a_n(z_m^n - z^n).$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $z_m - z$, y utilizando la identidad algebraica

$$\frac{u^n - v^n}{u - v} = u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}$$

obtenemos

$$\frac{f(z_m)}{z_m - z} = a_1 + a_2(z_m + z) + a_3(z_m^2 + z_m z + z^2) + \dots + a_n(z_m^{n-1} + \dots + z^{n-1}). \quad (6)$$

Como z_m tiene por límite z , para valores grandes de m diferirá de z en menos de 1, por lo que podemos escribir, para valores suficientemente grandes de m ,

$$\left| \frac{f(z_m)}{z_m - z} \right| < |a_1| + 2|a_2|(|z|+1) + 3|a_3|(|z|+1)^2 + \dots + n|a_n|(|z|+1)^{n-1} = M, \quad (7)$$

que es un número fijo, ya que suponemos fijo z en nuestro razonamiento. Si ahora elegimos m suficientemente grande para que el denominador q_m de $z_m = p_m/q_m$ sea mayor que M , se tendrá

$$|z - z_m| > \frac{|f(z_m)|}{M} > \frac{|f(z_m)|}{q_m}. \quad (8)$$

Por brevedad escribamos p y q en lugar de p_m y q_m . Entonces

$$|f(z_m)| = \left| \frac{a_0 q^n + a_1 q^{n-1} p + \dots + a_n p^n}{q^n} \right|. \quad (9)$$

Ahora bien: el número racional $z_m = p/q$ no puede ser raíz de $f(x) = 0$, pues si así fuese se podría suprimir el factor $(x - z_m)$ de $f(x)$, y z satisfaría a una ecuación de grado inferior a n ; por consiguiente, $f(z_m) \neq 0$. Pero el numerador del segundo miembro de (9) es entero; por lo menos, pues, igual a 1. Finalmente, de (8) y (9) tenemos

$$|z - z_m| > \frac{1}{q} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}}, \quad (10)$$

lo que demuestra el teorema.

Durante las primeras décadas del siglo xx avanzó mucho la investigación acerca de la posibilidad de aproximar los números algebraicos mediante los racionales; por ejemplo, el matemático noruego Axel Thue (1863-1922) demostró que en la desigualdad (3) de Liouville el exponente $n+1$ puede ser sustituido por $(n/2)+1$. Carl Ludwig Siegel probó posteriormente el enunciado aún más preciso (más preciso para valores grandes de n) de que subsiste para el exponente $2\sqrt{n}$.

El tema de los números trascendentes ha fascinado siempre a los matemáticos, pero hasta una época muy

reciente se conocían muy pocos ejemplos de números de interés intrínseco de los que se supiera eran trascendentes (más adelante discutiremos el carácter trascendente de π , del cual resulta la imposibilidad de efectuar la cuadratura del círculo con la regla y el compás). En una famosa comunicación al Congreso Internacional de Matemática celebrado en París en 1900, David Hilbert propuso treinta problemas matemáticos fáciles de formular, algunos incluso en lenguaje elemental y hasta popular, pero ninguno de ellos resuelto y ni siquiera inmediatamente accesible a la técnica matemática entonces existente. Estos *problemas de Hilbert* fueron un reto al subsiguiente período del desarrollo matemático y casi todos han sido ya resueltos, constituyendo a menudo su solución un claro progreso de la potencia del instrumento matemático y de sus métodos generales. Uno de los problemas que parecían más inaccesibles consistía en demostrar la trascendencia del número $2^{\sqrt{2}}$ o al menos probar que se trataba de un número irracional. Durante más de treinta años no surgió ni la más remota esperanza de hallar un método prometedor de atacar el problema. Por fin, Siegel e, independientemente, el joven matemático ruso Aleksandr Gelfond descubrieron nuevos métodos para demostrar el carácter trascendente de muchos números importantes de la matemática, incluido el número de Hilbert $2^{\sqrt{2}}$, y más en general, cualquier número de la forma a^b siendo a un número algebraico $\neq 0$ o 1 , y b un número algebraico irracional.

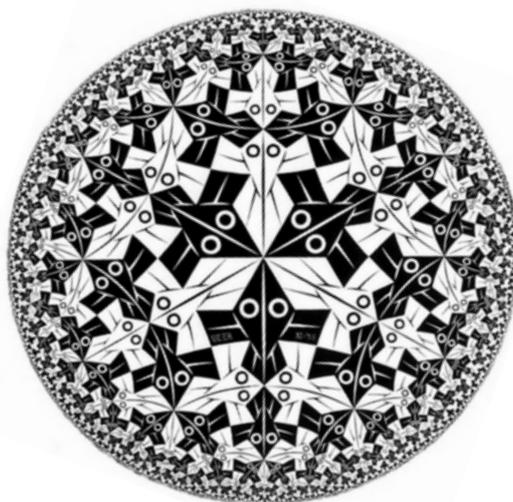
III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

Continúa de Leñitas Geométrica 7ª época N° 6, Capítulo "Un teorema antiguo y una pregunta moderna según Roger Penrose"

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA: IMAGEN CONFORME

Echemos una mirada a la imagen de la figura siguiente



Límite circular I, grabado en madera de Maurits Cornelis Escher, que ilustra la representación conforme del plano hiperbólico.

Es una reproducción de uno de los grabados en madera de Maurits Cornelis Escher, llamado *Límite circular I*. En realidad, nos proporciona una representación muy aproximada de un tipo de geometría llamada *geometría hiperbólica* (o, a veces, *lobachevskiana*), en la que el postulado de las paralelas es falso, el teorema de Pitágoras deja de ser válido y los ángulos de un triángulo no suman π . Además, para una figura de un tamaño dado no existe, en general, una figura semejante de tamaño mayor.

En esa figura, Escher ha utilizado una representación concreta de la geometría hiperbólica en la que el

universo entero del plano hiperbólico está *comprimido* en el interior de un círculo en un plano euclídeo ordinario.

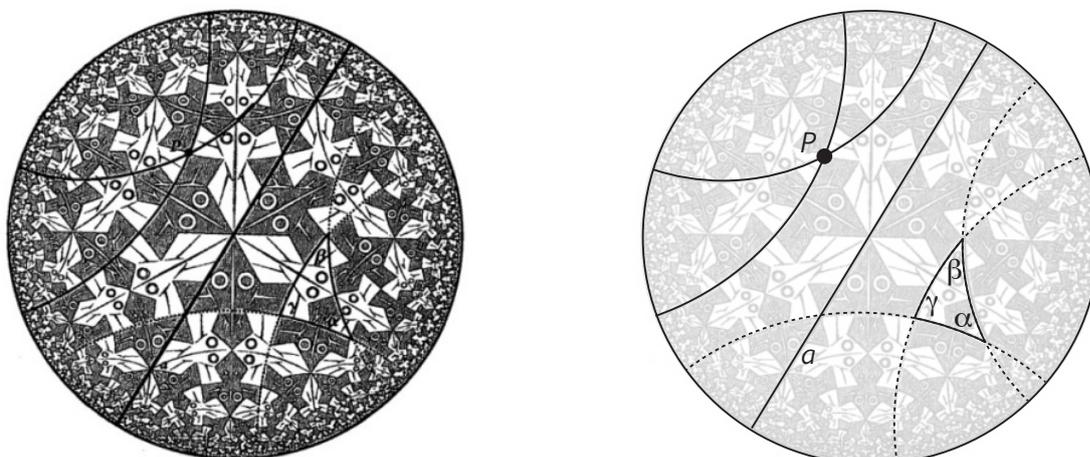
La circunferencia que limita al círculo representa el *infinito* para este universo hiperbólico. En la imagen de Escher, podemos ver que los peces parecen apretarse mucho a medida que se acercan a dicha frontera. Pero debemos considerar esto como una ilusión. Imagínese que usted es uno de los peces. Entonces, ya esté situado próximo al borde de la imagen de Escher o próximo a su centro, el universo (hiperbólico) entero tendrá la misma apariencia para usted. La noción de *distancia* en esta geometría no coincide con la del plano euclídeo en cuyos términos ha sido representada. Cuando miramos la imagen de Escher desde nuestra perspectiva euclídea, los peces próximos a la frontera parecen hacérsenos minúsculos.

Pero desde su propia perspectiva *hiperbólica*, los peces blancos o negros piensan que tienen exactamente la misma forma e idéntico tamaño que los que están próximos al centro. Más aún, aunque desde nuestra perspectiva euclídea exterior ellos parecen acercarse cada vez más a la propia frontera, desde su propia perspectiva hiperbólica dicha frontera siempre queda infinitamente lejos. Ni el círculo frontera ni nada del espacio *euclídeo* exterior tiene existencia para ellos. Su universo entero consiste en lo que para nosotros parece estar estrictamente dentro del círculo.

En términos más matemáticos, ¿cómo está construida esta imagen de la geometría hiperbólica? Consideremos un círculo cualquiera en el plano euclídeo. El conjunto de puntos interiores a este círculo va a representar el conjunto de puntos en el plano hiperbólico entero. Las líneas rectas, de acuerdo con la geometría hiperbólica, se representan como círculos euclídeos que cortan *ortogonalmente* –lo que significa a ángulos rectos– al círculo frontera. Ahora resulta que la noción hiperbólica de ángulo entre dos curvas cualesquiera, en su punto de intersección, es exactamente la misma que la medida euclídea del ángulo entre las dos curvas en el punto de intersección. Una representación de esta naturaleza se denomina *representación conforme*.

Por esta razón, a la representación concreta de la geometría hiperbólica que utilizó Escher se la llama a veces el *modelo conforme* del plano hiperbólico. También suele llamársele *disco de Poincaré*. La dudosa justificación histórica de esta terminología será examinada más adelante.

Estamos ahora en situación de ver si los ángulos de un triángulo, en la geometría hiperbólica, suman o no π . Una rápida mirada a la figura siguiente



La misma imagen de Escher que en la figura anterior, pero con líneas rectas hiperbólicas (círculos euclídeos o líneas que cortan ortogonalmente al círculo frontera) y un triángulo hiperbólico. Los ángulos hiperbólicos coinciden con los euclídeos. Evidentemente, se viola el postulado de que las paralelas y los ángulos de un triángulo suman menos que π .

nos lleva a creer que no lo hacen y que suman algo menos. De hecho, la suma de los ángulos de un triángulo en la geometría hiperbólica es siempre menor que π . Podríamos considerar esto como una característica desagradable de la geometría hiperbólica, ya que parece que no tenemos una respuesta “clara” para la suma de los ángulos de un triángulo. Sin embargo, cuando sumamos los ángulos de un triángulo hiperbólico sucede algo extraordinario y particularmente elegante: el déficit es siempre proporcional al área del triángulo. De forma más explícita, si los tres ángulos del triángulo son α , β y γ , entonces tenemos la fórmula, descubierta por Johann Heinrich Lambert (1728-1777):

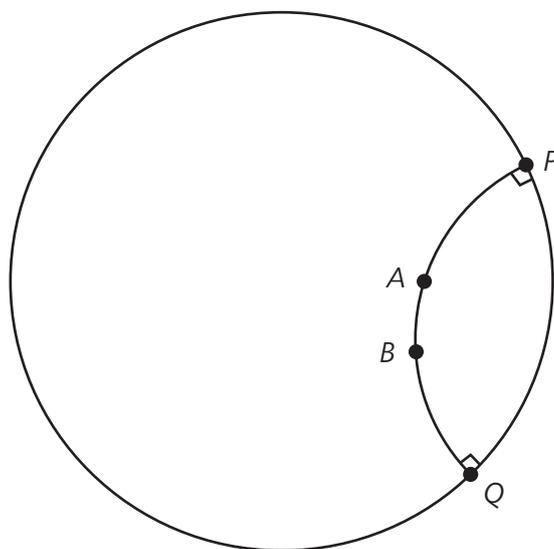
$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = C\Delta,$$

donde Δ es el área del triángulo y C es una constante. Esta constante depende de las “unidades” que se escojan para medir longitudes y áreas. Siempre podemos fijar la escala de modo que $C = 1$. Es un hecho realmente notable que el área de un triángulo pueda expresarse de una forma tan simple en la geometría hiperbólica. En la geometría euclídea no hay modo de expresar el área de un triángulo simplemente en función de sus ángulos, y la expresión para el área de un triángulo en función de las longitudes de sus lados es bastante más complicada.

De hecho, aún no hemos acabado la descripción de la geometría hiperbólica en términos de esta representación conforme, puesto que todavía no hemos descrito cómo va a definirse la *distancia* hiperbólica entre dos puntos y convendría saber qué es *distancia* antes de que podamos hablar realmente de áreas. Podemos dar una expresión para la distancia hiperbólica entre dos puntos A y B interiores al círculo. Esta expresión es

$$\log \frac{QA \cdot PB}{QB \cdot PA},$$

donde P y Q son los puntos donde el círculo euclídeo (es decir, la línea recta hiperbólica) que pasa por A y B y es ortogonal al círculo frontera corta a dicho círculo frontera, y donde “ QA ”, etc., se refieren a distancias euclídeas (ver figura siguiente).



En la representación conforme, la distancia hiperbólica entre A y B es $\log \{QA \cdot PB / QB \cdot PA\}$, donde QA , etc., son distancias euclídeas, y P y Q son los puntos donde el círculo euclídeo que pasa por A y B y es ortogonal al círculo frontera (línea hiperbólica) corta a este círculo.

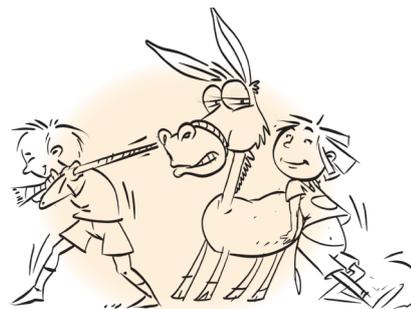
Si se quiere incluir la “ C ” de la fórmula del área de Lambert (con $C \neq 1$), solo hay que multiplicar la expresión anterior para la distancia por $C^{-1/2}$ (el recíproco de la raíz cuadrada de C). Por razones que espero que aclaremos más adelante, nos referiremos a la cantidad $C^{-1/2}$ como el *pseudorradio* de la geometría.

Si expresiones matemáticas como la fórmula “log” anterior le parecen disuasorias, dice Roger Penrose, por favor, no se preocupe. Solo la damos para aquellos a quienes les gusta ver las cosas explícitamente. En cualquier caso, no explicaremos por qué funciona la expresión (por ejemplo, por qué la distancia hiperbólica más corta entre dos puntos, así definida, se mide realmente a lo largo de una línea recta hiperbólica, o por qué las distancias a lo largo de una línea recta hiperbólica “se suman” de la forma adecuada). También pidió disculpas por el “log” (logaritmo), pero así son las cosas. De hecho, este es un *logaritmo natural* (“log en base e ”), que veremos más adelante. Veremos que los logaritmos son entidades realmente muy bellas y misteriosas, además de ser importantes en muchos contextos diferentes.

La geometría hiperbólica, con esta definición de distancia, resulta tener todas las propiedades de la geometría euclídea, salvo aquellas que necesitan el postulado de las paralelas. Podemos construir triángulos, y otras figuras planas, de diferentes formas y tamaños, y podemos desplazarlos “rígidamente” (manteniendo invariables sus formas y tamaños hiperbólicos) con la misma libertad con que podemos hacerlo en la geometría euclídea, de modo que, igual que en la geometría euclídea, surge una noción natural de cuándo son *congruentes* dos figuras (donde *congruente* significa que *pueden desplazarse rígidamente hasta que llegan a coincidir*). De hecho, todos los peces blancos del grabado de Escher son mutuamente congruentes, según esta geometría hiperbólica, y también lo son todos los peces negros.

OTRAS REPRESENTACIONES DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

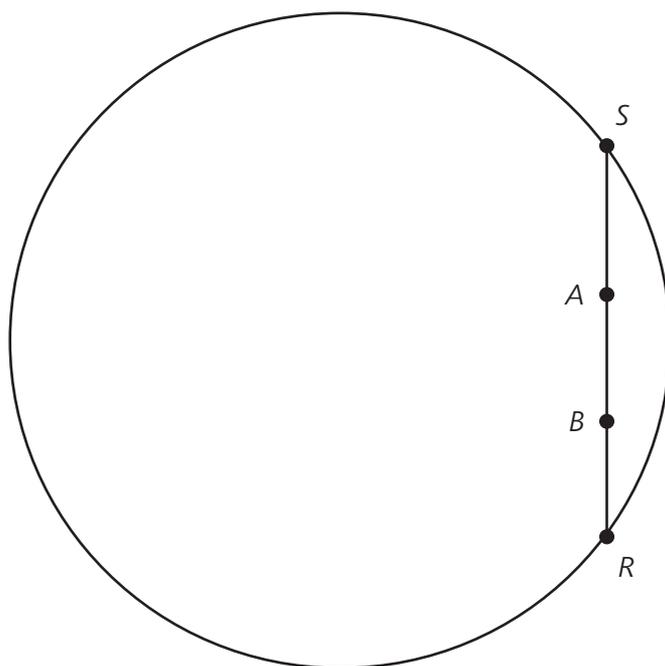
Por supuesto, no todos los peces blancos parecen de la misma forma e idéntico tamaño, pero ello se debe a que los estamos viendo desde una perspectiva euclídea en lugar de una hiperbólica. La imagen de Escher hace uso simplemente de una representación euclídea concreta de la geometría hiperbólica. La propia geometría hiperbólica es algo más abstracto, que no depende de ninguna representación euclídea en particular.



Sin embargo, tales representaciones son muy útiles para nosotros, pues proporcionan un modo de visualizar la geometría hiperbólica refiriéndola a algo que es más familiar y en apariencia más “concreto” para nosotros, a saber, la geometría euclídea. Además, tales representaciones dejan claro que la geometría hiperbólica es una estructura consistente y que, en consecuencia, el postulado de las paralelas no puede demostrarse a partir de las otras leyes de la geometría euclídea.

Hay, de hecho, otras representaciones de la geometría hiperbólica en términos de geometría euclídea que son diferentes de la representación conforme que utilizó Escher. Una de ellas es la que se conoce como el *modelo proyectivo*. Aquí, el plano hiperbólico entero es de nuevo representado como el interior de un círculo en un plano euclídeo, pero las líneas rectas hiperbólicas están ahora representadas como líneas rectas euclídeas (y no como arcos de círculo). Sin embargo, hay un precio a pagar por esta aparente simplificación, puesto que los ángulos hiperbólicos no son ahora iguales a los ángulos euclídeos, y muchos considerarían que este es un precio demasiado alto. Para aquellos que estén interesados, la distancia hiperbólica entre dos puntos A y B en esta representación está dada a continuación en la figura por la fórmula

$$\frac{1}{2} \log \frac{RA \cdot SB}{RB \cdot SA}$$



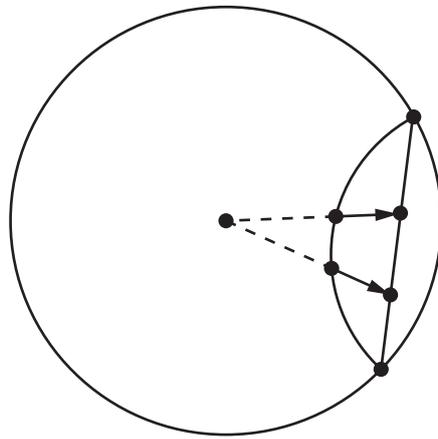
En la representación proyectiva, la fórmula para la distancia hiperbólica es ahora $1/2 \log \{RA \cdot SB / RB \cdot SA\}$, donde R y S son las intersecciones de la línea recta euclídea (es decir, hiperbólica) AB con el círculo frontera.

tomando $C = 1$, que es casi igual que la expresión que teníamos antes para la representación conforme, donde R y S son las intersecciones de la línea recta prolongada AB con el círculo frontera.

Esta representación de la geometría hiperbólica puede obtenerse a partir de la conforme por medio de una dilatación radial desde el centro en una cantidad dada por

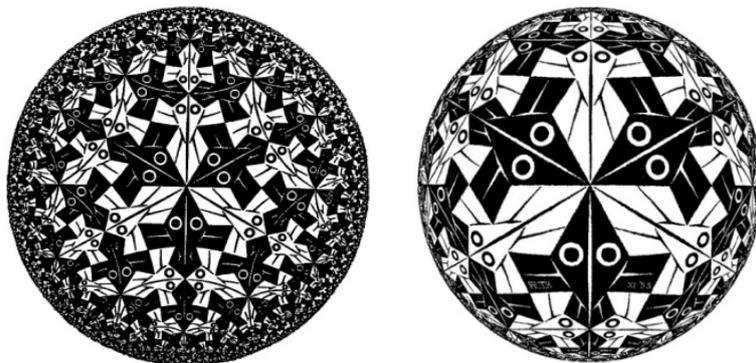
$$\frac{2R^2}{R^2 + r_c^2}$$

donde R es el radio del círculo frontera y r_c es la distancia euclídea de un punto al centro (euclídeo) del círculo frontera en la representación conforme (véase la figura siguiente).



Para pasar de la representación conforme a la proyectiva, se expande a partir del centro en un factor $2R^2/(R^2 + r_c^2)$, donde R es el radio del círculo frontera y r_c es la distancia euclídea al punto en la representación conforme.

En las figuras siguientes,



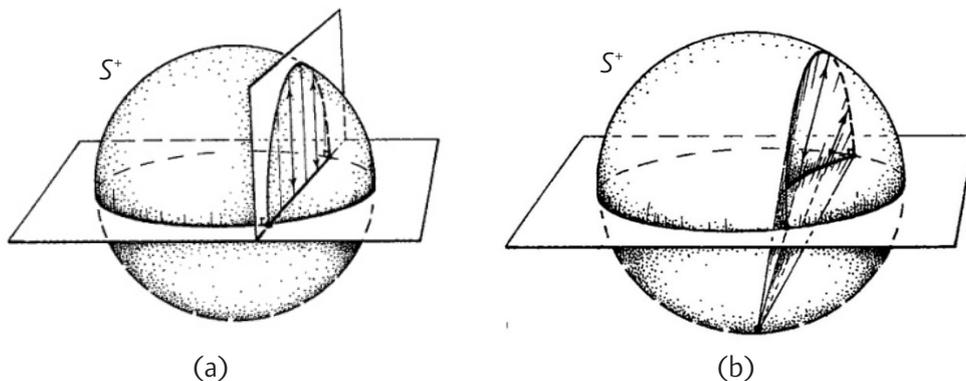
La imagen de Escher de la transformada desde la representación conforme a la proyectiva.

la imagen de Escher de la figura dada anteriormente ha sido transformada del modelo conforme al modelo proyectivo utilizando esta fórmula. (Pese a la pérdida de detalle, el arte preciso de Escher sigue siendo evidente.) Aunque resulta menos atractiva de esta manera, ¡presenta un nuevo punto de vista!

Existe una forma más directamente geométrica de relacionar las imágenes conforme y proyectiva, a través de otra representación aún más ingeniosa de la misma geometría. Las tres representaciones se deben al ingenioso geómetra italiano Eugenio Beltrami (1835-1900).

Consideremos una esfera S , cuyo ecuador coincide con el círculo frontera de la representación proyectiva de la geometría hiperbólica que se ha dado antes. Ahora vamos a encontrar una representación de la geometría hiperbólica en el *hemisferio norte* S^+ de S , que llamaremos *representación hemisférica*.

Para pasar de la representación proyectiva en el plano (considerado horizontal) a la nueva representación en la esfera, simplemente proyectamos verticalmente hacia arriba, como muestra la imagen (a).



Geometría de Beltrami, que relaciona tres de sus representaciones de la geometría hiperbólica. (a) La representación hemisférica (conforme en el hemisferio norte S^+) se proyecta verticalmente en la representación proyectiva sobre el disco ecuatorial. (b) La representación hemisférica proyecta estereográficamente desde el polo sur a la representación conforme sobre el disco ecuatorial.

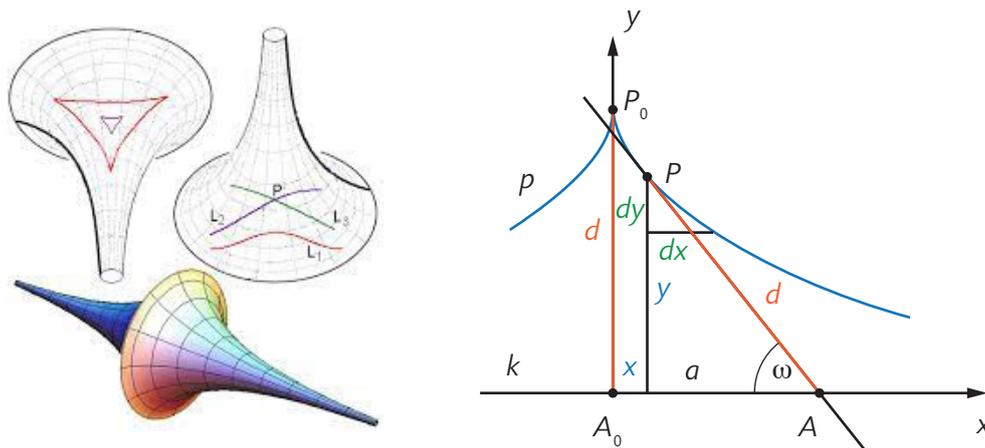
Las líneas rectas en el plano, que representan líneas rectas hiperbólicas, se representan en S^+ por semicírculos que cortan ortogonalmente al ecuador. Ahora, para ir de la representación en S^+ a la representación conforme en el plano proyectamos desde el *polo sur* (imagen (b)). Esta es la que se denomina *proyección estereográfica*.

Dos propiedades importantes de la representación estereográfica que veremos más adelante y que es conforme, de modo que conserva los ángulos, y que hace corresponder círculos en la esfera a círculos o, excepcionalmente, a líneas rectas. Fue estudiada en principio por Eugenio Beltrami.

Eugenio Beltrami y su geometría

Eugenio Beltrami nació en 1835 en Cremona (Lombardía), por entonces parte del Imperio austríaco y parte de Italia. Comenzó a estudiar matemática en la Universidad de Pavía en 1853, pero fue expulsado en 1856 debido a sus opiniones políticas. Durante este tiempo fue alumno de Francesco Brioschi. Acorralado por dificultades financieras, tuvo que suspender sus estudios y pasó los siguientes años como secretario trabajando para la compañía ferroviaria Lombardía-Venecia. Fue nombrado profesor de la Universidad de Bolonia en 1862, año en que publicó su primer trabajo de investigación. A lo largo de su vida, Beltrami asumió varios cargos como profesor en las universidades de Pisa, Roma y Pavía. Desde 1891 hasta el final de su vida vivió en Roma. Se convirtió en el presidente de la *Accademia del Linceo* en 1898 y en senador del Reino de Italia en 1899.

En 1868, Beltrami publicó dos memorias que trataban sobre la consistencia y las interpretaciones de la geometría no euclidiana de János Bolyai y de Nikolái Lobachevski. En su *Ensayo sobre una interpretación de la geometría no euclidiana*, Beltrami propuso que esta geometría podría realizarse en una superficie de curvatura negativa constante, una pseudoesfera.



La pseudoesfera de Beltrami es una superficie que se genera al girar una curva tractory alrededor de su asíntota.

Para el concepto de Beltrami, las líneas de la geometría están representadas por geodésicas en la pseudoesfera y los teoremas de la geometría no euclidiana se pueden probar dentro del espacio euclidiano tridimensional ordinario, y no derivarse de manera axiomática, como Lobachevski y Bolyai habían hecho previamente. En 1840, Ernst Ferdinand Minding ya consideraba los triángulos geodésicos en la pseudoesfera y señaló que las correspondientes *fórmulas trigonométricas* se obtienen a partir de las fórmulas correspondientes de la trigonometría esférica reemplazando las funciones trigonométricas habituales por funciones hiperbólicas; lo que desarrolló Delfino Codazzi en 1857, pero aparentemente ninguno de ellos notó la asociación con el trabajo de Lobachevski.

De esta forma, Beltrami intentó demostrar que la geometría bidimensional no euclidiana es tan válida como la geometría euclidiana del espacio, y, en particular, que el postulado de las paralelas de Euclides no podría derivarse de los otros axiomas de la geometría euclidiana. A menudo se afirma que esta prueba fue incompleta debido a las singularidades de la pseudoesfera, lo que significa que las geodésicas no pudieran extenderse indefinidamente. Sin embargo, John Stillwell señala que Beltrami debe haber sido muy consciente de esta dificultad, que también se manifiesta en el hecho de que la pseudoesfera es topológicamente un cilindro, y no un plano, y pasó parte de sus memorias diseñando una forma de evitarlo.

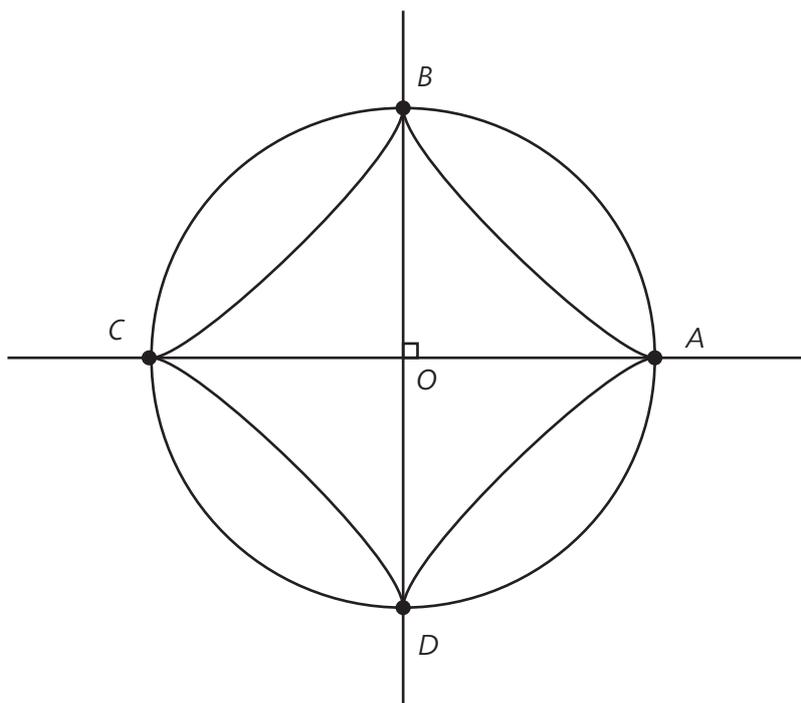
Mediante una elección adecuada de coordenadas, Beltrami demostró cómo la métrica de la pseudoesfera puede transferirse al disco de radio unidad y que la singularidad de la pseudoesfera corresponde a un

horociclo en el plano no euclidiano. Por otro lado, en la introducción de sus memorias, Beltrami afirma que sería imposible justificar “por medio de este método” el resto de la teoría de Lobachevski, es decir, la geometría no euclidiana del espacio.

La existencia de varios modelos diferentes de geometría hiperbólica expresados en términos de espacio euclídeo sirve para acentuar el hecho de que, en realidad, estos son meramente *modelos euclídeos* de geometría hiperbólica y no debemos considerar que nos estén diciendo qué es realmente la geometría hiperbólica. La geometría hiperbólica tiene su propia “existencia platónica”, igual que la tiene la geometría euclídea, como ya lo vimos.

Ninguno de estos modelos debemos tomar como la *representación* correcta de la geometría hiperbólica, en detrimento de los otros. Las representaciones de la misma que hemos estado considerando son muy valiosas como ayudas para nuestra comprensión, pero solo porque el marco euclídeo es aquel al que estamos más acostumbrados. Para una criatura sintiente que haya crecido con una experiencia directa de la geometría hiperbólica (antes que de la euclídea), un modelo de geometría euclídea en términos hiperbólicos parecería la vía más natural. Más adelante encontraremos aún otro modelo de geometría hiperbólica, esta vez en términos de la geometría minkowskiana de la relatividad especial.

Para terminar esta sección, volvamos a la cuestión de la existencia de cuadrados en la geometría hiperbólica. Aunque en la geometría hiperbólica no existen cuadrados cuyos ángulos sean ángulos rectos, sí existen “cuadrados” de un tipo más general cuyos ángulos son menores que los ángulos rectos. La forma más fácil de construir un cuadrado de este tipo es trazar dos líneas rectas que se cortan a ángulos rectos en un punto O . Nuestro “cuadrado” es ahora el cuadrilátero cuyos cuatro vértices son las intersecciones A, B, C, D (tomadas cíclicamente) de estas dos líneas con un círculo con centro O . (Ver la figura siguiente.)



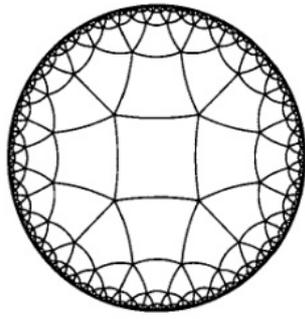
Un “cuadrado” hiperbólico es un cuadrilátero hiperbólico, cuyos vértices son las intersecciones A, B, C, D (tomadas cíclicamente) de dos rectas hiperbólicas perpendiculares que pasan por un punto O con un círculo centrado en O .

Debido a la simetría, los cuatro lados de $ABCD$, así como los cuatro ángulos, son iguales.

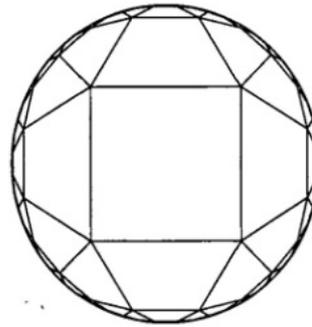
Estos ángulos no son rectos, pero pueden ser iguales a cualquier ángulo positivo dado menor que π .

Debido a la simetría de la figura, los cuatro lados del cuadrilátero resultante $ABCD$ son iguales y los cuatro ángulos también deben ser iguales. Pero ¿son rectos estos ángulos? No en la geometría hiperbólica. De hecho, pueden ser cualquier ángulo (positivo) que queramos que sea menor que un ángulo recto, pero no igual a un ángulo recto. Cuanto más grande es el cuadrado (hiperbólico), es decir, cuanto mayor es el círculo en la construcción anterior, menores serán sus ángulos.

En la figura siguiente, utilizando el modelo conforme, hemos representado un retículo de cuadrados hiperbólicos donde hay cinco cuadrados en cada vértice (en lugar de los cuatro euclídeos), de modo que el ángulo es $2\pi/5$, o 72° . En el esquema de la figura



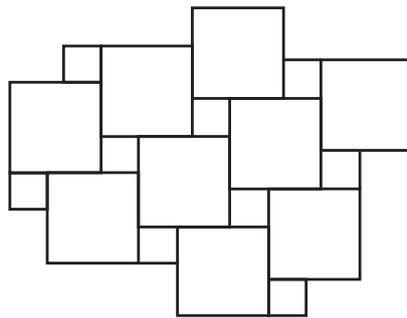
(a)



(b)

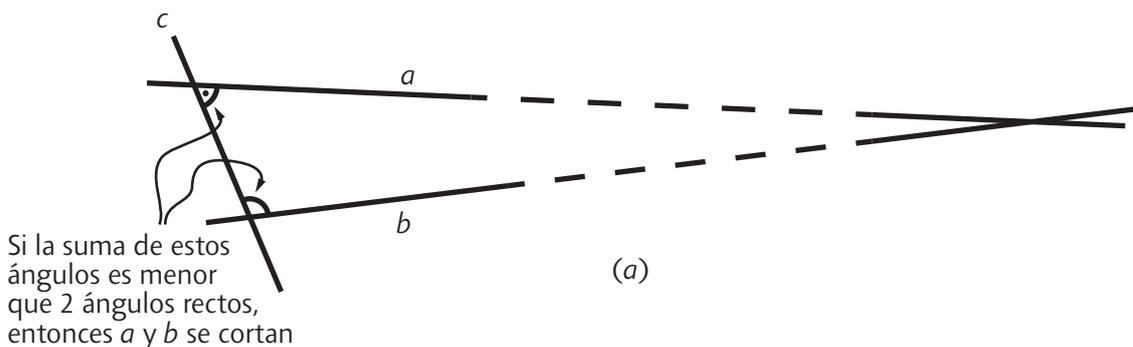
Un retículo de cuadrados, en el espacio hiperbólico, en el que cinco cuadrados se encuentran en cada vértice, de modo que los ángulos del cuadrado son $2\pi/5$ o 72° . (a) Representación conforme. (b) Representación proyectiva.

está dibujado el mismo retículo utilizando el modelo proyectivo. Se verá que este no permite las modificaciones que serían necesarias para el retículo de dos cuadrados de la figura ya vista:



ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Aquí es oportuno hacer algún comentario histórico concerniente a la invención de la geometría hiperbólica. Durante los siglos siguientes a la publicación de los *Elementos* de Euclides, aproximadamente en el año 300 a. C., varios matemáticos intentaron demostrar el quinto postulado a partir de los otros axiomas y postulados. Estos esfuerzos alcanzaron su culminación con el heroico trabajo del jesuita Girolamo Saccheri, en 1773. Podría parecer que el propio Saccheri debió de pensar que la obra de su vida era, en definitiva, un fracaso, pues se reducía a un intento insatisfactorio de demostrar el postulado de las paralelas evidenciando que la hipótesis de que la suma de los ángulos de todo triángulo es menor que dos ángulos rectos lleva a una contradicción. Incapaz de hacer esto de forma lógica, tras tremendos esfuerzos, concluyó, más bien débilmente: “La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta”. La hipótesis del “ángulo agudo” afirma que las líneas a y b de la figura siguiente, que ya habíamos analizado, a veces no se cortan.



(a) Postulado de las paralelas de Euclides. Las líneas a y b son transversales a una tercera línea c , tal que los ángulos interiores donde a y b cortan a c suman menos que dos ángulos rectos. Entonces a y b (suponiendo que se prolongan lo suficiente) se cortarán en última instancia.

Es realmente viable y, de hecho, ¡da la geometría hiperbólica!

¿Cómo puede ser que Saccheri descubriera efectivamente algo que él estaba tratando de demostrar que era imposible? Su propuesta para demostrar el quinto postulado de Euclides consistía en formular la hipótesis de que este era falso y obtener entonces una contradicción a partir de dicha hipótesis.

De este modo, él proponía hacer uso de uno de los principios más tradicionales y fructíferos que han sido propuestos en matemática –muy posiblemente introducido por primera vez por los pitagóricos– llamado *demostración por contradicción* (o *reductio ad absurdum*, para darle su nombre latino).

Según este procedimiento, para probar que una afirmación es cierta se formula primero la hipótesis de que la afirmación en cuestión es falsa, y luego se argumenta que de ello se sigue una contradicción. Si se llega a encontrar tal contradicción, se deduce que la afirmación debe ser, después de todo, verdadera. La demostración por contradicción proporciona un método muy potente de razonamiento en matemáticas, hoy aplicado con frecuencia. Sin embargo, existe un punto de vista conocido como *intuicionismo*, mantenido por una minoría de matemáticos, en el que no se acepta el principio de “demostración por contradicción”. La objeción consiste en que este principio puede ser no constructivo en cuanto que a veces lleva a una afirmación de la existencia de cierta entidad matemática, sin que se ofrezca ninguna construcción real de la misma.

Aquí es apropiada una cita del distinguido matemático Godfrey Harold Hardy:

“La *reductio ad absurdum*, que tanto amaba Euclides, es una de las armas matemáticas más valiosas. Es un gambito mucho más fino que cualquier gambito de ajedrez: un jugador de ajedrez puede ofrecer el sacrificio de un peón o incluso una pieza, pero un matemático ofrece el juego”.

Veremos otros usos de este importante principio más adelante. No obstante, Saccheri fracasó en su intento de encontrar una contradicción. Por consiguiente, no pudo obtener una demostración del quinto postulado. Pero al esforzarse en ello, descubrió algo mucho más grande: una nueva geometría, diferente de la de Euclides –la geometría discutida que ahora llamamos *geometría hiperbólica*–.

A partir de la hipótesis de que el quinto postulado de Euclides era falso obtuvo, en lugar de una contradicción real, un montón de teoremas de apariencia extraña y apenas creíble, pero muy interesantes. No obstante, por extraños que parecieran tales resultados, ninguno de ellos era realmente una contradicción. Como sabemos ahora, no había ninguna posibilidad de que Saccheri encontrara de esta manera una contradicción genuina, por la sencilla razón de que la geometría hiperbólica existe realmente, en el sentido matemático de que existe una estructura semejante consistente.

En la terminología que usamos, la geometría hiperbólica habita en el mundo platónico de las formas matemáticas. La cuestión de la realidad física de la geometría hiperbólica se discutirá más adelante.

Poco tiempo después de Saccheri, el muy perspicaz matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777) obtuvo también numerosos y fascinantes resultados geométricos a partir de la hipótesis de que el quinto postulado de Euclides es falso, incluyendo el bello resultado mencionado que da el área de un triángulo hiperbólico en función de la suma de sus ángulos.

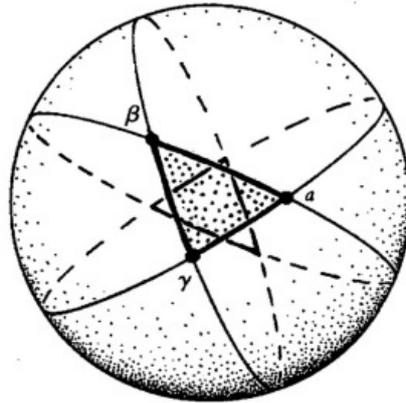
Parece que Lambert pudo haberse formado la opinión, al menos en alguna etapa de su vida, de que realmente podía obtenerse una geometría consistente a partir de la negación del quinto postulado de Euclides. Al parecer, la razón tentativa de Lambert era que podía contemplar la posibilidad teórica de la geometría en una “esfera de radio imaginario”, es decir, en una esfera cuyo “radio al cuadrado” es negativo. La fórmula de Lambert

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = C\Delta$$

da el área, Δ , de un triángulo hiperbólico, donde α , β , γ son los ángulos del triángulo y C es una constante (siendo $-C$ lo que ahora llamaríamos la *curvatura gaussiana* del plano hiperbólico). Esta fórmula tiene básicamente la misma apariencia que una previamente conocida debida a Thomas Harriot (1560-1621):

$$\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

para el área Δ de un triángulo esférico, dibujado con arcos de círculo máximo en una esfera de radio R . Los arcos de círculo máximo son las curvas “más cortas” (*geodésicas*) sobre la superficie de una esfera; yacen en planos que pasan por el centro de la esfera, como muestra la siguiente figura



La fórmula de Hariot para el área de un triángulo esférico, con ángulos α , β , γ es $\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.
 La fórmula de Lambert, para un triángulo hiperbólico, tiene $C = -1/R^2$.

Para recuperar la fórmula de Lambert, tenemos que poner

$$C = -\frac{1}{R^2}.$$

Pero, para dar el valor positivo de C , como sería necesario en la geometría hiperbólica, necesitamos que el radio de la esfera sea "imaginario" (es decir, que sea la raíz cuadrada de un número negativo). Nótese que el radio R está dado por la cantidad imaginaria $(-C)^{-\frac{1}{2}}$. Esto explica el término *pseudorradio* introducido para la cantidad real $C^{-\frac{1}{2}}$. De hecho, el procedimiento de Lambert está perfectamente justificado desde nuestra perspectiva más moderna, como lo veremos más adelante, y el hecho de haberlo previsto revela una gran intuición de su parte.

Sin embargo, el punto de vista convencional niega a Lambert el honor de haber construido por primera vez una geometría no euclídea, y considera que, aproximadamente medio siglo más tarde, la primera persona que llegó a una aceptación clara de una geometría completamente consistente, distinta de la de Euclides, en la que el postulado de las paralelas es falso, fue el gran matemático Carl Friedrich Gauss. Al ser un hombre muy cauteloso, y temiendo la controversia que semejante revelación pudiera causar, Gauss no publicó sus hallazgos y se los reservó para sí.

Es un tema de discusión si Gauss, que estaba profesionalmente interesado en asuntos de geodesia, podría haber tratado de averiguar realmente si hay desviaciones medibles de la geometría euclídea en el espacio físico. Debido a su bien conocida reticencia en cuestiones de geometría no euclídea, es poco probable que lo diera a conocer si en efecto estuviera tratando de hacerlo, especialmente porque (como ahora sabemos) estaba abocado al fracaso, debido a la pequeñez del efecto, según la teoría moderna. Parece que hoy día hay consenso en que él "solo estaba haciendo geodesia", al estar interesado en la curvatura de la Tierra, y no del espacio. Pero hay algo difícil de creer en que él no anduviera también buscando cualquier discrepancia importante con la geometría euclídea.

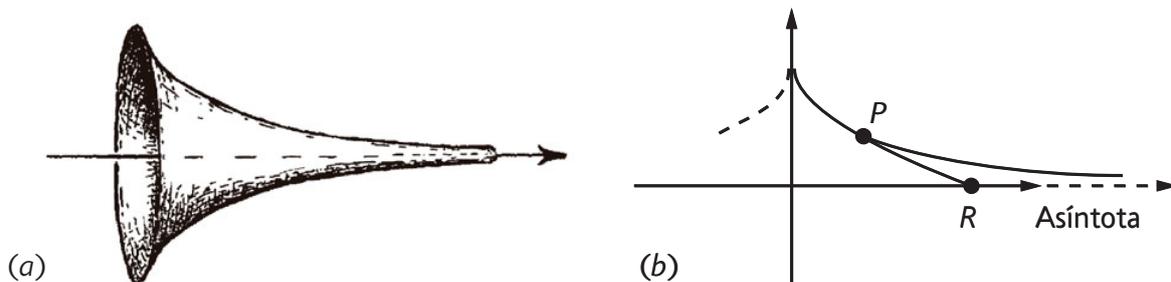
Unos treinta años después de que Gauss hubiera empezado a trabajar en ello, la geometría hiperbólica fue redescubierta de forma independiente por otros, entre ellos el húngaro János Bolyai (en 1829) y, muy en especial, el geómetra ruso Nicolái Ivánovich Lobachevski hacia 1826 (de ahí que la geometría hiperbólica sea denominada con frecuencia geometría *lobachevskiana*).

Las realizaciones concretas proyectiva y conforme de la geometría hiperbólica ya descritas fueron encontradas por Eugenio Beltrami y publicadas en 1868, junto con algunas otras elegantes representaciones que incluyen la hemisférica mencionada. No obstante, la representación conforme se conoce normalmente como el *modelo de Poincaré*, porque el redescubrimiento de esta representación que hizo en 1882 es mejor conocido que la obra original de Beltrami (básicamente debido al importante uso que hizo Poincaré de este modelo).

Análogamente, la representación proyectiva de Beltrami se denomina a veces *representación de Klein*. Es frecuente en matemática que el nombre habitualmente asociado a un concepto matemático no sea el de su autor original. Al menos, en este caso, Poincaré sí redescubrió la representación conforme (como hizo Klein con la proyectiva en 1871). Hay otros ejemplos en matemática en los que el matemático cuyo nombre está asociado a un resultado no conocía el resultado en cuestión.

Esto parece aplicarse incluso al propio Gauss (que, por otra parte, había anticipado con mucha frecuencia el trabajo de otros matemáticos). Existe un importante teorema matemático topológico conocido como *teorema de Gauss-Bonnet*, que puede demostrarse elegantemente mediante el uso de la denominada *aplicación de Gauss*, pero el propio teorema parece deberse en realidad a Wilhelm Blaschke y al elegante método de demostración de Benjamín Olinde Rodrigues (1795-1851), que fue un matemático francés mejor conocido por su fórmula para los polinomios de Legendre. Olinde Rodrigues ha sido una figura un tanto oscura en el mundo de la matemática y algunos detalles de su vida son reportados de manera diferente por distintos historiadores. Parece que Gauss y Bonnet no conocieron jamás ni el resultado ni el método de demostración.

Existe un teorema de “Gauss-Bonnet” más elemental, correctamente citado en varios textos. Tal vez por eso se dice que “una buena idea es de nadie, ya que si es así habrá alguien a quien se le ocurrió antes”. La representación de la geometría hiperbólica por la que Beltrami es más conocido es otra que él también encontró en 1868. Esta representa la geometría sobre cierta superficie conocida como una *pseudoesfera* (ver las figuras siguientes).



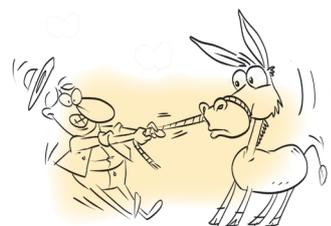
(a) Una pseudoesfera. Esta se obtiene rotando una tractriz (b) alrededor de su asíntota. Para construir una tractriz, imaginemos que su plano es horizontal, sobre el que se arrastra una varilla ligera, rígida y sin fricción. Un extremo de la varilla es un peso puntual P con fricción, y el otro extremo R se mueve a lo largo de la asíntota (recta).

Dicha superficie se obtiene rotando una *tractriz*, una curva investigada por primera vez por Isaac Newton en 1676, alrededor de su “asíntota”. La asíntota es una línea recta a la que se aproxima la curva, haciéndose asintóticamente tangente a ella cuando la curva se extiende al infinito. Aquí vamos a imaginar la asíntota dibujada en un plano horizontal de textura rugosa. Imaginemos ahora una varilla ligera, recta y rígida, uno de cuyos extremos, P , lleva unida una masa puntual pesada, y el otro extremo R se mueve a lo largo de la asíntota.

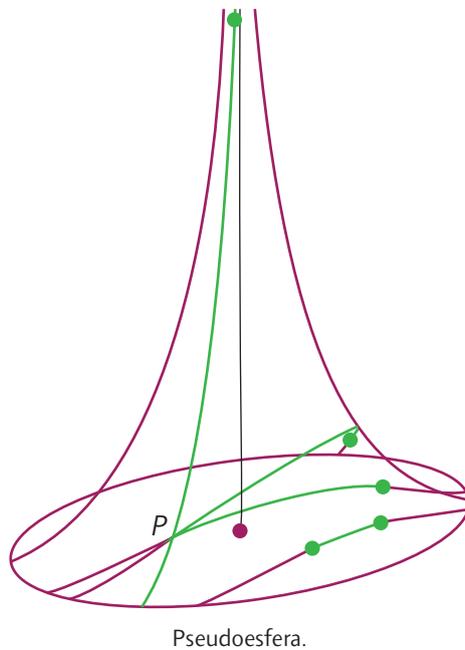
El punto P describe entonces una tractriz. Ferdinand Minding descubrió, en 1839, que la pseudoesfera tiene una geometría intrínseca negativa constante. Ernst Ferdinand Adolf Minding fue un matemático germano-ruso conocido por sus contribuciones a la geometría diferencial. Continuó el trabajo de Carl Friedrich Gauss sobre geometría diferencial de superficies, especialmente en sus aspectos intrínsecos. Beltrami utilizó esto para construir el primer modelo de geometría hiperbólica. Parece que su modelo de la pseudoesfera fue el que convenció a los matemáticos de la consistencia de la geometría hiperbólica plana, puesto que la medida de la distancia hiperbólica coincide con la distancia euclídea a lo largo de la superficie. Sin embargo, es un modelo algo complicado porque representa a la geometría hiperbólica solo localmente, en lugar de presentar toda la geometría de una vez, como hacen los otros modelos de Beltrami.

¿RELACIÓN CON EL ESPACIO FÍSICO?

La geometría hiperbólica también funciona perfectamente en dimensiones más altas. Más aún, existen versiones de dimensión superior de los modelos conforme y proyectivo. En el caso de la geometría hiperbólica tridimensional, tenemos una esfera frontera en lugar de un círculo frontera. Toda la geometría hiperbólica tridimensional infinita está representada por el interior de esta esfera euclídea finita. El resto es básicamente igual a lo que teníamos antes.



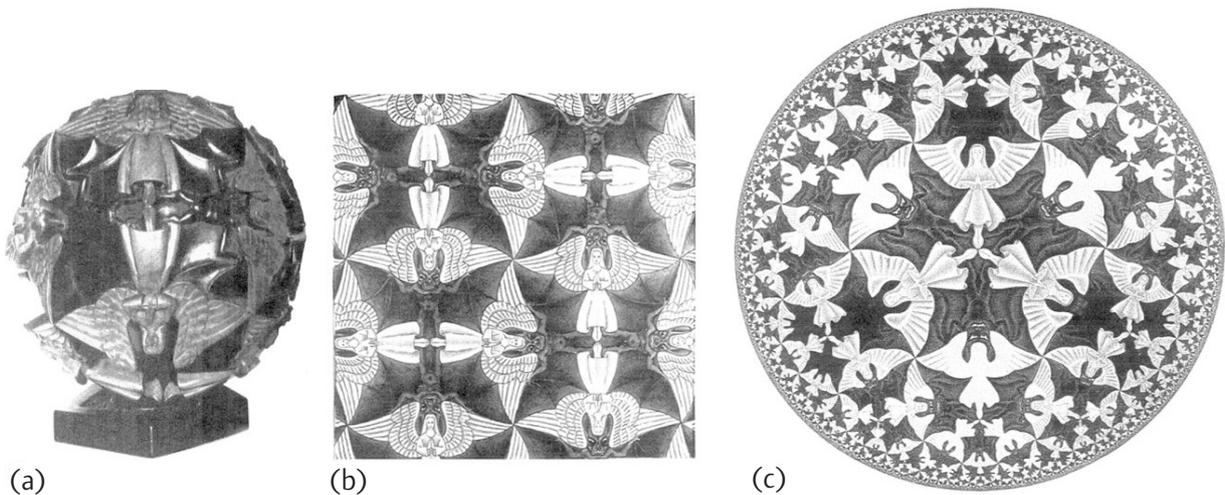
En el modelo conforme, las líneas rectas en esta geometría hiperbólica tridimensional se representan como círculos euclídeos que cortan ortogonalmente a la esfera frontera; los ángulos vienen dados por las medidas euclídeas, y las distancias vienen dadas por la misma fórmula que en el caso bidimensional. En el modelo proyectivo, las líneas rectas hiperbólicas son líneas rectas euclídeas, y las distancias vienen dadas de nuevo por la misma fórmula que en el caso bidimensional.



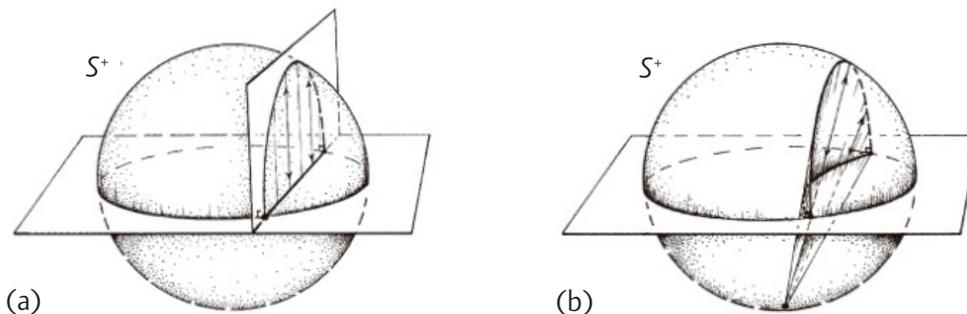
¿Qué pasa con nuestro universo real a escalas cosmológicas? ¿Esperamos que su geometría espacial sea euclídea, o podría estar en mejor acuerdo con alguna otra geometría, tal como la extraordinaria geometría hiperbólica (aunque en tres dimensiones) que hemos estado examinando? Esta es una cuestión realmente importante. Sabemos por la relatividad general de Albert Einstein que la geometría euclídea es solo una aproximación (extraordinariamente precisa) a la geometría real del espacio físico. Dicha geometría no es ni siquiera exactamente uniforme, al tener pequeños rizos de irregularidad debidos a la presencia de densidad de materia. Pese a todo, y de forma notable, de acuerdo con la mejor evidencia observacional de que hoy disponen los cosmólogos, estos rizos parecen promediarse, en escalas cosmológicas, hasta un grado extraordinariamente preciso, y la geometría espacial de nuestro universo real parece concordar extraordinariamente bien con una geometría uniforme. Parece que al menos los cuatro primeros postulados de Euclides han superado de forma impresionante la prueba del tiempo.

Aquí es necesario hacer un comentario aclaratorio. Básicamente existen tres tipos de geometría que satisfarían las condiciones de homogeneidad (todos los puntos son iguales) e isotropía (todas las direcciones son iguales), que se conocen como euclídea, hiperbólica y elíptica. La geometría euclídea nos es familiar (y lo ha sido durante unos veintitrés siglos).

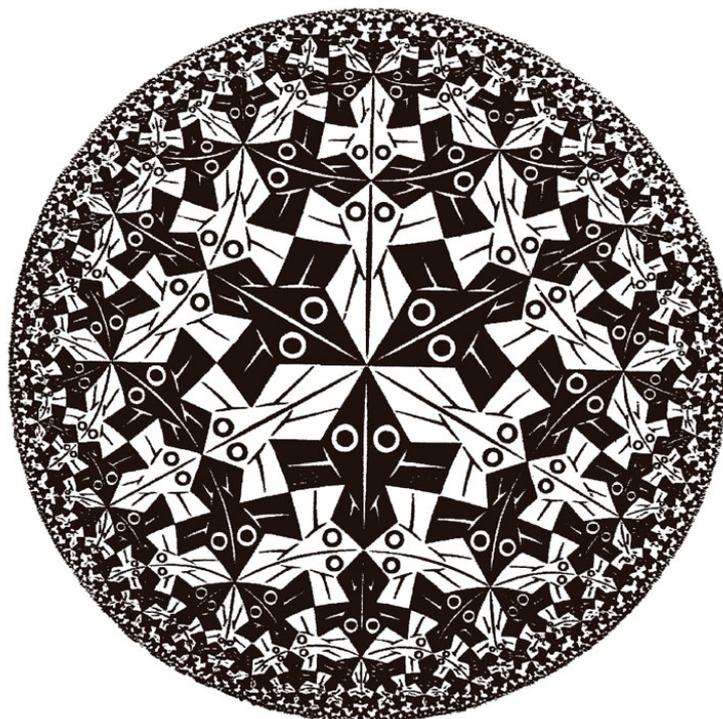
La geometría hiperbólica ha constituido nuestro interés principal en esta parte. Pero ¿cuál es la geometría elíptica? Esencialmente, la geometría elíptica plana es la satisfecha por figuras dibujadas en la superficie de una esfera. Apareció en la discusión de la aproximación de Lambert a la geometría hiperbólica. Véanse las figuras siguientes



Los tres tipos básicos de geometría plana uniforme, tal como son ilustrados por Escher utilizando teselaciones de ángeles y demonios. (a) Caso elíptico (curvatura positiva); (b) Caso euclídeo (curvatura cero), y (c) Caso hiperbólico (curvatura negativa), en la representación conforme (*Límite circular IV* de Escher, que debe compararse con las figuras ya analizadas).



para la interpretación de Escher de los casos elíptico, euclídeo e hiperbólico, respectivamente, utilizando en los tres casos una teselación similar de ángeles y demonios, la tercera de las cuales ofrece una alternativa interesante, como muestra la siguiente figura.



Existe también una versión tridimensional de la geometría elíptica y hay versiones en las que se considera que puntos diametralmente opuestos de la esfera representan el mismo punto. Estas cuestiones se examinarán más adelante. Sin embargo, podría decirse que el caso elíptico viola los postulados segundo y tercero de Euclides (además del primero). En efecto, se trata de una geometría que es finita en extensión y en la que más de un segmento de línea une un par de puntos.

¿Cuál es, entonces, el estatus observacional de la geometría espacial a gran escala del universo? Solo se puede decir que todavía no lo sabemos, aunque recientemente se ha dado gran publicidad a afirmaciones de que la geometría de Euclides era correcta en todos los niveles, y que su quinto postulado también se cumple, de modo que la geometría espacial promediada es la que llamamos *euclídea*. La evidencia principal respecto de la estructura global del universo como un todo procede de un análisis detallado de la radiación cósmica de fondo de microondas.

Por otra parte, existe también evidencia (parte de la cual procede de los mismos experimentos) que parece apuntar firmemente a una geometría global hiperbólica para el universo espacial. Además, algunos teóricos han argumentado hace tiempo a favor del caso elíptico, y este no está desde luego descartado por la propia evidencia que se aporta en apoyo del caso euclídeo. Como se ve, la cuestión está todavía llena de controversia y, como cabría esperar, de discusiones con frecuencia acaloradas.

En lo que sigue, trataremos de presentar muchas de las ideas que se han propuesto en relación con esto y con Roger Penrose opinaremos a favor del caso hiperbólico, aunque tratando de ser tan justos como sea posible respecto de los otros.

Por fortuna para aquellos que se sienten atraídos por las bellezas de la geometría hiperbólica, y también por la magnificencia de la física moderna, existe otro papel para esta soberbia geometría que es indiscutiblemente fundamental para nuestra moderna comprensión del universo físico.

En efecto, según la moderna teoría de la relatividad, el espacio de *velocidades* es ciertamente una geometría hiperbólica tridimensional, en lugar de la euclídea que sería válida en la más antigua teoría newtoniana. Esto nos ayuda a entender algunos de los enigmas de la relatividad. Imaginemos, por ejemplo, un proyectil lanzado hacia delante, con velocidad cercana a la de la luz, desde un vehículo que también se mueve hacia delante con una velocidad comparable y pasa frente a un edificio. Pese a todo, con relación a dicho edificio, el proyectil nunca puede superar la velocidad de la luz. Aunque esto parece imposible, veremos más adelante que encuentra una explicación directa en términos de geometría hiperbólica. Pero estas materias fascinantes deben esperar hasta avanzar en las ideas sobre el espacio físico.

¿Qué pasa con el teorema de Pitágoras, cuyo fallo hemos visto en la geometría hiperbólica? ¿Debemos abandonar el mayor de los regalos concretos que hicieron los pitagóricos a la posteridad? En absoluto, pues la geometría hiperbólica –y, de hecho, todas las geometrías “riemannianas” que generalizan la geometría hiperbólica de una manera irregularmente curvada (que forma el marco esencial de la teoría de la relatividad general de Einstein)– depende vitalmente de la validez del teorema de Pitágoras en el límite de pequeñas distancias. Además, su enorme influencia impregna otras vastas áreas de la matemática y la física (por ejemplo, la estructura métrica *unitaria* de la mecánica cuántica).

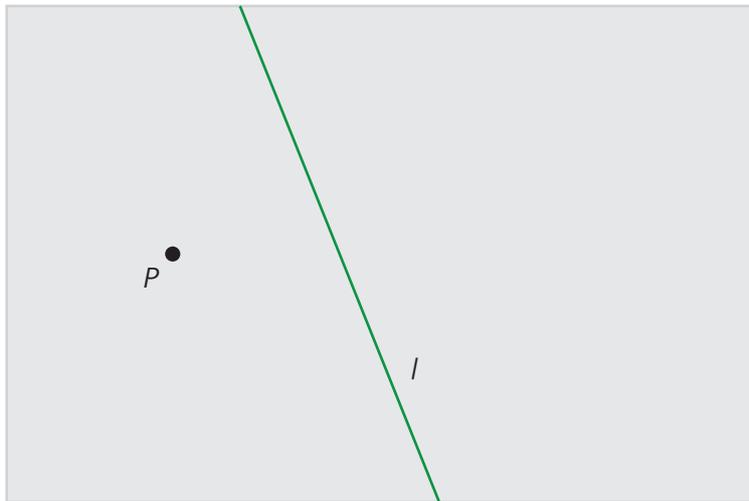
A pesar de que este teorema es, en cierto sentido, reemplazado para “grandes” distancias, sigue siendo central para la estructura a pequeña escala de la geometría, encontrando un rango de aplicación que supera muchísimo a aquel para el que fue propuesto originalmente.



Pague uno lleve tres

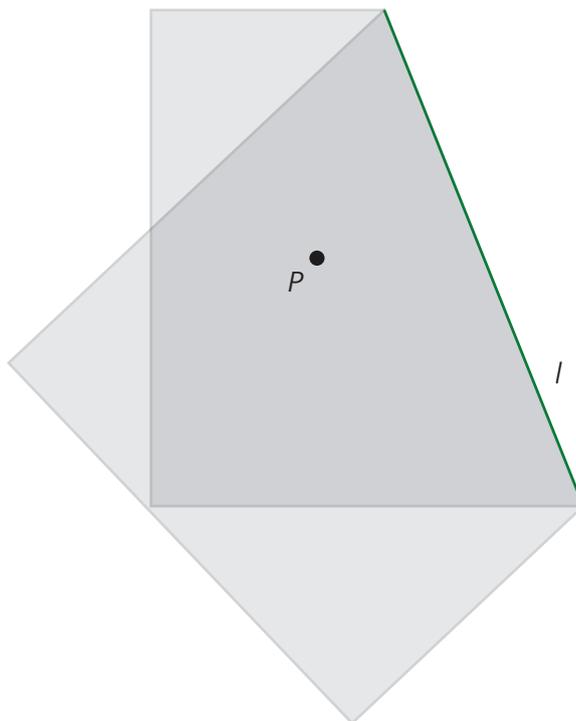
En una hoja de papel está trazada una recta l y marcado un punto P .

- i) Indicar cómo marcar el punto simétrico de P respecto de la recta l , usando solo un alfiler.
- ii) Trazar la recta perpendicular a l que pasa por P , usando el alfiler, un lápiz y una regla.
- iii) Hallar en l el punto más próximo a P .



Solución

- i) Plegamos la hoja a lo largo de la recta l de modo que el punto P permanezca visible, tal como se muestra en la siguiente figura.

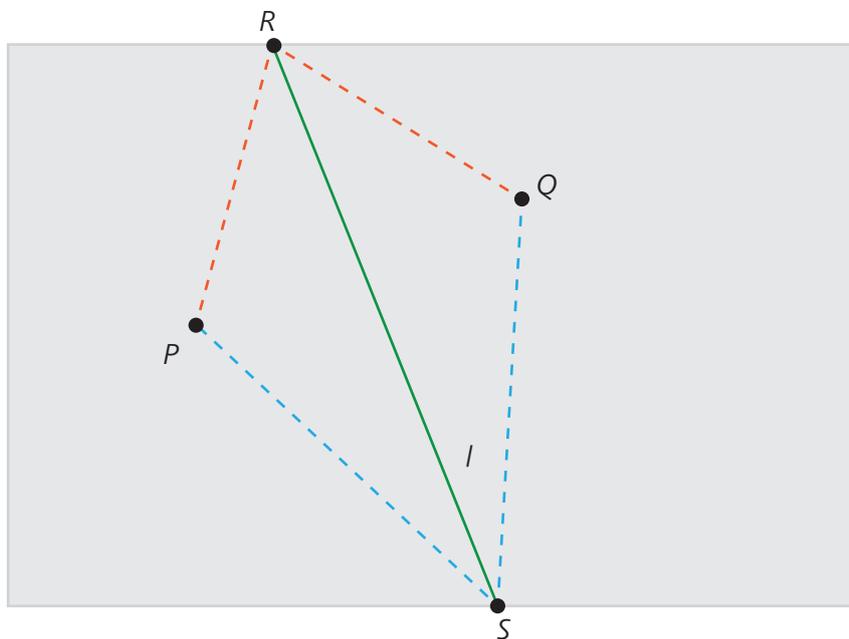


Con la punta del alfiler sobre el punto P , atravesamos los pliegues de la hoja.

Si desplegamos la hoja, quedará la marca del orificio realizado con el alfiler, el que indicamos como el punto Q .



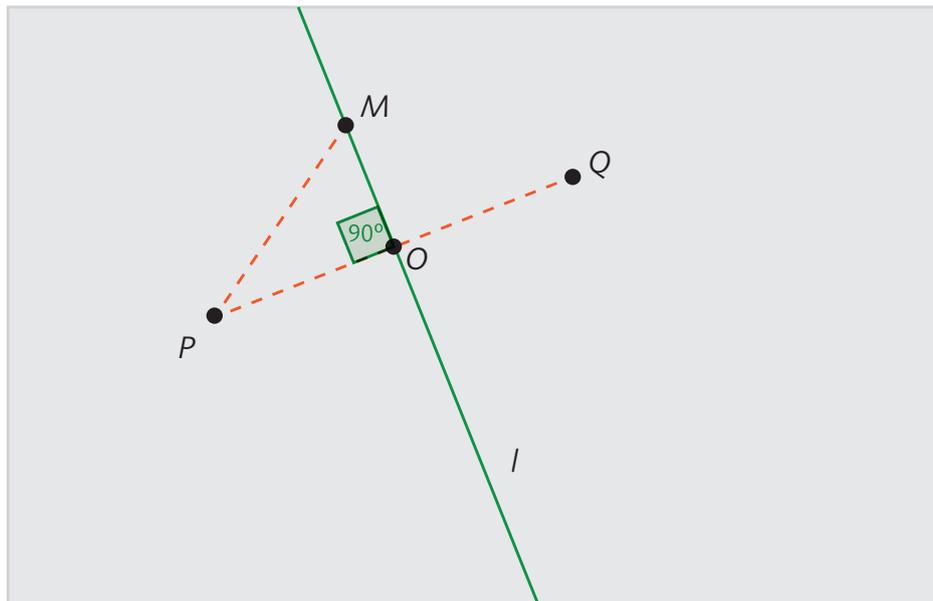
Que Q sea el punto simétrico de P respecto de la recta l significa que l es la mediatriz del segmento PQ . Esto es así porque los puntos R y S indicados en la siguiente figura equidistan de P y Q .



Si volviéramos a plegar la hoja, como antes, el segmento QR caería sobre el segmento PR y el segmento QS caería sobre el segmento PS . Entonces $QR = PR$ y $QS = PS$, de modo que l es la mediatriz del segmento PQ .

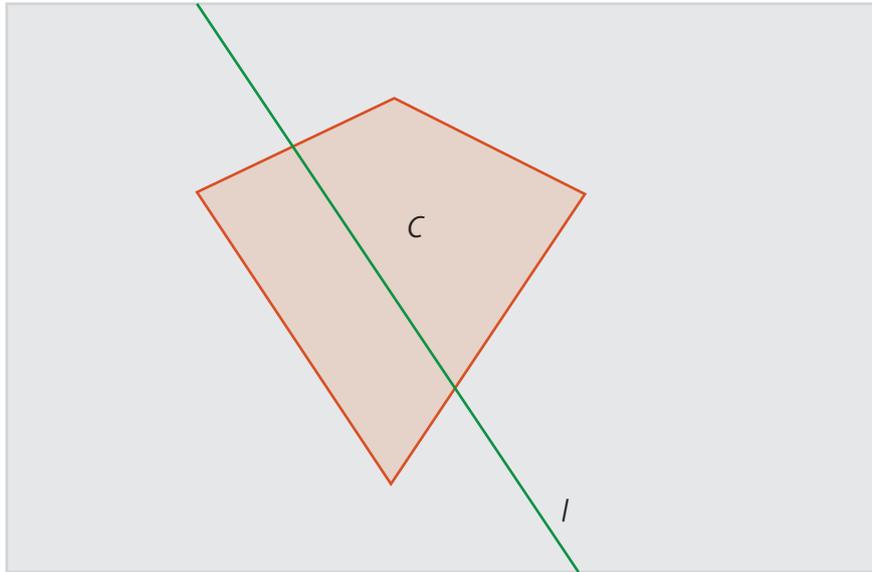
- ii) Por ser l la mediatriz de PQ , la recta que une P con Q es perpendicular a l .

iii) El punto O en la intersección de l con el segmento PQ es el punto de la recta más próximo a P .



Notar que para cualquier punto M en l , distinto de O , PM es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene a PO y OM como catetos.

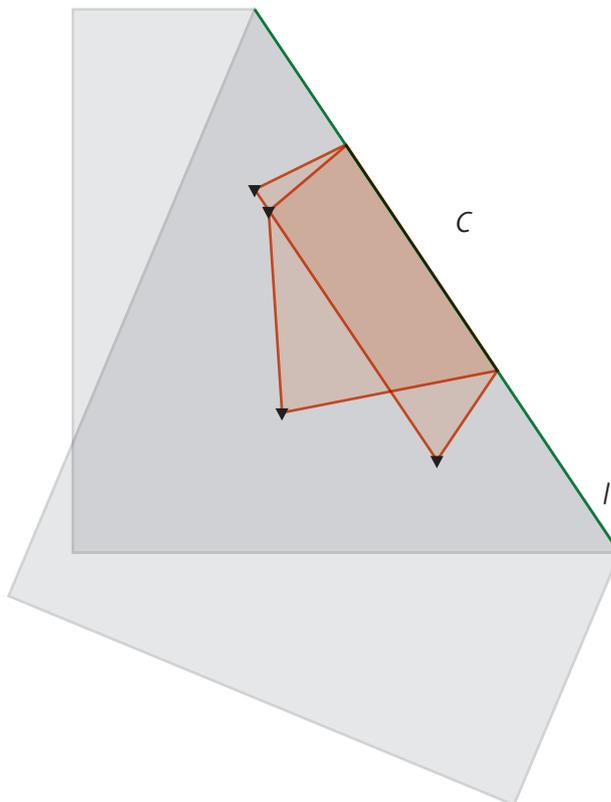
En la hoja de papel se trazó una recta l y se dibujó un cuadrilátero C , tal como muestra la figura.



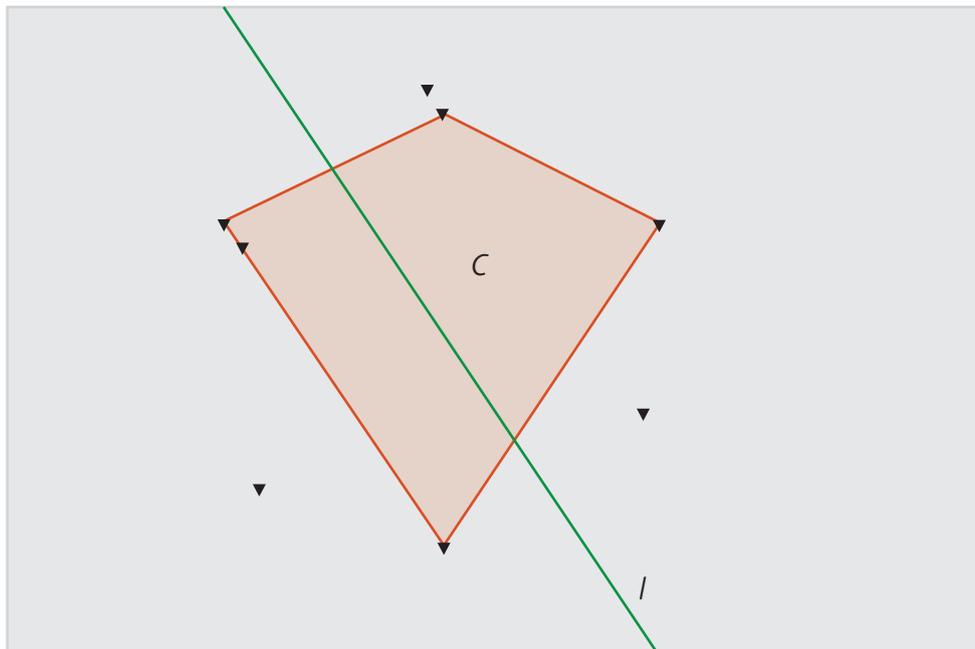
Usando una regla, un lápiz y un alfiler, dibujar el cuadrilátero simétrico de C respecto de l .

Solución

Plegamos la hoja de papel a lo largo de la recta l de modo que el cuadrilátero quede visible. Con el alfiler perforamos los pliegues sobre cada vértice del cuadrilátero.



Desplegamos la hoja y veremos las perforaciones, que serán los vértices de cuadrilátero simétrico de C respecto de l .



Solo resta unir los puntos en las perforaciones usando la regla y el lápiz.

