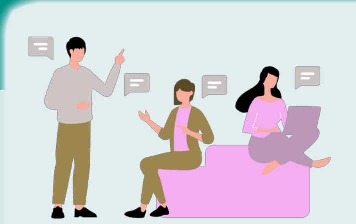
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

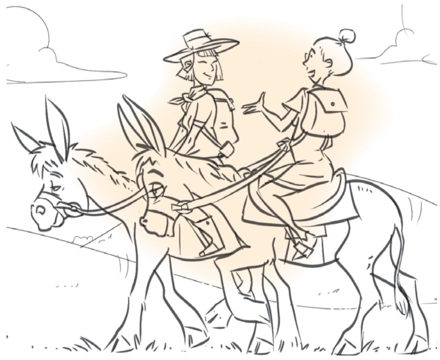
7ª época ● Nº 6 ● 5 de junio de 2025



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Continúa de *Leñitas geométricas* 7ª época Nº 4, Capítulo "Sistemas de números", Apartado "Segmentos inconmensurables..."

4. Números racionales y decimales periódicos

Aquellos números racionales p/q que no son fracciones decimales finitas pueden ser desarrollados en fracciones decimales indefinidas mediante el proceso de división decimal. En cada paso de este proceso debe haber un resto distinto de cero, ya que de otro modo la fracción decimal sería finita. Todos los restos distintos que aparecen en la división son enteros comprendidos entre 1 y $q-1$, de manera que hay solamente $q-1$ posibilidades para sus valores. Esto significa que al cabo de q cifras decimales, a lo sumo, algún resto k deberá repetirse. Pero todos los restos siguientes se repetirán en el mismo orden en que aparecían después de este primer resto k.

Esto prueba que la expresión decimal de cualquier número racional es periódica; una vez aparecido un cierto conjunto finito de cifras, dicho conjunto se repetirá infinitas veces; por ejemplo, $\frac{1}{6}=0{,}166666666\ldots$; $\frac{1}{7}=0{,}142857142857142857\ldots$; $\frac{1}{11}=0{,}0909090909\ldots$; $\frac{122}{1100}=0{,}1109090909\ldots$; $\frac{11}{90}=0{,}12222222\ldots$; etc. **(Cabe considerar que los números racionales que pueden ser representados mediante fracciones decimales finitas tienen un desarrollo decimal periódico en el cual la cifra 0 se repite indefinidamente después de un número finito de cifras.)** En algunos ejemplos anteriores se ve incidentalmente que ciertos desarrollos tienen una parte no periódica, que precede al periodo que se repite.

Recíprocamente, se puede probar que todos los decimales periódicos son números racionales. Como ejemplo, consideremos el decimal periódico indefinido

$$p=0{,}3322222\ldots$$

Se tiene $p=\frac{33}{100}+10^{-3}\cdot 2\left(1+10^{-1}+10^{-2}+\ldots\right)$, en donde los términos entre paréntesis constituyen la serie geométrica

$$1+10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+10^{-4}+\ldots=\frac{1}{1-1/10}=\frac{10}{9}.$$

Por tanto,

$$p=\frac{33}{100}+2\cdot 10^{-3}\cdot\frac{10}{9}=\frac{2970+20}{9\cdot 10^{3}}=\frac{2990}{9000}=\frac{299}{900}.$$

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

La demostración en el caso general es esencialmente la misma, pero requiere una notación más general. En el decimal periódico general

$$p = 0,a_1a_2a_3\ldots\, a_m b_1 b_2 \ldots\, b_n b_1 b_2 \ldots\, b_n b_1 b_2 \ldots\, b_n \ldots$$

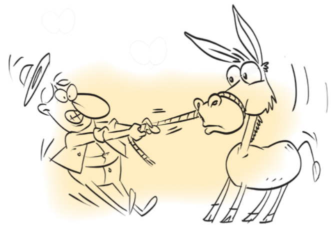
pongamos $0,b_1b_2 \ldots b_n = B$, de manera que B represente la parte periódica del decimal. Entonces, p puede escribirse así:

$$p = 0,a_1a_2 \ldots a_m + 10^{-m}B(1 + 10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \ldots).$$

La expresión entre paréntesis es una serie geométrica con $q = 10^{-n}$; su suma, de acuerdo con la ecuación (10) dada anteriormente (ver *Leñitas Geométricas* 7ª época, Nº 4, p. 12), es $1/(1 - 10^{-n})$, y, por tanto, se tiene

$$p = 0,a_1a_2 \ldots a_m + \frac{10^{-m}B}{1-10^{-n}}.$$

Ejercicios para fijar ideas



1. Desarróllense las fracciones $\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{1}{17}, \frac{2}{17}$ en fracciones decimales y determínese el periodo.
2. El número 142 857 tiene la propiedad de que, multiplicado por cualquiera de los números 2, 3, 4, 5 o 6, da otro que tiene las mismas cifras en diferente orden. Justifíquese esta propiedad, utilizando el desarrollo de 1/7 en fracción decimal.
3. Desarróllense los números racionales del ejercicio 1 como fracciones *decimales* en los sistemas de numeración de bases 5, 7 y 12.
4. Desarróllese 1/3 como número *diádico*.
5. Escríbase 0,11212121... como fracción *ordinaria*. Hállese el valor de dicho símbolo en los sistemas de numeración de base 3 o 5.

5. Determinación general de los números irracionales mediante encajes de intervalos

Adoptamos como definición provisional la siguiente: un *número* es un *decimal finito o infinito*, y conveníamos en que aquellos decimales infinitos que no correspondían a números racionales serían llamados *números irracionales*. Sobre la base de los resultados de la sección precedente podemos ahora formular esta definición en la siguiente forma: el *continuo numérico*, o *sistema de números reales* ("reales" en oposición a los números "imaginarios" o "complejos" que introduciremos formalmente más adelante) es la *totalidad de los decimales infinitos*. Los decimales finitos quedan considerados como un caso especial de los infinitos: aquel en que todas las cifras a partir de una de ellas son ceros; otra manera de considerarlos será la de reemplazar la última cifra a por $a - 1$ y hacerla seguir de una infinidad de cifras todas iguales a 9.

Esto expresa el hecho de que 0,9999… = 1, de acuerdo con el punto 3 (ver *Leñitas Geométricas* 7ª época, Nº 4, p. 12). Los números *racionales* son los decimales *periódicos*; los números *irracionales* son los decimales *no-periódicos*. Sin embargo, esta definición no es aún plenamente satisfactoria, puesto que, como hemos visto anteriormente, el sistema decimal no se diferencia de los de otras bases por propiedades intrínsecas del sistema de números.

En consecuencia, podíamos muy bien haber seguido los razonamientos de las secciones precedentes utilizando el sistema diádico u otro cualquiera. Por esta razón es de desear una definición más general del continuo numérico, independiente de especiales referencias al sistema de base diez. Quizá la más sencilla sea la siguiente.

Consideremos una sucesión cualquiera de intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ de la recta numérica, cuyos extremos sean puntos racionales, cada uno de los cuales esté contenido en el precedente, y tal que la longitud del intervalo n–ésimo I_n tienda a cero al crecer n. A una tal sucesión la llamaremos *sucesión de intervalos encajados* o *encaje de intervalos*. En el caso de intervalos decimales, la longitud de I_n era 10^{-n}; pero en el caso general puede ser muy bien 2^{-n} o estar simplemente sujetos a la restricción de ser menores que $1/n$.

En estas condiciones vamos a formular un postulado fundamental en geometría:

en correspondencia con cada sucesión de intervalos encajados existe precisamente un punto de la recta numérica que está contenido en todos los intervalos. (Se ve directamente que no puede haber más de un punto común a todos los intervalos, puesto que las longitudes de estos tienden a cero y dos puntos no pueden estar contenidos en un intervalo de longitud menor que su distancia.)

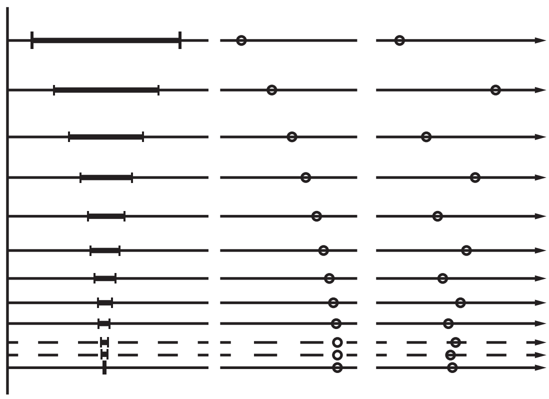
El punto a que se refiere el postulado es por definición un *número real*; si no es un punto racional, se dice que es un *número irracional*.

Mediante esta definición establecemos una correspondencia perfecta entre puntos y números. Con ella damos una formulación más general a lo que expresábamos con la definición que utilizaba los decimales infinitos. Al llegar a este punto quizá sentimos inquietud por una duda completamente legitima: ¿cuál es el "punto" de la recta numérica que hemos supuesto pertenecía a todos los intervalos de la sucesión, en el caso de que no se trate de un punto racional?

Nuestra respuesta es: la existencia, en la recta numérica, de un punto contenido en cualquier encaje de intervalos cuyos extremos sean puntos racionales es un *postulado fundamental de la geometría*. Por tanto, no es precisa la reducción lógica de esta proposición a otros hechos matemáticos. La aceptamos, lo mismo que aceptamos otros axiomas o postulados de la matemática, a causa de que es plausible de modo intuitivo, y también en virtud de su utilidad para la construcción de un sistema no contradictorio del proceso matemático.

Desde un punto de vista puramente formal se podía haber partido de una recta constituida únicamente por puntos racionales y luego definir como punto irracional un símbolo que representa determinadas sucesiones de intervalos racionales encajados. Un punto irracional queda así perfectamente determinado por la sucesión de intervalos en cuestión. Resulta, por tanto, que nuestro postulado equivale a una definición.

Establecer esta definición después de haber llegado a los encajes de intervalos racionales, gracias al sentimiento intuitivo de que los puntos irracionales "existen", equivale a prescindir de los apoyos intuitivos con los que nuestro razonamiento está acostumbrado a proceder y darse cuenta de que todas las propiedades matemáticas de los puntos irracionales pueden venir expresadas como propiedades de los encajes de intervalos racionales.



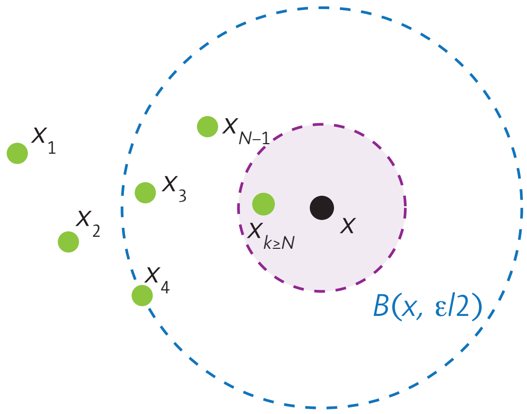
Encaje de intervalos. Límites de sucesiones.

Tenemos aquí un ejemplo típico de la posición filosófica descrita en la introducción de este tema; prescindir del ingenuo punto de vista "realista", que considera los objetos matemáticos como cosas en sí de las cuales pretendemos modestamente determinar las propiedades, y, en cambio, comprobar que el único modo de existir de los objetos matemáticos que nos importa reside en sus propiedades matemáticas y en las relaciones que los ligan. Estas propiedades y relaciones agotan todos los aspectos posibles bajo los cuales puede intervenir un objeto en el mundo de la actividad matemática.

Dejamos de lado la "cosa en sí" matemática, del mismo modo que los físicos dejan de lado el inobservable éter; este es el significado de la definición intrínseca de un *número irracional* como *encaje de intervalos racionales*. La cuestión matemática importante a este respecto es la de que para los números irracionales así definidos, se pueden generalizar de modo inmediato las operaciones de adición, multiplicación, etc., y las relaciones de "menor que" y "mayor que" establecidas para los números racionales, siendo dicha generalización de tal naturaleza que las reglas y leyes válidas para los números racionales se conservan para los nuevos números; por ejemplo, la adición de dos números irracionales α y β puede venir dada por medio de los dos encajes de intervalos que sirvieron para definir α y β.

Se construye una tercera sucesión de intervalos encajados sumando los valores de los orígenes y los de los extremos de los intervalos correspondientes a los dos encajes que definen α y β y la nueva sucesión de intervalos encajados define $\alpha + \beta$. Análogamente, se pueden definir el producto $\alpha \cdot \beta$, la diferencia $\alpha - \beta$ y el cociente α/β. Sobre la base de estas definiciones se prueba que las leyes aritméticas que discutimos anteriormente continúan siendo válidas para los números irracionales. Sin embargo, no daremos aquí los detalles de tales demostraciones.

La comprobación de las leyes anteriores es simple y fácil, aunque resulta a veces enojosa para el principiante, que desea más bien aprender la matemática como instrumento que analizar sus fundamentos lógicos. Algunos de los textos modernos de matemática repelen a numerosos estudiantes, debido a que comienzan con un análisis completo del sistema de los números reales, análisis que resulta un poco pedante. El que prescinde simplemente de esa introducción procede con el mismo espíritu con que, hasta fines del siglo XIX, hicieron sus descubrimientos los más grandes matemáticos sobre la base del concepto “ingenuo” del sistema numérico que les proporcionaba su intuición.



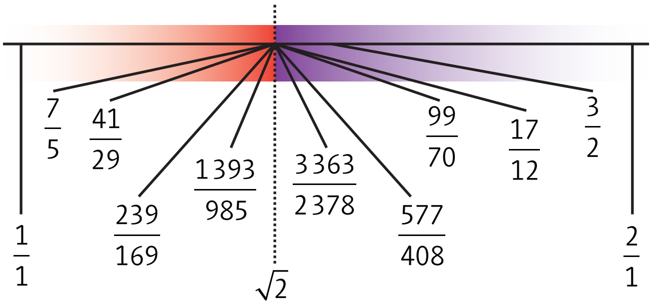
Representación gráfica.

Desde el punto de vista físico, la definición de un número irracional mediante un encaje de intervalos corresponde a la determinación de una cantidad observable por una sucesión de medidas de aproximación creciente. Toda operación de determinación, por ejemplo, de una longitud, tiene significación práctica dentro de los límites de un cierto error posible, error que mide la precisión de la operación. Puesto que los números racionales forman un conjunto denso en la recta, resulta imposible determinar para toda operación física, cualquiera que sea su precisión, si una longitud dada es racional o irracional. De aquí podría parecer que los números irracionales son superfluos para una adecuada descripción de los fenómenos físicos; sin embargo, como veremos más claramente, la ventaja efectiva que la introducción de los números irracionales aporta a la descripción matemática de los fenómenos físicos es la de que dicha descripción se simplifica de modo notable, gracias a la posibilidad de utilizar libremente el concepto de límite, para el cual es fundamental el continuo numérico.

Representación gráfica.

6. Otros métodos de definición de números irracionales. Cortaduras de Dedekind

Otra manera de definir los números irracionales fue dada por Richard Dedekind (1831-1916), uno de los grandes iniciadores del análisis lógico y filosófico de los fundamentos de la matemática. Sus obras *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872) y *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1887) ejercieron una profunda influencia en los estudios sobre los fundamentos de la matemática. Dedekind prefería operar con ideas generales abstractas a hacerlo con sucesiones determinadas de encajes de intervalos. Su método está basado en la definición de "cortadura" que vamos a exponer brevemente.



Representación gráfica.

Supongamos que se ha dado un cierto método para dividir el conjunto de todos los números racionales en dos clases, A y B, tales que todo número b de la clase B es mayor que todo elemento a de la clase A. Toda clasificación de este tipo se llama una *cortadura* en el campo de los números racionales. Para una cortadura hay precisamente tres posibilidades, que se excluyen mutuamente:

1) *Hay en A un elemento máximo a^**. Este es, por ejemplo, el caso cuando A está formada por todos los números racionales ≤ 1 y B, por todos los números racionales > 1.

2) *Hay en B un elemento mínimo b^**. Así sucede, por ejemplo, si A está constituida por todos los números racionales < 1 y B, por todos los números racionales ≥ 1.

3) *No hay elemento máximo en A ni elemento mínimo en B*. Se tiene, en particular, este caso cuando A está formada por todos los números racionales negativos, el 0, y todos los números racionales positivos cuyo cuadrado es menor que 2, y B por todos los números racionales positivos cuyo cuadrado es mayor que 2. A y B, reunidas, comprenden todos los números racionales, puesto que hemos probado que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.

El caso en que A tuviera un elemento máximo a^* y B un elemento mínimo b^* es imposible, puesto que en dicho caso el número racional $(a^* + b^*)/2$, que está comprendido entre a^* y b^*, sería mayor que el elemento máximo de A y más pequeño que el elemento mínimo de B, y no pertenecería a ninguna de las dos clases.

En el tercer caso, aquel en el que no hay elemento máximo en A ni elemento mínimo en B, la cortadura, según Dedekind, define o simplemente es un número irracional. Es fácil ver que esta definición concuerda con la dada mediante encajes de intervalos; cualquier sucesión $I_1, I_2, I_3, \ldots$ de intervalos encajados define una cortadura, si colocamos en la clase A todos los números racionales que son menores que el origen de al menos uno de los intervalos I_n, y en B todos los demás números racionales.

Representación gráfica.

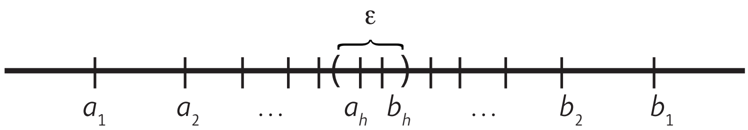
Desde un punto de vista filosófico, la definición de Dedekind de números irracionales representa un mayor grado de abstracción, puesto que no impone restricción alguna a la ley matemática que define las dos clases A y B.

Un método más concreto de definir el continuo numérico real se debe a Georg Cantor (1845-1918). Aunque a primera vista parece completamente diferente del método de los encajes de intervalos y del de las cortaduras, en realidad es equivalente a ambos, en el sentido de que los sistemas numéricos definidos de las tres maneras gozan de las mismas propiedades. La idea de Cantor aparece sugerida por los dos hechos siguientes:

1) los números reales pueden considerarse como decimales de infinitas cifras, y

2) los decimales infinitos son límites de fracciones decimales finitas.

Prescindiendo de la dependencia del sistema decimal se puede decir, siguiendo a Cantor, que toda sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números racionales define un *número real* si dicha sucesión *converge*.



Representación gráfica.

La convergencia significa que la diferencia $(a_m - a_n)$ entre dos números cualesquiera de la sucesión tiende a cero cuando a_m y a_n ocupan lugares suficientemente avanzados en la sucesión; es decir, cuando m y n tienden a infinito. (Las sucesivas aproximaciones decimales de todo número gozan de dicha propiedad, puesto que dos números posteriores al n –ésimo difieren en menos de 10^{-n}.)

Dado que existen muchas formas de aproximarse al mismo número real mediante sucesiones de números racionales, diremos que dos sucesiones convergentes de números racionales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ definen el mismo número real si $a_m - b_n$ tiende a cero cuando n crece indefinidamente. Es fácil definir, para tales sucesiones, las operaciones de adición, multiplicación, etcétera.

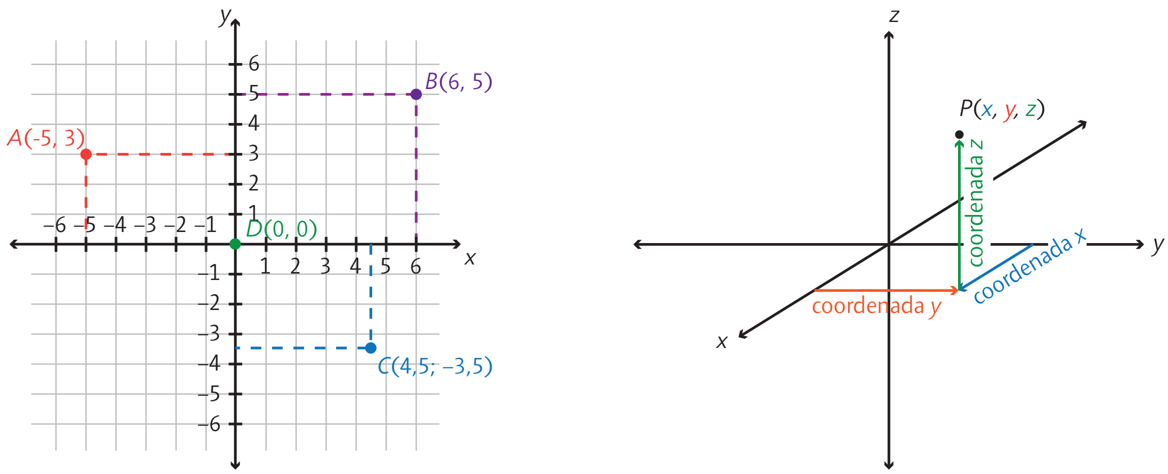
OBSERVACIONES SOBRE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. El principio fundamental

El continuo numérico, aceptado como cosa inmediata o bien después de un examen crítico, ha constituido la base de la matemática y, en particular, de la geometría analítica y del cálculo, desde el siglo XVII. La introducción del continuo numérico hace posible asociar a cada segmento rectilíneo un determinado número real que da su longitud. Pero aún se puede ir más lejos: no solo las longitudes, sino también todo objeto geométrico y toda operación geométrica, pueden ser referidos al reino de los números.

Los pasos decisivos en esta aritmetización de la geometría fueron dados por Pierre de Fermat (1601-1655) en 1629 y por René Descartes (1596-1650) en 1637. La idea fundamental de la geometría analítica es la introducción de *coordenadas*; esto es, de *números ligados o coordinados con un objeto geométrico* y que lo caracterizan completamente. La mayor parte de nosotros conocemos, sin duda, las llamadas *coordenadas cartesianas rectangulares*, que sirven para caracterizar la posición de un punto P en un plano. Se parte de dos rectas fijas perpendiculares del plano, el "eje x" y el "eje y", a las que se refiere todo punto.

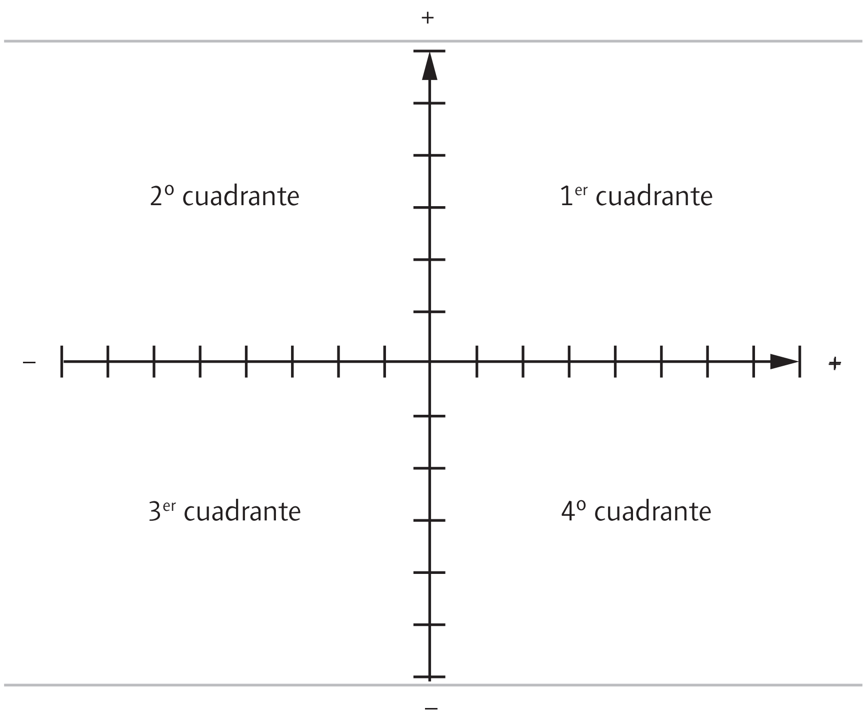
Estas rectas se consideran como rectas numéricas orientadas y se miden con la misma unidad. A cada punto P, como muestran las siguientes figuras,



Sistemas de coordenadas en el plano (izquierda) y en el espacio (derecha).

se le asignan dos o tres coordenadas x e y, o x, y, z. Estos números se obtienen de la siguiente forma: consideremos el segmento dirigido desde el "origen" O al punto A, y proyectemos este segmento orientado, que a veces se llama *vector de posición de P*, perpendicularmente sobre los dos o tres ejes; de este modo se obtiene el segmento orientado OP' sobre el eje x, con el número x como medida de su longitud orientada a partir de O; y del mismo modo el segmento orientado sobre el eje y y el eje z, con el número y como medida de su longitud orientada a partir de O. Los dos números x, y son las *coordenadas* de P.

Recíprocamente: si x, y son dos números arbitrarios dados, el punto P correspondiente está unívocamente determinado. Si x, y son los dos positivos, P está en el primer cuadrante del sistema de coordenadas; si los dos son negativos, P está en el tercer cuadrante;

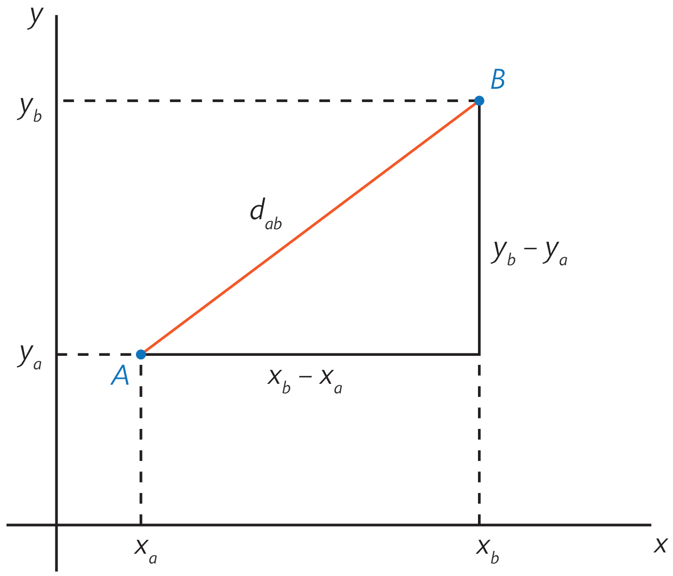


Ubicación de los cuatro cuadrantes.

si x es positivo e y negativo, P estará en el cuarto cuadrante y, finalmente, si x es negativo e y positivo, P se hallará en el segundo cuadrante. La distancia entre el punto P_1 de coordenadas x_1, y_1 y el punto P_2, de coordenadas x_2, y_2, viene dada por la fórmula

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad (1)$$

la cual se obtiene inmediatamente por el teorema de Pitágoras, como resulta de la figura siguiente.



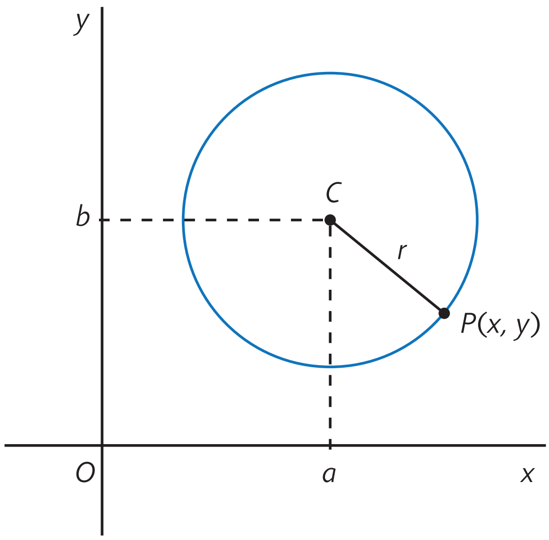
Distancia entre dos puntos A y B.

2. Ecuaciones de rectas y curvas

Si C es un punto fijo de coordenadas $x = a$, $y = b$, el lugar de todos los puntos P que están a una distancia r dada de C es una circunferencia con centro C y radio r. De la fórmula (1) anterior, que da la distancia entre dos puntos, resulta que los puntos de dicha circunferencia tienen coordenadas x, y que satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \qquad (2)$$

Esta es la llamada *ecuación de la circunferencia*, ya que expresa la condición completa (necesaria y suficiente) que han de cumplir las coordenadas x, y de un punto P para estar sobre la circunferencia de centro C y radio r.



La circunferencia.

Si se desarrollan los paréntesis de (2), dicha ecuación toma la forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k, \qquad (3)$$

donde $k = r^2 - a^2 - b^2$. Recíprocamente: si se tiene una ecuación de la forma (3), siendo a, b, k constantes arbitrarias tales que $k + a^2 + b^2$ es positivo, mediante el proceso algebraico de "*completar los cuadrados*", podemos escribir la ecuación en la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

donde es $r^2 = k + a^2 + b^2$. Resulta, en consecuencia, que la ecuación (3) define una circunferencia de radio r, que tiene su centro en el punto C de coordenadas a y b.

Las ecuaciones de las rectas tienen una forma todavía más sencilla; por ejemplo, el eje x tiene como ecuación $y = 0$, puesto que $y = 0$ se verifica para todos los puntos del eje x y solo para ellos. El eje y tiene la ecuación $x = 0$. Las rectas que pasan por el origen y bisecan los ángulos formados por los ejes tienen como ecuaciones $x = y$ y $x = -y$. Es fácil probar que toda recta tiene una ecuación de la forma

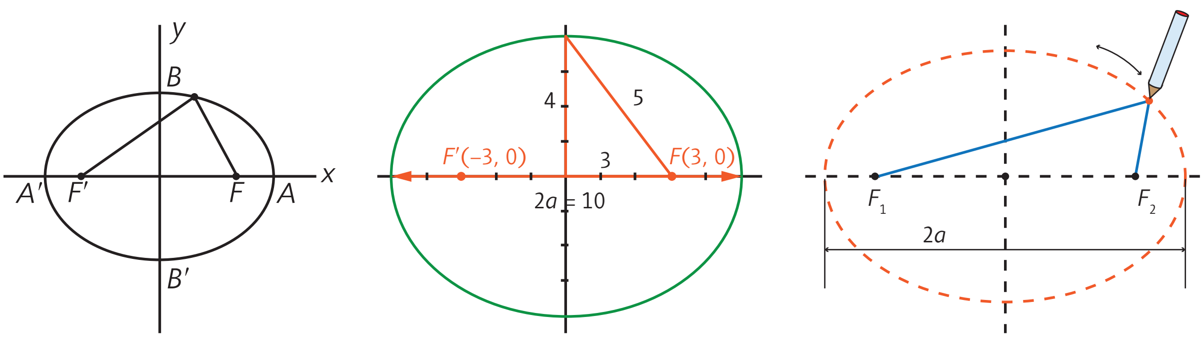
$$ax + by = c, \qquad (4)$$

donde a, b, c son constantes que caracterizan la recta. La significación de la ecuación (4) es la de que todos los pares de valores x, y que la satisfacen son coordenadas de puntos de la recta, y recíprocamente.

Es posible que recordemos que la ecuación

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \qquad (5)$$

representa una elipse.



Representaciones de elipses con sus focos.

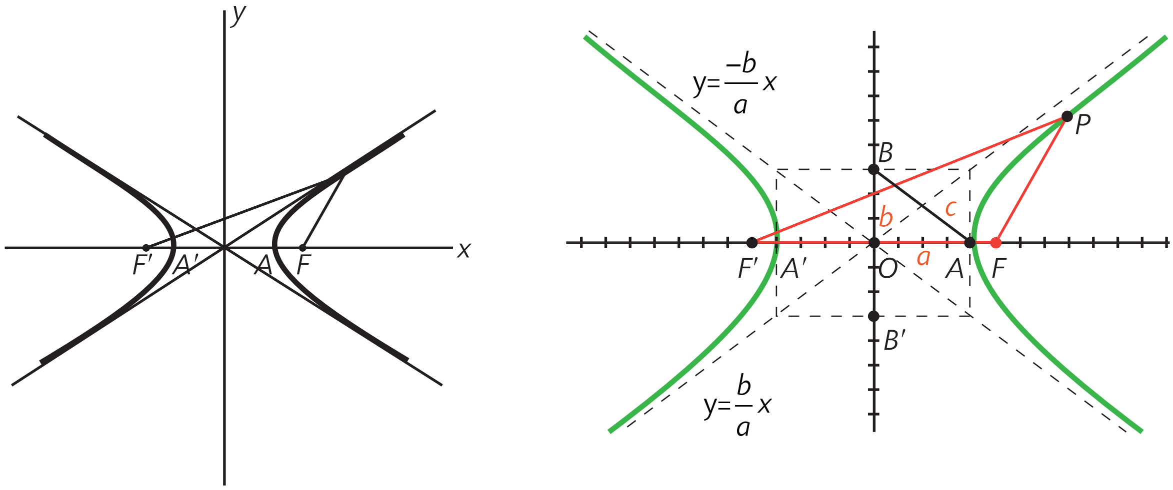
Esta curva corta al eje x en los puntos $A(p, 0)$ y $A'(-p, 0)$, y al eje y en $B(0, q)$ y $B'(0, -q)$ (figura anterior de izquierda). (Usaremos la notación $P(x, y)$ o simplemente (x, y) para designar brevemente "el punto P con coordenadas x, y".) Si es $p > q$, el segmento AA', de longitud $2p$, se llama *eje mayor* de la elipse, mientras que el segmento BB', de longitud $2q$, se llama *eje menor*.

La elipse es el lugar de todos los puntos P cuya suma de distancia a los puntos $F\left(\sqrt{p^2-q^2},0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{p^2-q^2},0\right)$ es $2p$. Podemos comprobar esto, como ejercicio, utilizando la fórmula (1). Los puntos F y F' se llaman *focos* de la elipse, y el cociente $e=\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}$ se denomina *excentricidad* de la misma.

Una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1 \tag{6}$$

representa una hipérbola. Esta curva



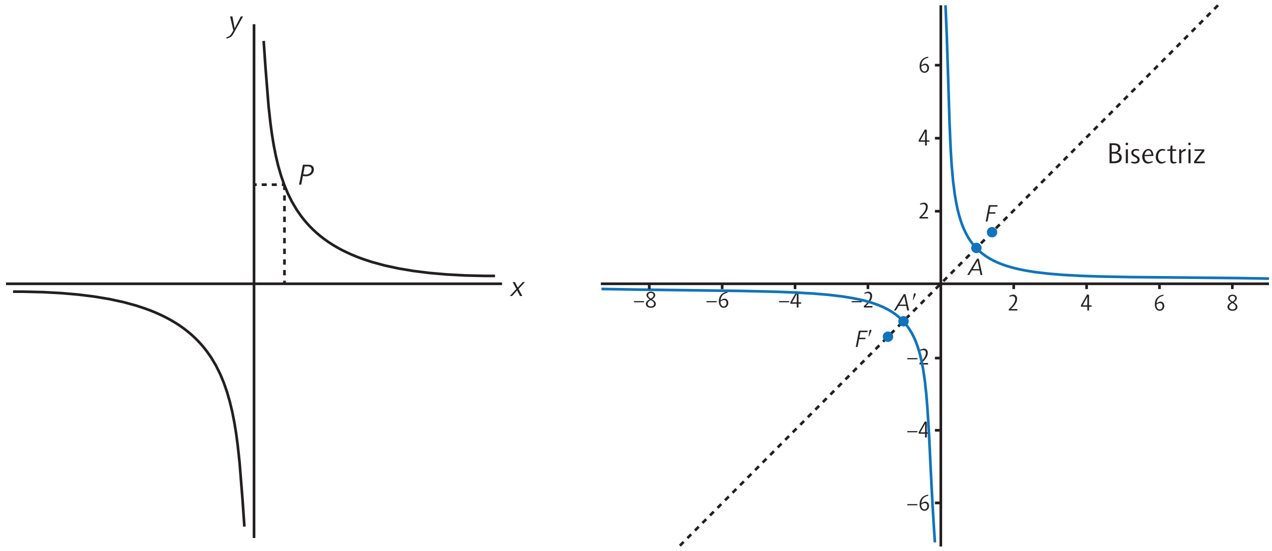
Representaciones de hipérbolas con sus focos.

está formada por dos ramas que cortan al eje x en los puntos $A(p,0)$ y $A'(-p,0)$, respectivamente. El segmento AA', de longitud $2p$, se llama *eje transversal* de la hipérbola y esta se aproxima indefinidamente a las dos rectas $qx \pm py = 0$ a medida que se aleja del origen, sin llegar nunca a tocarlas; dichas rectas se llaman *asíntotas* de la hipérbola. La hipérbola es el lugar de todos los puntos P cuya diferencia de distancias a los dos puntos $F\left(\sqrt{p^2+q^2},0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{p^2+q^2},0\right)$ es $2p$. Estos dos puntos se llaman *focos* de la hipérbola; la excentricidad de la curva viene dada por el cociente $e=\dfrac{\sqrt{p^2+q^2}}{p}$.

La ecuación

$$xy = 1 \tag{7}$$

define también una hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados como se ve en las figuras siguientes.



Hipérbolas equiláteras $xy = 1$. Izquierda: el área xy del rectángulo determinado por el punto $P(x, y)$ es igual a 1.

La ecuación de esta hipérbola *equilátera* indica que el área del rectángulo determinado por P y los ejes es igual a 1 para todo punto P de la curva. Una hipérbola equilátera cuya ecuación sea

$$xy = c, \tag{7a}$$

siendo c una constante, es solo un caso particular de hipérbola, del mismo modo que la circunferencia es un caso particular de la elipse. La particularidad de la hipérbola equilátera reside en el hecho de que sus asíntotas (en el caso presente, los ejes) son perpendiculares entre sí.

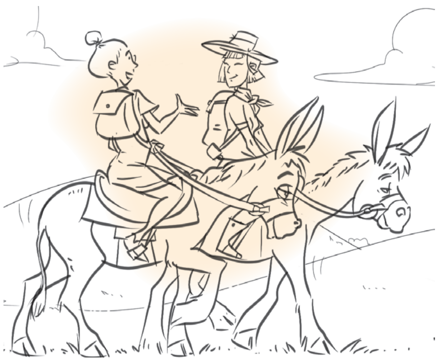
Para nosotros, la cuestión fundamental es la idea de que los objetos geométricos pueden ser representados de modo completo mediante elementos aritméticos y algébricos, y que lo mismo sucede con las operaciones geométricas; por ejemplo, si queremos determinar el punto de intersección de dos rectas, consideraremos las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

El punto común a las rectas se hallará determinando sus coordenadas, que no son otra cosa que la solución x, y del sistema (8). Análogamente, los puntos de intersección de dos líneas, tales como la circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k$ y la recta $ax + by = c$, se hallarían resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del sistema.

II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Análisis del concepto matemático de infinitud

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La sucesión de los enteros positivos

$$1, 2, 3, \ldots$$

es el primer y más importante ejemplo de conjunto infinito. No hay ningún misterio en el hecho de que esta sucesión no tiene fin; puesto que, por grande que sea el entero n, siempre se puede formar el entero siguiente $n + 1$. Pero el paso del *adjetivo* infinito, que significa simplemente "sin fin", al *sustantivo* infinito no debe hacernos pensar que "infinito", representado generalmente con el símbolo ∞, puede considerarse como si fuera un *número* ordinario. No es posible incluir el símbolo ∞ en el sistema de los números reales y conservar al mismo tiempo las leyes fundamentales de la aritmética.

Sin embargo, el concepto de infinito invade toda la matemática, ya que los objetos matemáticos son considerados habitualmente, no como individuos, sino como miembros de clases o conjuntos que contienen una infinidad de objetos del mismo tipo, tales como el conjunto de todos los enteros o el de los números reales, o el de los triángulos de un plano. Por esta razón es necesario analizar el infinito matemático de una manera precisa.

La teoría moderna de conjuntos, creada por Georg Cantor y su escuela a fines del siglo XIX, obtuvo brillantes resultados en tal cometido. Ha penetrado y ejercido enorme influjo en varios campos de la matemática, y ha llegado a ser de importancia fundamental en el estudio de las bases lógicas y filosóficas de dicha ciencia. El punto de partida es el concepto general de *conjunto* o *agregado*. En este concepto se entiende que toda colección de objetos es definida por una regla determinada que especifica exactamente qué objetos pertenecen a la colección. Como ejemplos podemos considerar el conjunto de todos los enteros positivos; el de todos los decimales periódicos; el conjunto de todos los números reales, o el de todas las rectas del espacio de tres dimensiones.

Para comparar la "magnitud" de dos conjuntos diferentes es fundamental la noción de equivalencia. Si los elementos de dos conjuntos A y B pueden ser apareados, de modo que a todo elemento de A corresponda un elemento (y solo uno) de B y a cada elemento de B corresponda un elemento de A, y uno solo, la correspondencia entre A y B se llama *biunívoca*, y dichos conjuntos se dicen *equivalentes* o *coordinables*.

La noción de equivalencia para conjuntos *finitos* coincide con la noción ordinaria de *igualdad de números*, puesto que dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos cuando (y solo entonces) se pueden poner en correspondencia biunívoca. Esta es, en realidad, la verdadera idea que interviene en la operación de contar, ya que cuando contamos un conjunto finito de objetos lo que hacemos es establecer una correspondencia biunívoca entre dichos objetos y el conjunto de símbolos numéricos 1, 2, 3, ... n.

No es necesario siempre contar los objetos de dos conjuntos finitos para comprobar su equivalencia; por ejemplo, se puede afirmar, sin necesidad de contar, que todo conjunto finito de circunferencia de radio 1 es coordinable con el conjunto de sus centros.

La idea de Cantor fue la de extender el concepto de equivalencia a los conjuntos infinitos para poder de este modo definir una *aritmética* de los infinitos. El conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de una recta son *equivalentes* o *equipotentes*, puesto que la elección del origen y del segmento unidad permite asociar de modo biunívoco cada punto P de la recta con un número real x determinado, su abscisa:

$$P \leftrightarrow x.$$

Los *enteros pares* forman un subconjunto propio del conjunto de todos los enteros, y los *enteros* forman un subconjunto propio del conjunto de todos los números racionales. (Con la expresión *subconjunto propio* de un conjunto S designamos un conjunto S' formado por algunos, no todos, de los objetos de S). Evidentemente, si un conjunto es finito, es decir, si contiene un cierto número n de elementos, no puede ser equivalente a ninguno de sus subconjuntos propios, ya que cualquier subconjunto puede contener a lo sumo $n - 1$ elementos. En cambio, si un conjunto contiene infinitos objetos se verifica, lo que a primera vista parece paradójico, que es equivalente a algunos de sus subconjuntos propios; por ejemplo, la coordinación

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \dots & \downarrow\uparrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los enteros positivos y su subconjunto propio formado por los enteros pares. Por tanto, ambos conjuntos son equivalentes. Esta contradicción con el familiar axioma "el todo es mayor que cualquiera de sus partes" muestra qué sorpresas pueden presentarse en el dominio del infinito.

LA NUMERABILIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES Y LA NO NUMERABILIDAD DEL CONTINUO

Uno de los primeros descubrimientos de Cantor en su análisis del infinito fue el de que el conjunto de los números racionales (que contiene el conjunto infinito de los enteros y que, por consiguiente, es infinito) es equivalente al conjunto de los enteros. A primera vista resulta bastante extraño que el conjunto denso en la recta de los números racionales pueda ser equivalente al disperso conjunto de los enteros.

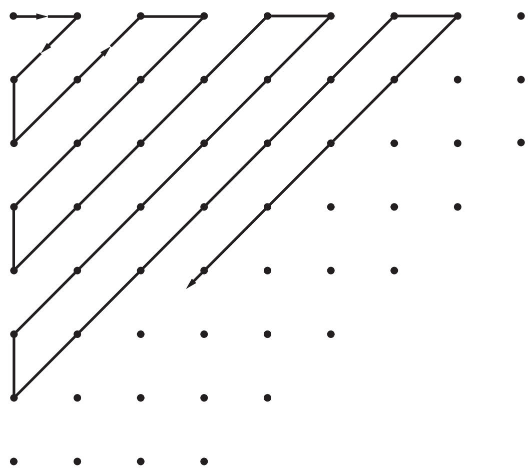
Ciertamente, no se pueden colocar los números positivos racionales en orden de magnitud (como ocurre con los enteros), de modo que haya un a que sea el primer número racional, b el inmediato mayor, y así de seguido, puesto que existen infinitos números racionales entre dos cualesquiera dados y, por consiguiente, carece de sentido la expresión "el inmediato mayor". Pero, como observó Cantor, prescindiendo de la relación de magnitud entre los elementos consecutivos, es posible colocar los números racionales en una sucesión $r_1, r_2, r_3 \dots$ análoga a la de los enteros. En dicha sucesión. habrá un primer número racional, un segundo, un tercero y así sucesivamente, y todo número racional aparecerá precisamente una vez. Una ordenación de los elementos de un conjunto en una sucesión análoga a la de los enteros se llama una *enumeración del conjunto*. Construyendo una enumeración del conjunto de los números racionales, Cantor probó que dicho conjunto es equivalente al de los números enteros, ya que la correspondencia

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \dots & \downarrow\uparrow & \dots \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots & r_n & \dots \end{array}$$

es biunívoca. Vamos a describir una manera efectiva de enumeración de los números racionales.

Todo número racional puede escribirse en la forma *a/b*, donde *a* y *b* son enteros, y todos aquellos números pueden disponerse en un cuadro, con *a/b* en la fila *a* y en la columna *b*; por ejemplo, 3/4 estará en la tercera columna y en la cuarta fila, eso sí, contando la línea de números enteros como una fila. Entonces, todos los números racionales positivos pueden ser ordenados según el esquema siguiente: en el cuadro derecho trazamos una línea quebrada continua que pase por todos los números del cuadro en la forma indicada en la figura siguiente.

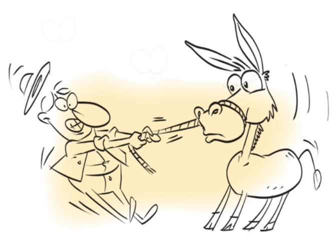
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{7}{3} & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \dots \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \frac{6}{6} & \frac{7}{6} & \dots \\ \dots & & & & & & & \dots \end{array}$$



Partiendo del 1, vamos horizontalmente hasta el primer lugar a la derecha, obteniendo el 2 como segundo término de la sucesión; vamos entonces diagonalmente hacia abajo, a la izquierda, hasta la primera columna, a alcanzar la posición ocupada por el 1/2; luego, verticalmente, hacia abajo, un lugar hasta el 1/3; después, diagonalmente hacia arriba y a la derecha, alcanzamos el 3; de ahí pasamos al 4 y después, diagonalmente, hasta el 1/4, y así sucesivamente.

A través de esta línea quebrada se obtiene la sucesión 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5… que contiene los números racionales en el orden en que aparecen en la línea quebrada. En dicha sucesión suprimimos aquellos números *a/b* para los cuales *a* y *b* tienen un factor común, de modo que cada número racional aparezca una sola vez, representado por una fracción irreducible. Se obtiene así la sucesión 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 1/5, 5, … la cual contiene cada número racional una sola vez. Resulta así la numerabilidad del conjunto de los números racionales. Como consecuencia de la correspondencia biunívoca entre los números racionales y los puntos racionales de una recta, se tiene la numerabilidad del conjunto de los puntos racionales de la recta.

Ejercicios para fijar ideas



1. Pruébese que el conjunto de todos los enteros positivos y negativos es numerable. Pruébese que el conjunto de los números racionales positivos y negativos es numerable.
2. Pruébese que el conjunto $S + T$ ($S \cup T$) es numerable si S y T son numerables. Pruébese el mismo hecho para el caso de una suma de tres, cuatro o cualquier número n de conjuntos, y, finalmente, para un conjunto numerable de conjuntos numerables.

Habiendo demostrado que el conjunto de números racionales es numerable, podría esperarse que todo conjunto infinito fuera también numerable, con lo que se tendría el resultado final del análisis del infinito. La realidad de los hechos es muy distinta. El mismo Cantor obtuvo el notable resultado de que el conjunto de los números reales, racionales e irracionales no es numerable. En otros términos, el conjunto de los números reales presenta una diferencia radical y, por así decirlo, un tipo superior de infinitud que el de los enteros o el de los números racionales.

La ingeniosa demostración indirecta de este hecho, debida a Cantor, ha quedado como modelo para un cierto tipo de demostraciones matemáticas. Las líneas principales de dicha demostración son las siguientes:

se parte de la hipótesis de que todos los números reales pueden ser efectivamente enumerados y dispuestos en una sucesión, y se construye luego un número real que no figura en dicha sucesión. De ahí resulta una contradicción con la hipótesis inicial, que suponía que todos los números reales estaban incluidos en la sucesión; la hipótesis de que la enumeración de los números reales es posible resulta absurda y, en consecuencia, la hipótesis contraria, es decir, la proposición de Cantor de que el conjunto de los números reales no es numerable, queda demostrada.

Para llevar a cabo el programa indicado, supongamos que hemos enumerado todos los números reales colocándolos en una tabla de decimales infinitos

1^{er} número	$N_1, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots$
2^{do} número	$N_2, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$
3^{er} número	$N_3, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \ldots$
. . . . . .	. . . .

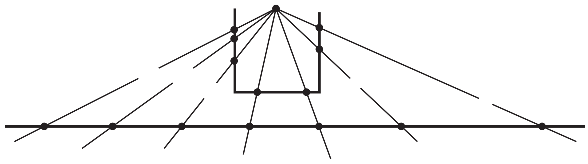
donde las N designan la parte entera y las letras minúsculas las cifras decimales. Supongamos que esta sucesión de fracciones decimales contiene todos los números reales. El punto esencial de la demostración consiste en construir, por un "proceso diagonal", un número del que se demuestra que no puede estar en la sucesión.

Para ello, comencemos por elegir una cifra a distinta de a_1 y de 0 y 9 (las últimas exigencias se hacen para evitar ambigüedades que puedan resultar de igualdades análogas a la $0{,}9999 = 1{,}\ 0000 \ldots$); luego, una cifra b distinta de b_2, de 0 y de 9; después, una c diferente de c_3, de 0 y de 9, y así sucesivamente. (Por ejemplo, se puede elegir $a = 1$, a no ser que sea $a_1 = 1$, en cuyo caso tomaríamos $a = 2$, y análogamente para las cifras b, c, d, e, ...). Consideremos entonces el decimal infinito

$$z = 0{,}abcde\ldots$$

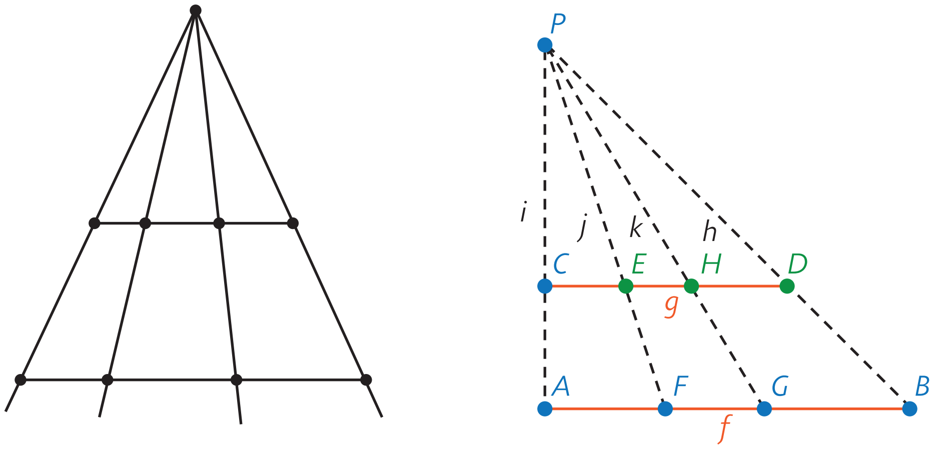
Este nuevo número z es ciertamente distinto de cualquiera de los que están en la tabla anterior; no puede ser igual al primero, puesto que difiere de él en la primera cifra decimal; no puede ser igual al segundo, porque tiene distinta la segunda cifra decimal; y, en general, no puede ser igual al que ocupa el lugar n, porque difiere de él en la n-ésima cifra decimal. Esto prueba que dicha tabla, en la que hemos dispuesto una sucesión de números reales, no puede contener todos los números reales. El conjunto de estos números, por tanto, no es numerable.

Quizá podamos sospechar que la razón de la no numerabilidad del continuo numérico esté en el hecho de que la recta se extiende infinitamente, y que posiblemente pueda ser numerable el conjunto de los puntos de un segmento finito de recta. Se comprueba fácilmente que no es este el caso viendo que el continuo numérico es equivalente a cualquier segmento finito; por ejemplo, al (0, 1), del que se han excluido los extremos.



Correspondencia biunívoca entre los puntos de una poligonal y los de la recta completa.

La correspondencia biunívoca deseada se puede obtener formando con dicho segmento una quebrada de tres lados de longitud igual a 1/3 y proyectando desde un punto útil, como se indica en la figura de arriba. Resulta, por tanto, que también un segmento finito de la recta numérica contiene una infinidad no numerable de puntos.



Correspondencia biunívoca entre los puntos de dos segmentos de distinta longitud.

Ejercicio para fijar ideas. Pruebe que cualquier intervalo [*A*, *B*] de la recta numérica es equivalente a otro intervalo cualquiera [*C*, *D*].

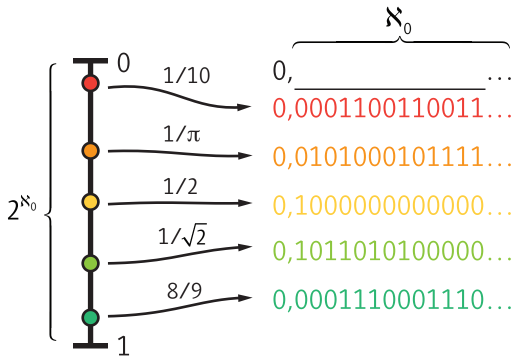
Vale la pena indicar otra demostración, quizá más intuitiva, de la no numerabilidad del continuo numérico. Apoyándonos en lo que acabamos de decir, será suficiente que nos ocupemos del conjunto de puntos comprendidos entre 0 y 1. La nueva demostración será también por reducción al absurdo. Supongamos que el conjunto de todos los puntos de la recta comprendidos entre 0 y 1 puede ser ordenado en una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \qquad (1)$$

Incluyamos el punto a_1 en un intervalo de longitud 1/10, el punto a_2 en un intervalo de longitud $1/10^2$, y asi sucesivamente. Si todos los puntos del intervalo (0, 1) estuvieran en la sucesión (1), el intervalo unidad aparecería completamente recubierto, en parte quizá por intervalos superpuestos, por la sucesión de intervalos de longitudes 1/10, $1/10^2$, … que hemos construido. (El hecho de que alguno de los intervalos pueda extenderse fuera del segmento unidad no influye en la demostración.) La suma de las longitudes de dichos intervalos viene dada por la serie geométrica

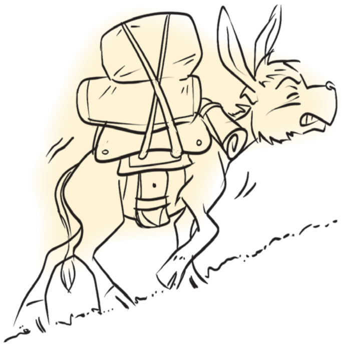
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right]=\frac{1}{9}.$$

Así, la hipótesis de que la sucesión (1) contiene todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 que llenan el intervalo completo de longitud 1 conduce a la contradicción de que dicho intervalo puede ser recubierto por un conjunto de intervalos de longitud total igual a 1/9, lo cual es intuitivamente absurdo. Aceptaremos esta contradicción como una demostración, aunque desde un punto de vista lógico requeriría un análisis más detallado.

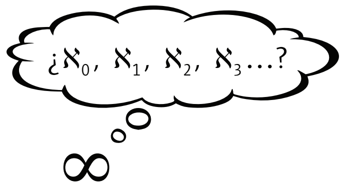


Representación gráfica.

El razonamiento del párrafo anterior sirve para establecer un teorema de gran importancia en la teoría moderna de la medida. Reemplazando los intervalos anteriores por otros más pequeños de longitud $\varepsilon/10^n$ donde ε es un número positivo arbitrariamente pequeño, se ve que los puntos de todo conjunto numerable de la recta pueden ser incluidos en un conjunto de intervalos de longitud total igual a $\varepsilon/9$. Puesto que ε es arbitrario, dicha longitud total puede ser tan pequeña coma se quiera. En la terminología de la teoría de la medida expresaremos este hecho diciendo que un conjunto numerable de puntos tiene *medida nula*.

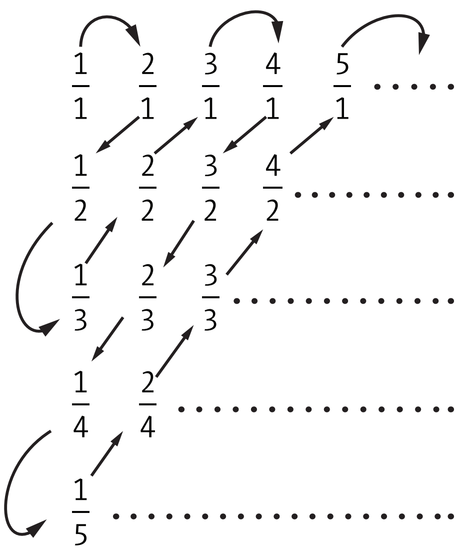


Ejercicio para fijar idea. Demuéstrese que el mismo resultado tiene lugar para un conjunto numerable de puntos de un plano, reemplazando las longitudes de los intervalos por áreas de cuadrados.



"NÚMEROS CARDINALES" DE CANTOR

Resumiendo los resultados expuestos hasta ahora, se tiene: el número de elementos de un conjunto finito *A* no puede ser igual al número de elementos de un conjunto finito *B* si *A* contiene más elementos que *B*. Si reemplazamos el concepto de conjuntos con el mismo número (finito) de elementos por el concepto más general de conjuntos equivalentes, se tiene que para conjuntos infinitos no es válida la proposición anterior; el conjunto de todos los enteros contiene más elementos que el conjunto de los números pares, y el conjunto de los números racionales más que el de enteros; sin embargo, estos tres conjuntos son equivalentes.



Representación gráfica.

Esto podría hacer sospechar que todos los conjuntos infinitos fueran equivalentes y que toda otra distinción que la de conjuntos finitos e infinitos resultaría superflua; pero hemos visto que los resultados de Cantor contradicen tal sospecha; existe un conjunto, el continuo numérico real, que no es equivalente a ningún conjunto numerable. Así, resulta que hay al menos dos tipos diferentes de *infinitud*: el infinito numerable de los enteros y el infinito no numerable del continuo. Si dos conjuntos, finitos o infinitos, son equivalentes, diremos que tienen el mismo número cardinal. Esta propiedad se reduce a la noción ordinaria de igual número natural si A y B son finitos, y puede considerarse como una generalización de este concepto. Por otra parte, si un conjunto A es equivalente con algún subconjunto de B, mientras que B no es equivalente con A ni con ninguno de sus subconjuntos, diremos, siguiendo a Cantor, que el conjunto B tiene un *número cardinal mayor* que el del conjunto A.

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

El uso de la palabra "número" está también en este caso de acuerdo con la noción de "número mayor" para conjuntos finitos. El conjunto de los enteros es un subconjunto del conjunto de los números reales, mientras que el conjunto de los números reales no es equivalente con el de los enteros ni con ninguno de los subconjuntos de este (es decir, el conjunto de los números reales no es numerable ni finito); por tanto, de acuerdo con nuestra definición, el continuo de los números reales tiene un número cardinal mayor que el conjunto de los enteros.

Se debe indicar que Cantor demostró realmente cómo construir una sucesión de conjuntos infinitos de números cardinales crecientes. Partiendo de los números enteros positivos, es suficiente probar que, dado un conjunto A cualquiera, es posible construir otro conjunto B de mayor número cardinal que A. A causa de la gran generalidad de este teorema, su demostración resulta bastante abstracta.

Definimos el conjunto B como el conjunto de todos los distintos subconjuntos de A. En el término *subconjunto* debemos incluir no solamente los subconjuntos propios de A, sino también A mismo y el *subconjunto vacío*, $\varnothing$, que no contiene ningún elemento. (Así, en el caso en que A esté formado por los enteros 1, 2, 3, B consta de los 8 elementos diferentes $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y $\varnothing$.) Los elementos de B son, a su vez, conjuntos formados por elementos de A.

Supongamos que B es equivalente a A o a algún subconjunto de A; es decir, que existe una ley que coordina de manera biunívoca los elementos de A o de uno de sus subconjuntos con todos los elementos de B; esto es, con los subconjuntos de A:

$$a \leftrightarrow S_a, \qquad (2)$$

donde designamos con S_a el subconjunto de A que corresponde al elemento a de A. Llegaremos a una contradicción construyendo un elemento de B (es decir, un subconjunto de A) al que no le corresponde ningún elemento a de A. En la construcción de este subconjunto se observa que existen dos posibilidades para todo elemento x de A: o bien el conjunto S_x asignado a x por la correspondencia (2) contiene al elemento x, o S_x no contiene a x.

Definamos T como el subconjunto de A formado por los elementos x tales que S_x no contiene a x. Este subconjunto T difiere de cualquier S_a al menos en el elemento a, puesto que si S_a contiene a a, T no debe contenerlo, mientras que si S_a no contiene a a, T debe contenerlo. En consecuencia, T no esté incluido en la correspondencia (2). Esto prueba que no se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de A, o de un subconjunto de A, y los de B. Sin embargo, la coordinación

$$a \leftrightarrow \{a\}$$

define una correspondencia biunívoca entre los elementos de A y el subconjunto de B formado por los subconjuntos de A que constan de un solo elemento. En consecuencia, de acuerdo con la definición del último párrafo, B tiene un número cardinal mayor que el de A.

Ejercicio para fijar ideas. Si A contiene n elementos, siendo n un entero positivo, pruébese que B, tal como ha sido definido antes, contiene 2^n elementos. Si A es el conjunto de todos los enteros positivos, demuéstrese que B es equivalente al continuo numérico entre 0 y 1.

$$\mathcal{N}\left\{\left[\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow \{4,5\} \\ 2 \leftrightarrow \{1,2,3\} \\ 3 \leftrightarrow \{4,5,6\} \\ 4 \leftrightarrow \{1,3,5\} \\ \vdots \quad \vdots \quad\; \vdots \end{array}\right]\right\} P(\mathcal{N}).$$

(**Indicación:** Represéntese todo subconjunto de A en el primer caso por una sucesión finita y en el segundo, por una sucesión infinita de las cifras 0 y 1,

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

siendo $a_n = 1$ o 0, según que el n-ésimo elemento de A pertenezca o no al subconjunto en cuestión.)

Podría pensarse que es fácil encontrar un conjunto de puntos con número cardinal mayor que el conjunto de los números reales entre 0 y 1. Puesto que, a primera vista, un cuadrado, siendo de "dimensión 2", parece contener más puntos que un segmento "unidimensional". Paradójicamente, las cosas no ocurren de ese modo: el número cardinal del conjunto de puntos de un cuadrado es el mismo que el del conjunto de puntos de un segmento. Para probar esta afirmación, estableceremos la correspondencia siguiente.

Si (x, y) es un punto de un cuadrado de lado unidad, x e y pueden ser escritos en forma decimal

$$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \dots,$$
$$y = 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 \dots,$$

donde para evitar ambigüedades escribiremos, por ejemplo, 0,250000... en vez de 0,249999... para el número racional 1/4. Al punto (x, y) del cuadrado le hacemos corresponder el punto

$$z = 0{,}a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \dots$$

del segmento entre 0 y 1. Evidentemente, a puntos distintos (x, y) y (x', y') del cuadrado les corresponderán puntos distintos z y z' del segmento, de modo que el número cardinal del cuadrado no puede exceder del cardinal del segmento. (En realidad, la correspondencia que acabamos de establecer es biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del cuadrado y un subconjunto propio del segmento unidad; puesto que ningún punto del cuadrado corresponde al punto 0,21409090909... del segmento, ya que, como hemos indicado, tomamos la forma 0,250000... y no la 0,2499999... para representar el número 1/4. Sin embargo, es posible modificar un poco la correspondencia, de modo que se tenga la biunivocidad entre el cuadrado y el segmento, los cuales resultan así con el mismo número cardinal.)

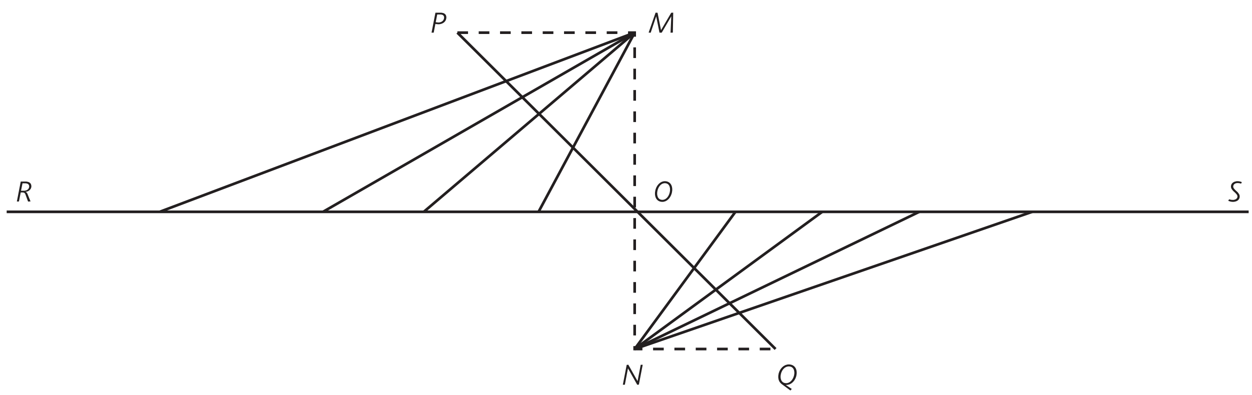
Un razonamiento análogo al anterior mostraría que el número cardinal de los puntos de un cubo es igual al número cardinal del segmento unidad.

Aunque estos resultados parecen contradecir la noción intuitiva de dimensión, debemos recordar que la correspondencia que hemos definido no es "continua"; si recorremos el segmento de 0 a 1 de modo continuo, los puntos correspondientes del cuadrado no forman una curva continua, sino que aparecen en un orden completamente caótico. La dimensión de un conjunto de puntos depende, no solamente del número cardinal del conjunto, sino también del modo como los puntos aparecen distribuidos en el espacio. Más adelante volveremos a ocuparnos de esta cuestión.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS INFINITOS

Los números reales pueden clasificarse en dos tipos de diferentes maneras, por ejemplo: (1) en racionales e irracionales, o (2) en algebraicos y trascendentes. Cantor demostró que incluso la clase de los números algebraicos, que es mucho más extensa que la de los números racionales, tiene, sin embargo, la misma potencia que el conjunto de los números naturales. Por lo tanto, son los números trascendentes los que le dan al sistema de los números reales el fuerte carácter de "densidad" que trae como consecuencia su potencia más alta. Que es básicamente un asunto de densidad lo que determina la potencia de un conjunto viene reflejado en el hecho de que la potencia del conjunto de los puntos de una recta de longitud infinita es exactamente la misma que la del conjunto de los puntos de un segmento cualquiera, por pequeño que sea.

Para demostrar esto, sea *RS* una recta y sea *PQ* un segmento cualquiera de longitud finita (figura siguiente).



Situemos este segmento de manera que corte a la recta *RS* en un punto *O*, pero sin estar contenido en la recta ni ser perpendicular a ella. Si tomamos los puntos *M* y *N* en la perpendicular a *RS* por *O* y de manera que *MP* y *NQ* sean paralelas a la recta *RS*, entonces, trazando semirrectas de origen M que corten a *OP* y a *OR*, y semirrectas de origen *N* que corten a *OQ* y a *OS*, queda establecida fácilmente la correspondencia biunívoca buscada.

Más sorprendente aún es el hecho de que la dimensión no es en absoluto lo que determina la potencia de un conjunto. La potencia del conjunto de los puntos del segmento unidad es exactamente la misma que la del conjunto de puntos del cuadrado unidad o del cubo unidad, o, para el caso, de todo el espacio tridimensional.

La dimensión mantiene, sin embargo, alguna medida de su autoridad en el hecho de que cualquier correspondencia biunívoca entre los puntos de dos espacios de distinta dimensión tiene que ser necesariamente una función discontinua. Algunos resultados de la teoría de conjuntos de puntos eran tan paradójicos y chocaban tan frontalmente con la intuición que Cantor mismo escribía en una ocasión a Dedekind, en 1877, con ocasión precisamente de su construcción de una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y su lado: "Lo veo, pero no lo creo", y le pedía vehementemente a su amigo que revisase cuidadosamente la demostración.

Los editores de revistas se mostraron también a menudo indecisos acerca de si aceptar o no sus artículos, y varias veces la publicación de artículos de Cantor en el *Journal de Crelle* se retrasó por indecisiones editoriales y por miedo a que los errores acechasen escondidos en un planteamiento tan decididamente poco convencional de los conceptos matemáticos como era el de Cantor.

1ª Maratón Geométrica Internacional

27 y 28 de junio - Salta, Argentina

Destinado a
alumnos de primaria y secundaria
a partir de 5º año de escolaridad
del territorio argentino y
países limítrofes

INSCRIPCIÓN
Finaliza el 17 de junio
https://forms.gle/rASKi8giXNGVSj4v7

Organiza:

Secretaría Regional Salta
Olimpíada Matemática Argentina
secretariaregionalomasalta@gmail.com

Al inscribirte te regalamos un libro de entrenamiento

Declarado de Interés por:

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología | SALTA GOBIERNO

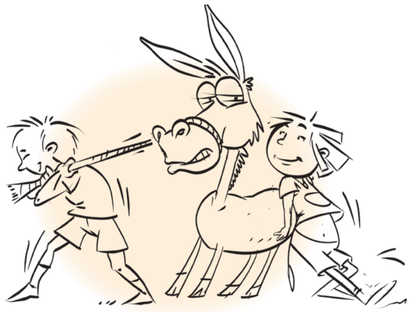
Salta ARGENTINA Tan linda que enamora
SECRETARIA DE TURISMO DE LA PROVINCIA DE SALTA
MINISTERIO DE CULTURA Y TURISMO

Resoluciones en trámite:

Concejo Deliberante Ciudad de Salta

Universidad Nacional de Salta

LA ARITMÉTICA TRANSFINITA



Los sorprendentes resultados de Cantor le llevaron a desarrollar la teoría de conjuntos como una rama autónoma de la matemática y con todos los derechos, teoría a la que se dio el nombre de *teoría de conjuntos* o *teoría de variedades* o de *multiplicidades*, y que tuvo a mediados del siglo XX unos efectos tan profundos en la enseñanza de la matemática en todos sus niveles. Durante los años a lo largo de los cuales Cantor puso las bases de esta teoría, tuvo que emplear grandes esfuerzos en convencer a sus contemporáneos de la validez y corrección de sus resultados, debido a que había un *horror infiniti* considerable, y muchos matemáticos se mostraban poco dispuestos a aceptar un *eigentlich Unendlich* o *infinito completo y actual*. Amontonando evidencia sobre evidencia, Cantor terminó por construir una aritmética transfinita completa. La "potencia" de un conjunto pasó a ser su "número cardinal", y así el "número cardinal" del conjunto de los números naturales era el *número transfinito* "más pequeño" $\aleph_0$, mientras que el "número cardinal" del conjunto de los números reales o del conjunto de los puntos de una recta era un número "mayor" c, el cardinal del continuo. Aún permanece abierto el problema de si hay o no números transfinitos entre $\aleph_0$ y c. En cambio, Cantor mismo demostró que hay infinitos números transfinitos mayores que c, al demostrar que el conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado tiene siempre una potencia o cardinal mayor que el conjunto mismo; por lo tanto, el cardinal del conjunto de todos los conjuntos de números reales será un tercer número transfinito, el conjunto de los subconjuntos de este conjunto de subconjuntos determinará un cuarto número aún mayor, y así indefinidamente. Lo mismo que hay infinitos números naturales, pero en un sentido incomparablemente más fuerte, hay infinitos números transfinitos.

Los números transfinitos que acabamos de describir son los números cardinales, pero Cantor desarrolló también una aritmética de números ordinales transfinitos. Las relaciones de orden son un tema complejo y delicado en la matemática, y así no podía por menos que ocurrir que la aritmética ordinal transfinita fuera muy distinta de la aritmética ordinal finita. Para el caso finito, las reglas que rigen el comportamiento de los números ordinales son exactamente las mismas que las de los cardinales (lo que permite identificarlos simplemente): así, por ejemplo, $3 + 4 = 4 + 3$, ya sea que estos dígitos representen cardinales u ordinales.

Sin embargo, si representamos por ω el número ordinal correspondiente al conjunto de los números naturales con su buena ordenación natural, entonces $\omega + 1$ no es el mismo que $1 + \omega$, dado que $1 + \omega$ es obviamente igual a ω, pero no así $\omega + 1$. La multiplicación de ordinales transfinitos tampoco es conmutativa, ya que, por ejemplo, $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, mientras que $2 \cdot \omega = \omega \neq + \omega$. Las operaciones con cardinales transfinitos sí son conmutativas, en cambio.

EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN INDIRECTA (demostraciones por reducción al absurdo)

La teoría de los números cardinales no es más que un aspecto de la teoría general de conjuntos, creada por Cantor en lucha con las severas críticas de algunos de los más distinguidos matemáticos de su tiempo. Algunos de ellos, tales como Leopold Kronecker y Henri Poincaré, le reprochaban la vaguedad del concepto general de *conjunto* y el carácter no constructivo de los razonamientos utilizados para definir algunos conjuntos.

Las objeciones a los razonamientos no constructivos se refieren a las que podemos llamar *pruebas indirectas* o *demostraciones por reducción al absurdo*. Las demostraciones indirectas constituyen un tipo habitual de razonamiento matemático: para establecer la verdad de una proposición A, se hace la hipótesis de que la proposición A' contraria de la A es cierta. Entonces, mediante una cadena de razonamientos, se llega a una contradicción con A', lo que prueba lo absurdo de A'. En consecuencia, apoyándose en el principio lógico fundamental del tercero excluido, la falsedad de A' establece la verdad de A.

A lo largo de este tema encontraremos ejemplos de demostraciones indirectas que pueden convertirse en demostraciones directas, si bien la forma indirecta presenta las ventajas de la brevedad y de prescindir de detalles que no son necesarios para el objetivo inmediato. Existen, sin embargo, teoremas para los cuales no ha sido posible dar más demostración que la indirecta; aún más: hay teoremas que se pueden demostrar por el método indirecto, para los cuales no sería posible ni siquiera en principio dar una demostración directa constructiva, a causa de la naturaleza misma del teorema. Tales, por ejemplo, teoremas dados recientemente.

En distintas ocasiones de la historia de la matemática en que los esfuerzos de los matemáticos se dirigían hacia la obtención de soluciones constructivas para determinados problemas, con vistas a mostrar la posibilidad de solución se llegó a la construcción gracias a haberse encontrado una demostración indirecta y no constructiva.

Existe una diferencia esencial entre probar la existencia de un objeto de cierto tipo mediante la construcción de un ejemplo tangible de tal objeto y demostrar que la no existencia de dicho objeto conduciría a una contradicción. En el primer caso se tiene un objeto tangible, mientras que en el segundo no se tiene más que una contradicción. Algunos matemáticos destacados han propugnado en tiempos recientes la supresión más o menos completa de las demostraciones no constructivas de la matemática. Aun en el caso en que se considere deseable este programa, en el estado actual de la matemática supondría una gran complicación y también la parcial destrucción del edificio matemático actual.

Por esta razón no es de extrañar que la escuela "intuicionista", que es la que ha adoptado tal programa, haya encontrado fuerte resistencia, y que los intuicionistas más puros no puedan en ocasiones permanecer fieles a sus principios.

LAS CONTROVERSIAS EN TORNO DEL INTUICIONISMO

David Hilbert era, como Poincaré, un matemático polifacético que batalló en teoría de números, lógica matemática, ecuaciones diferenciales, el problema de los tres cuerpos y otros aspectos de la física matemática. En conexión con su obra sobre los fundamentos de la matemática, se vio en el centro de la de unas las controversias más agudas del siglo, que acabamos de comentar y que, en cierto sentido, no era más que una continuación del conflicto anterior entre Cantor y Kronecker.

Hilbert admiraba la teoría de conjuntos de Cantor, mientras que Poincaré se mostraba muy crítico con respecto a ella. Las teorías de Cantor, como la de los espacios abstractos de Hilbert, parecen estar muy alejadas de una base intuitiva-empírica tal como preferían Poincaré y algunos de sus contemporáneos. En el Congreso de París de 1900, en el que Hilbert presentó sus problemas, Poincaré leyó una comunicación en la que comparaba los papeles de la lógica y de la intuición en la matemática. Los matemáticos de la época y posteriores han venido a agruparse en dos o tres escuelas de pensamiento, según sus puntos de vista acerca de los fundamentos de la matemática. Los que adoptaron posturas próximas a la de Poincaré formaron un grupo de frontera un tanto difusa, con predilección por la intuición. Hilbert, en cambio, pasó a ser considerado como el líder de una escuela de pensamiento "formalista", que algunos de sus sucesores llevaron a la conclusión extremada (que no es en absoluto debida a Hilbert) de que la matemática no es nada más que un juego combinatorio sin sentido, que se juega con signos desprovistos de significado alguno, de acuerdo con ciertas reglas formales arbitrarias pero convenidas de antemano. Se trata de la postura formalista pura o radical.

No muy alejado del grupo formalista, pero tampoco identificado con él, había otro grupo de matemáticos que dudaban en adherirse al carácter arbitrario de las reglas del juego. Encabezados por Bertrand Russell, estos matemáticos, que suelen identificarse como la escuela "logicista", asociarían la matemática con la lógica, en oposición a Charles Sanders Peirce, pero de acuerdo en cambio con Gottlob Frege. Por último, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), de la universidad de Ámsterdam, fue quien reunió de una manera particularmente eficaz, tanto a los adversarios del formalismo de Hilbert como a los del logicismo de Russell. Brouwer insistía en que los elementos y los axiomas de la matemática son mucho menos arbitrarios de lo que podría parecer.

En su tesis doctoral de 1907 y en posteriores artículos atacó la fundamentación lógica de la aritmética y del análisis, llegando a ser conocido como el fundador de una "escuela intuicionista", que es hoy claramente identificable en la obra de sus discípulos. Según Brouwer, la matemática no presupone en ningún sentido un lenguaje y una lógica, puesto que tiene su fuente en la intuición directa, que elabora sus conceptos e inferencias claros de una manera inmediata a nuestra mente. Una afirmación de que existe un objeto que tiene una propiedad dada significa que hay un método conocido que permite encontrar o construir tal objeto en un número finito de pasos.

En particular, sostenía Brouwer, el método de demostración indirecta o por reducción al absurdo, al que tan frecuentemente recurre la matemática transfinita, no es válido. Siempre, desde la época de Aristóteles (y verosímilmente desde mucho antes), las tres leyes básicas de la lógica han sido consideradas sacrosantas: 1) la ley de identidad: *A* es *A*; 2) la ley de contradicción: *A* no puede ser simultáneamente *B* y no *B*; y 3) la ley de tercio excluso (o *tertium non datur*): *A* es o bien *B* o bien no *B*, sin posible tercera alternativa. Brouwer rechazó la última de estas tres leyes básicas de la lógica y se negó a aceptar los resultados basados en ella. Por ejemplo, planteó a los formalistas la cuestión de si es verdadera o falsa la afirmación: "la sucesión de dígitos 123456789 aparece consecutivamente en algún lugar en la representación decimal de π". Puesto que no existe ningún método conocido (hoy) para decidir tal afirmación en un número finito de pasos, no podemos aplicar aquí la ley del tercio excluso para declarar que la proposición es o bien verdadera o bien falsa.

LAS PARADOJAS DEL INFINITO

Aunque la posición irreducible de los intuicionistas le parece demasiado extremista a la mayor parte de los matemáticos, la aparición de paradojas lógicas en la teoría de los conjuntos infinitos representó una seria amenaza para dicha teoría. Pronto se observó que la utilización sin restricciones del concepto de *conjunto* podía conducir a contradicciones.

Una de las paradojas, presentada por Bertrand Russell, puede ser formulada como sigue: la mayor parte de los conjuntos no se contienen a sí mismos como elementos; por ejemplo, el conjunto *A* de los números enteros contiene como elementos únicamente números enteros; como *A* no es un entero, sino un conjunto de enteros, no se contiene a sí mismo como elemento. Un conjunto de este tipo se llamará *ordinario*. Sin embargo, es posible que un conjunto se contenga a sí mismo como elemento; por ejemplo, el conjunto *S*, definido por la frase "*S* contiene como elementos los conjuntos que se pueden definir en castellano con una frase de menos de treinta palabras", es un conjunto que se contiene a sí mismo como elemento. A estos conjuntos los llamaremos *extraordinarios*. En todo caso, la mayor parte de los conjuntos son ordinarios y podemos excluir el comportamiento extraño de los conjuntos extraordinarios, limitando nuestra atención al conjunto de todos los conjuntos ordinarios.

Llamemos *C* a dicho conjunto. Cualquier elemento de *C* es, a su vez, un conjunto; en realidad, un conjunto ordinario. Ahora se plantea la cuestión de saber si el conjunto *C* es ordinario o extraordinario. Debe ser de uno o del otro tipo; si *C* es ordinario, debe contenerse a sí mismo como elemento, puesto que hemos definido *C* por la propiedad de contener a todos los conjuntos ordinarios; pero si es así, *C* debe ser extraordinario, ya que hemos llamado extraordinarios a los conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos. Se tiene en consecuencia una contradicción; por tanto, *C* debe ser extraordinario. Pero entonces, *C*, que se contiene a sí mismo por ser extraordinario, contendrá un conjunto extraordinario (el mismo *C*), en contradicción con la definición que dimos de *C* como conjunto que contiene únicamente conjuntos ordinarios. Vemos así que, en cualquiera de las dos hipótesis, la mera existencia de *C* conduce a una contradicción.

LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA

Paradojas análogas a la precedente condujeron a Russell y a otros matemáticos a un estudio sistemático de los fundamentos de la matemática y de la lógica. El objeto final de sus esfuerzos era el de dar al razonamiento matemático una base lógica, la cual se pueda probar que está libre de contradicción, y que al mismo tiempo incluya todo lo que es considerado como importante por todos (o algunos de) los matemáticos. Aunque esta meta ambiciosa no ha sido alcanzada y quizá no pueda ser alcanzada nunca, el tema de la lógica matemática ha atraído la atención de un número creciente de estudiosos. Muchas de las cuestiones en este dominio que pueden ser enunciadas en forma simple presentan grandes dificultades para su solución. Como ejemplo citaremos la llamada hipótesis del continuo, que supone la no existencia de ningún conjunto cuyo número cardinal sea mayor que el de los conjuntos numerables y menor que el del continuo numérico correspondiente al conjunto de los números reales.

De esta hipótesis pueden deducirse muchas consecuencias interesantes; pero hasta ahora no ha sido demostrada ni refutada, si bien recientemente Kurt Gödel ha probado que si el sistema de postulados sobre los que se funda la teoría de conjuntos no es contradictorio, tampoco lo es el sistema ampliado obtenido al añadir la hipótesis del continuo. Cuestiones tales como estas se reducen en última instancia a saber lo que se quiere significar por el concepto de *existencia matemática*.

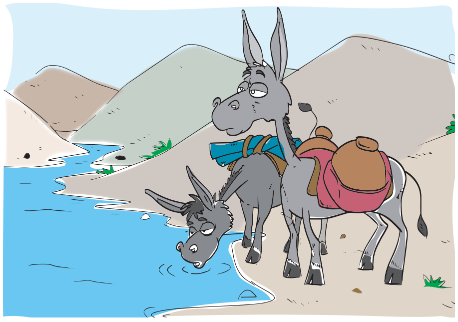
Afortunadamente, la existencia de la matemática no depende de una respuesta satisfactoria. La escuela de los "formalistas", dirigida por el gran matemático Hilbert, afirma que, en matemática, "existencial" significa simplemente "libre de contradicción". Resulta entonces necesario construir un sistema de postulados del que pueda deducirse toda la matemática por razonamiento puramente formal, y demostrar que este sistema de postulados no puede llevar nunca a contradicción. Los resultados recientes obtenidos por Gödel y otros parecen probar que este programa, al menos como fue concebido originalmente por Hilbert, no puede realizarse. Es significativo que la teoría de Hilbert acerca de la estructura formal de las matemáticas esté basada en esencia en un proceso intuitivo. De una forma u otra, explícita o implícitamente, aun bajo el más inflexible aspecto formalista, lógico o postulatorio, la intuición constructiva continúa siendo el elemento vital en matemática.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Cuándo y cómo empezaron… las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

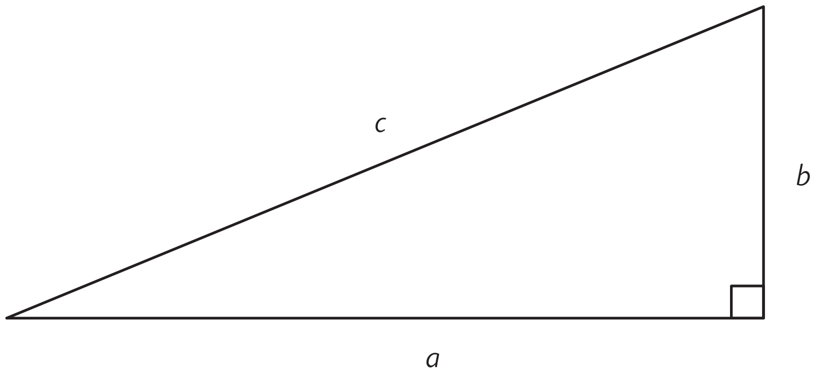
Un teorema antiguo y una pregunta moderna según Roger Penrose

EL TEOREMA DE PITÁGORAS



Consideremos la cuestión de la geometría. ¿Cuáles son, realmente, los diferentes "tipos de geometría" a los que hemos aludido anteriormente? Para abordar esta cuestión, volveremos a nuestro encuentro con Pitágoras y consideraremos el famoso teorema que lleva su nombre, aunque no está muy claro históricamente quién demostró realmente por primera vez lo que ahora conocemos como *teorema de Pitágoras*. Parece ser que los antiguos egipcios y babilonios conocían al menos muchos ejemplos de este teorema. El verdadero papel desempeñado por Pitágoras o sus seguidores es básicamente supuesto. El teorema dice así:

para cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados.

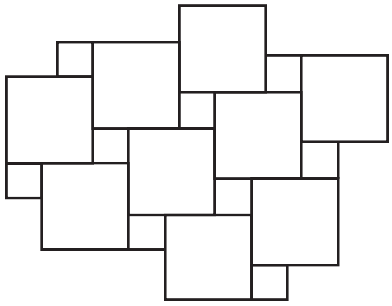


$$a^2 + b^2 = c^2$$

El teorema de Pitágoras: para cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa c es la suma de los cuadrados de los otros dos lados a y b.

¿Qué razones tenemos para creer que esta afirmación es cierta? ¿Cómo podemos "demostrar" realmente el teorema de Pitágoras? Se conocen muchos argumentos. Queremos considerar dos de ellos, elegidos por su especial transparencia, que ponen el acento en puntos diferentes.

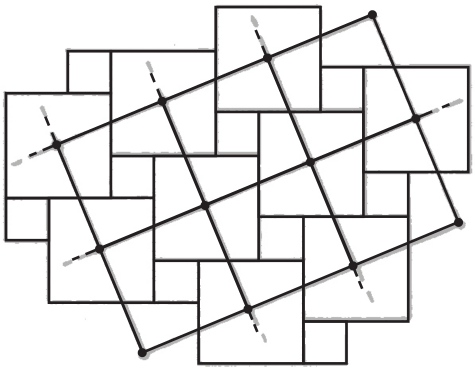
En cuanto al primero, consideremos la estructura que se ilustra en la figura siguiente:



Una teselación del plano por cuadrados de dos tamaños diferentes.

Está compuesta enteramente por cuadrados de dos tamaños diferentes. Puede considerarse "obvio" que esta estructura puede prolongarse indefinidamente y que el plano entero queda así recubierto de forma regular y repetitiva, sin huecos ni solapamientos, por cuadrados de estos dos tamaños.

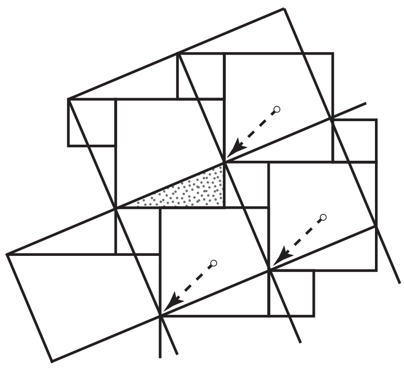
La naturaleza repetitiva de esta estructura se hace manifiesta por el hecho de que, si marcamos los centros de los cuadrados más grandes, dichos centros constituyen los vértices de otro sistema de cuadrados, de un tamaño algo mayor que cualquiera de los otros, pero inclinados en un cierto ángulo respecto de los originales (ver la figura de abajo) y que por sí solos recubrirán el plano entero.



Los centros de los cuadrados mayores, por ejemplo, forman los vértices de un retículo de cuadrados aún mayores, inclinados en un determinado ángulo.

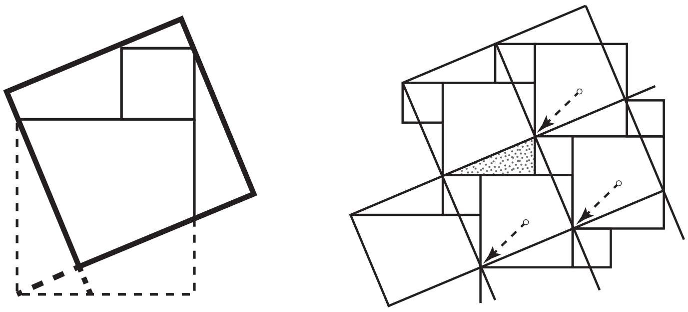
Cada uno de estos cuadrados inclinados tiene exactamente las mismas marcas, de modo que sus líneas interiores encajan para formar la estructura original de dos cuadrados. Lo mismo se aplicaría si, en lugar de tomar los centros de los cuadrados más grandes de entre los dos tipos de cuadrados de la estructura original, elegimos cualquier otro punto, junto con su conjunto de puntos correspondientes a lo largo de toda la estructura.

La nueva estructura de cuadrados inclinados es exactamente la misma que antes, pero desplazada sin rotación –es decir, mediante un movimiento que se conoce como una *traslación*–. Por simplicidad, podemos escoger ahora nuestro punto de partida en una de las esquinas de la estructura original (véase la figura siguiente).



El retículo de cuadrados inclinados puede desplazarse por traslación, de modo que los vértices del retículo inclinado están sobre los vértices del retículo original de dos cuadrados, lo que muestra que el lado de un cuadrado inclinado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo sombreado cuyos otros dos lados son los de los dos cuadrados originales.

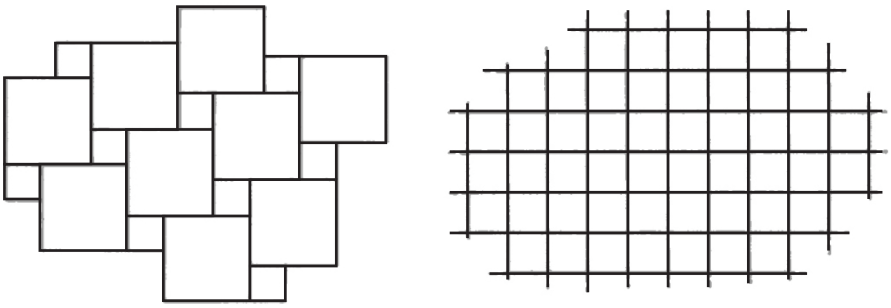
Debería quedar claro que el área del cuadrado inclinado debe ser igual a la suma de las áreas de los dos triángulos más pequeños: de hecho, para cualquier punto de partida de los cuadrados inclinados, las piezas en que el cuadrado mayor queda subdividido por las líneas interiores pueden ser desplazadas sin rotación hasta que encajen para formar los dos cuadrados más pequeños (por ejemplo, la primera figura de abajo). Además, resulta evidente en la segunda figura de abajo que la longitud del lado del cuadrado inclinado grande es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos otros dos lados tienen longitudes iguales a los lados de los dos cuadrados más pequeños. Hemos establecido así el teorema de Pitágoras: **el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados**.



Para cualquier punto de partida particular en el cuadrado inclinado como el que se muestra en la primera figura, este queda dividido en piezas que encajan para formar los dos cuadrados más pequeños.

El argumento anterior proporciona los elementos esenciales de una demostración sencilla de este teorema y, además, nos ofrece una "razón" para creer que el teorema tiene que ser verdadero, lo que quizá no fuera tan obvio en el caso de un argumento más formal construido mediante una sucesión de pasos lógicos sin un motivo claro.

Sin embargo, habría que señalar que en este argumento han intervenido varias hipótesis implícitas. Una de ellas, y no la menos importante, es la de que la estructura en apariencia obvia de cuadrados repetidos que se mostraba en la figura siguiente de izquierda o incluso en la figura de derecha

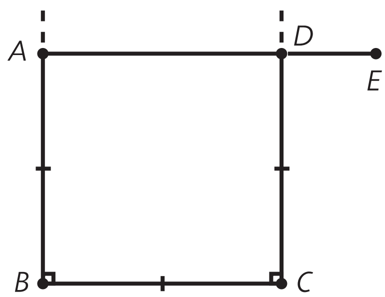


El retículo familiar de cuadrados iguales. ¿Cómo sabemos que existe?

es geométricamente posible –o incluso, y más críticamente, ¡que un cuadrado es algo *geométricamente posible*!–. Después de todo, ¿qué entendemos por un "cuadrado"?

Normalmente, pensamos en un cuadrado como una figura plana cuyos lados son todos iguales y cuyos ángulos son todos rectos. ¿Qué es un ángulo recto? Bien, podemos imaginar dos líneas rectas que se cortan en un punto formando cuatro ángulos que son todos iguales. Cada uno de estos ángulos iguales es entonces un ángulo recto.

Tratemos ahora de construir un cuadrado. Tomemos tres segmentos de recta iguales *AB*, *BC* y *CD*, donde *ABC* y *BCD* son ángulos rectos, y *D* y *A* están en el mismo lado de la línea *BC*, como muestra la siguiente figura.

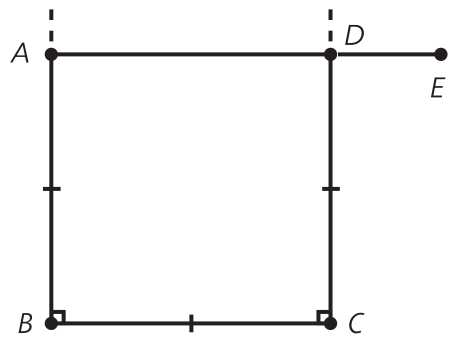


Tratemos de construir un cuadrado. Tomemos *ABC* y *BCD* como ángulos rectos, con *AB* = *BC* = *CD*. ¿Se sigue de esto que *DA* es también igual a estas longitudes y que *DAB* y *CDA* son también ángulos rectos?

Surge la pregunta: ¿tiene *AD* la misma longitud que los otros tres segmentos? Más aún: ¿son los ángulos *DAB* y *CDA* también ángulos rectos?

Estos ángulos deben ser iguales entre sí por la simetría izquierda-derecha de la figura, pero ¿son realmente ángulos rectos? El hecho de que lo sean solo parece obvio a causa de nuestra familiaridad con los cuadrados, o quizá porque recordemos de nuestros días escolares alguna proposición de Euclides que puede ser utilizada para deducir que los lados *BA* y *CD* tendrían que ser "paralelos" entre sí, y alguna proposición acerca de que cualquier recta "transversal" a un par de paralelas tiene que formar ángulos correspondientes iguales allí donde corta a las dos paralelas.

De esto se sigue que el ángulo *DAB* tendría que ser igual al ángulo complementario de *ADC* (*i.e.*, al ángulo *EDC*, en la conocida figura de abajo,



siendo *ADE* una recta) además de ser, como se ha señalado antes, igual al ángulo *ADC*. Un ángulo (*ADC*) solo puede ser igual a su complementario (*EDC*) si es un ángulo recto. Debemos demostrar también que el lado *AD* tiene la misma longitud que *BC*, pero ahora esto se sigue también, por ejemplo, de las propiedades de las rectas transversales a las paralelas *BA* y *CD*. Por lo tanto, es cierto que a partir de un argumento euclídeo de este tipo podemos demostrar que realmente sí, existen cuadrados hechos de ángulos rectos. Pero aquí se esconde una cuestión profunda.

LOS POSTULADOS DE EUCLIDES

Al construir su noción de geometría, Euclides puso mucho cuidado en ver de qué hipótesis dependía su demostración. No obstante, incluso con todo este cuidado, quedaron varias hipótesis ocultas, que tienen que ver básicamente con lo que ahora llamaríamos cuestiones *topológicas* que habrían parecido "intuitivamente obvias" para Euclides y sus contemporáneos. Estas hipótesis no mencionadas solo fueron advertidas siglos después, especialmente por Hilbert, a finales del siglo XIX.

Las ignoraremos en lo que sigue. En particular, Euclides tuvo cuidado en hacer una distinción entre ciertas afirmaciones llamadas *axiomas* –que se tomaban como verdades autoevidentes, y que básicamente eran definiciones de lo que él entendía por puntos, líneas, etc.– y los cinco *postulados*, que eran hipótesis cuya validez parecía menos segura, pero que parecían ser ciertas para la geometría de nuestro mundo. La última de estas hipótesis, conocida como el *quinto postulado de Euclides*, se consideraba menos obvia que las otras, y durante varios siglos se tuvo la sensación de que debería ser posible encontrar una forma de demostrarla a partir de los otros postulados más evidentes. El quinto postulado de Euclides se conoce habitualmente como el *postulado de las paralelas*, y seguiremos esta práctica aquí.

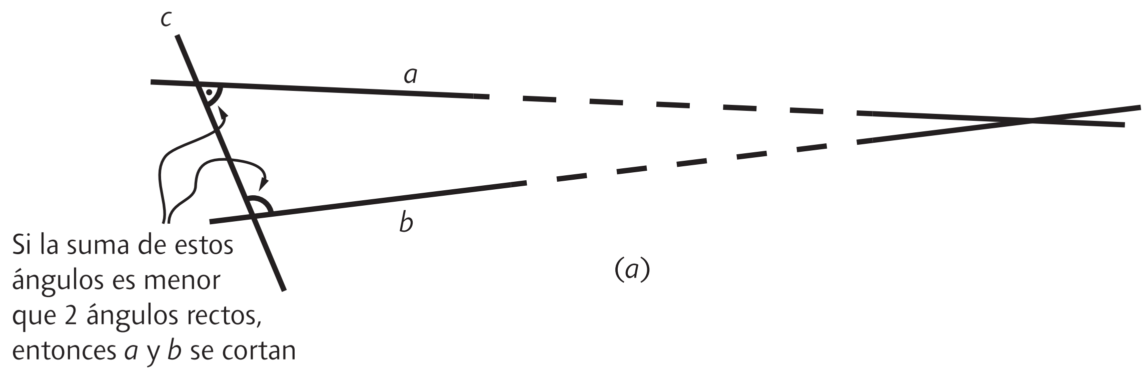
Antes de discutir el postulado de las paralelas, vale la pena señalar la naturaleza de los otros cuatro postulados de Euclides. Los postulados conciernen a la geometría del plano (euclídeo), aunque Euclides también consideró el espacio tridimensional en sus obras posteriores. Los elementos básicos de su geometría plana son puntos, líneas rectas y círculos. Aquí consideraremos que una "línea recta" (o simplemente una "recta") se extiende indefinida en ambas direcciones; si no es así, me referiré a un "segmento de recta". El *primer postulado* de Euclides afirma, en efecto, que existe un (único) segmento de recta que conecta dos puntos cualesquiera.

Su *segundo postulado* afirma la prolongabilidad ilimitada de cualquier segmento de recta. Su *tercer postulado* sostiene la existencia de un círculo con un centro cualquiera y con cualquier valor para su radio. Finalmente, su **cuarto postulado afirma la igualdad de todos los ángulos rectos**. Véase una bella exposición axiomática de la geometría espacio temporal 4-dimensional de Minkowski en *Leñitas Geométricas* 3ª temporada.

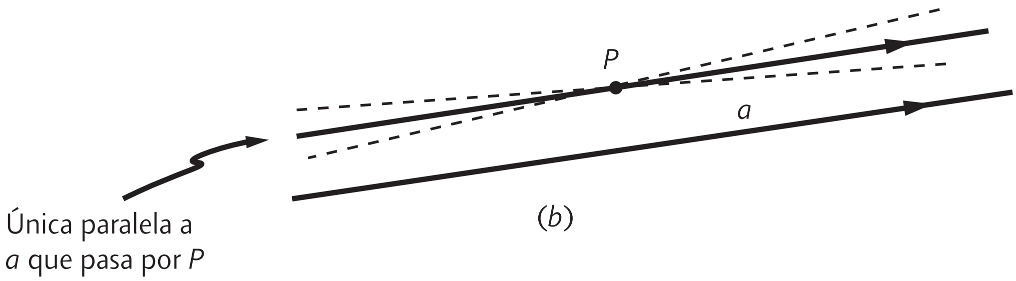
Desde una perspectiva moderna, algunos de estos postulados parecen un poco extraños, en particular el cuarto, pero debemos tener en cuenta el origen de las ideas que subyacen en la geometría de Euclides. Él estaba interesado básicamente en el movimiento de cuerpos rígidos idealizados y la noción de congruencia que se manifestaba cuando uno de tales cuerpos rígidos idealizados se movía hasta coincidir con otro. La igualdad entre un ángulo recto en un cuerpo y un ángulo en otro cuerpo tenía que ver con la posibilidad de mover un cuerpo de modo que las líneas que formaban su ángulo recto coincidieran con las líneas que formaban el ángulo recto en el otro. De hecho, el cuarto postulado está afirmando la isotropía y la homogeneidad del espacio, de modo que una figura en un lugar podría tener la "misma" (*i.e.*, congruente) forma geométrica que una figura en otro lugar.

Los postulados segundo y tercero expresan la idea de que el espacio es indefinidamente prolongable y sin "huecos" en su interior, mientras que el primero expresa la naturaleza básica de un segmento de línea recta. Aunque Euclides consideraba la geometría de un modo bastante diferente de como la consideramos hoy, sus cuatro primeros postulados recogen nuestra noción básica actual de un espacio métrico (bidimensional) con completa homogeneidad e isotropía, e infinito en extensión. De hecho, semejante imagen parece estar en estrecho acuerdo con la naturaleza espacial a muy gran escala del universo real, de acuerdo con la cosmología moderna, como pretendemos ver más adelante.

¿Cuál es, entonces, la naturaleza del quinto postulado de Euclides, el postulado de las paralelas? Tal como Euclides formulaba esencialmente dicho postulado, este afirma que si dos segmentos de recta *a* y *b* en un plano cortan a otra línea recta *c* (de modo que *c* es lo que se denomina *transversal* a *a* y *b*) de tal forma que la suma de los ángulos interiores en el mismo lado de *c* es menor que dos ángulos rectos, entonces *a* y *b*, cuando se prolongan a suficiente distancia en ese lado de *c*, se cortarán en alguna parte (véase la figura de abajo):



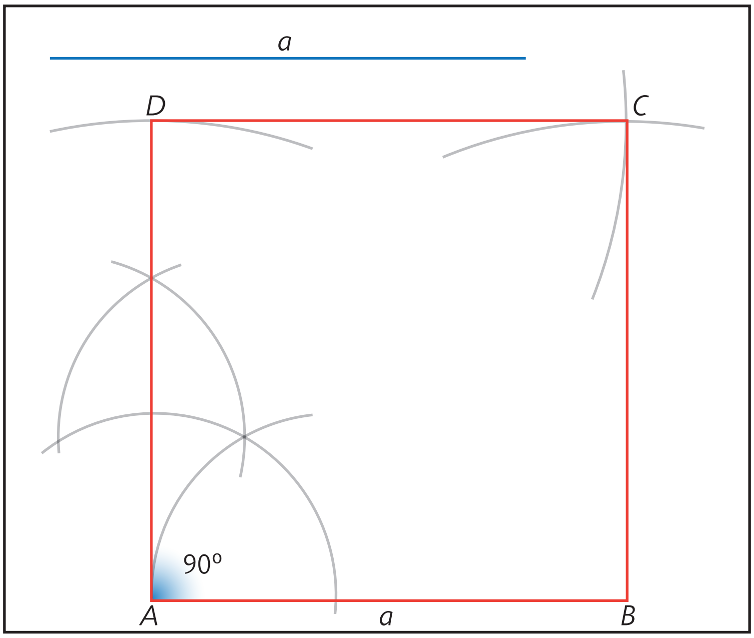
(a) Postulado de las paralelas de Euclides. Las líneas *a* y *b* son trasversales a una tercera línea *c*, tal que los ángulos interiores donde *a* y *b* cortan a *c* suman menos que dos ángulos rectos. Entonces *a* y *b* (suponiendo que se prolongan lo suficiente) se cortarán en última instancia.



(b) Axioma (equivalente) de Playfair: si *a* es una línea en un plano y *P* un punto del plano que no está en *a*, entonces hay solo una línea paralela a *a* que pasa por *P* en el plano.

Una forma equivalente de este postulado (a veces conocida como axioma de Playfair) afirma que, para cualquier línea recta y para cualquier punto que no esté en dicha línea, existe una única línea recta que pasa por dicho punto y es paralela a la primera recta (como muestra la figura de arriba). Aquí, rectas *paralelas* serían dos líneas rectas coplanares que no se cortan (y recordemos que mis "rectas" son entidades completamente prolongadas, y no los "segmentos de línea recta" de Euclides).

Una vez que tenemos el postulado de las paralelas, podemos proceder a establecer la propiedad necesaria para la existencia de un cuadrado. Si una recta transversal a un par de líneas rectas corta a estas de modo que los ángulos internos a un lado de la transversal suman dos ángulos rectos, entonces se puede demostrar que las líneas que forman el par son realmente paralelas. Además, se sigue inmediatamente que cualquier otra transversal al par tiene exactamente la misma propiedad angular. Esto es lo que necesitábamos para el argumento dado antes para la construcción de nuestro cuadrado.



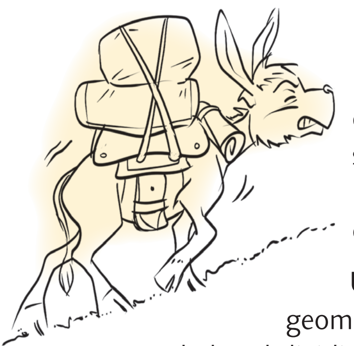
Construcción de un cuadrado.

Vemos que es precisamente el postulado de las paralelas el que debemos utilizar para demostrar que nuestra construcción da realmente un cuadrado, con todos sus ángulos rectos y todos sus lados iguales. Sin el postulado de las paralelas, no podemos establecer que existen realmente los cuadrados (en el sentido habitual de tener todos sus ángulos rectos).

Puede parecer que es una mera cuestión de pedantería matemática el preocuparse por cuáles son exactamente las hipótesis necesarias para proporcionar una "prueba rigurosa" de la existencia de un objeto tan obvio como un cuadrado. ¿Por qué deberíamos interesarnos en cuestiones tan pedantes, cuando un "cuadrado" es simplemente esa figura familiar que todos conocemos? Bien, pronto veremos que Euclides dio realmente pruebas de una extraordinaria perspicacia al preocuparse por tales cuestiones. La pedantería de Euclides está relacionada con una cuestión profunda que tiene mucho que decir sobre la geometría real del universo, y en más de una forma.

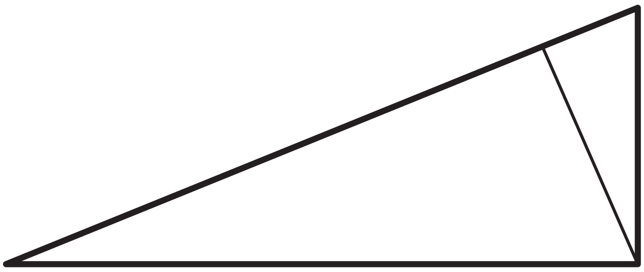
En particular, no es en absoluto obvio que existan "cuadrados" físicos a una escala cosmológica en el universo real. Esta es una cuestión que se tiene que resolver mediante la observación y, por el momento, la evidencia parece contradictoria, como veremos más adelante incluso si llegamos al análisis armónico.

LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS POR ÁREAS SEMEJANTES



En la próxima sección volveremos a la trascendencia matemática que tiene el hecho de no dar por supuesto el postulado de las paralelas. Las cuestiones físicas relevantes serán examinadas si llegamos a la geometría hiperbólica en el universo de Minkowski. Pero antes de discutir tales cuestiones, será instructivo dirigir nuestra atención a la otra demostración del teorema de Pitágoras que ya habíamos prometido con anterioridad.

Una de las formas más sencillas de ver que la afirmación de Pitágoras es cierta en la geometría euclídea es considerar la configuración consistente en el triángulo rectángulo dado subdividido en dos triángulos más pequeños por una recta perpendicular a la hipotenusa trazada desde el ángulo recto (figura siguiente).



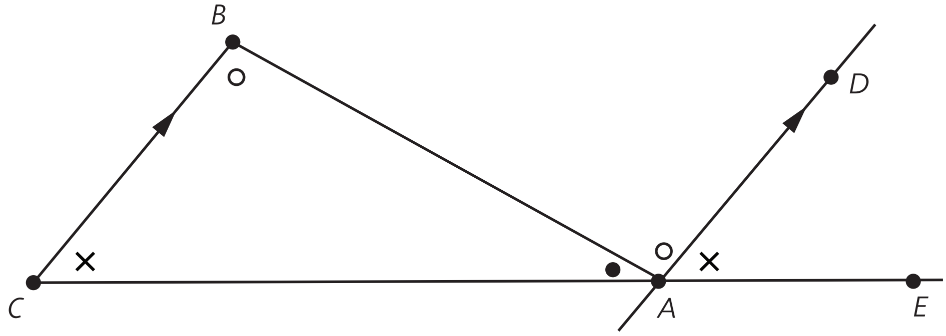
Demostración del teorema de Pitágoras utilizando triángulos semejantes. Tómese un triángulo rectángulo y trácese una perpendicular desde su ángulo recto a su hipotenusa. Los dos triángulos en el que ahora está dividido el triángulo original tienen áreas cuya suma es la del triángulo original. Los tres triángulos son semejantes, de modo que sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus hipotenusas respectivas. De ello se sigue el teorema de Pitágoras.

Ahora tenemos tres triángulos: el original y los dos en que este ha sido subdividido. Evidentemente, el área del triángulo original es la suma de las áreas de los dos más pequeños.

Ahora es sencillo ver que estos tres triángulos son semejantes entre sí. Esto significa que todos ellos tienen la misma forma (aunque diferentes tamaños), es decir, se obtienen unos a partir de otros mediante una dilatación o contracción uniforme, junto con un movimiento rígido. Esto se sigue porque cada uno de los tres triángulos posee exactamente los mismos ángulos, en cierto orden.

Cada uno de los dos triángulos más pequeños tiene un ángulo en común con el más grande, y uno de los ángulos de cada triángulo es un ángulo recto. El tercer ángulo también debe coincidir porque la suma de los ángulos de cualquier triángulo es siempre la misma. Ahora bien, una propiedad general de las figuras planas semejantes es que sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus correspondientes dimensiones lineales. Para cada triángulo, podemos considerar que esta dimensión lineal es el lado más largo, es decir, su hipotenusa. Notemos que la hipotenusa de cada uno de los triángulos más pequeños coincide con uno de los lados (no hipotenusa) del triángulo original. Así pues, se sigue al mismo tiempo (del hecho de que el área del triángulo original es la suma de las áreas de los otros dos) que el cuadrado de la hipotenusa del triángulo original es realmente la suma de los cuadrados de los otros dos lados: ¡el *teorema de Pitágoras*!

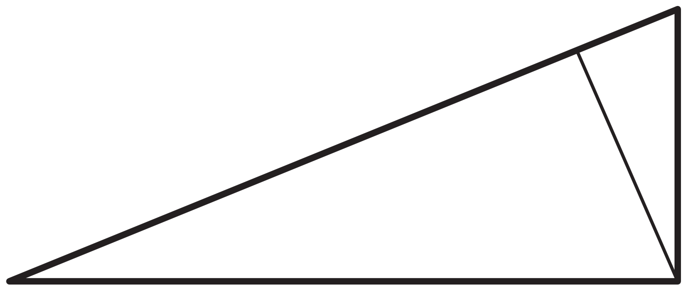
Una vez más, tendremos que examinar algunas hipótesis concretas que intervienen en este argumento. Un ingrediente importante de este es el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo tiene siempre el mismo valor. Este valor de la suma es, por supuesto, 180°, pero Euclides hubiera dicho "dos ángulos rectos". La descripción matemática "natural" y más moderna consiste en decir que los ángulos de un rectángulo, en la geometría de Euclides, suman π. Esto supone utilizar radianes para la medida absoluta de un ángulo, donde el símbolo para el grado, " ° ", cuenta como $\pi/180$, de modo que podemos escribir $180° = \pi$. La demostración habitual se representa en la figura siguiente.



Demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo *ABC* es π (= 180° = dos ángulos rectos). Prolónguese *CA* hasta *E*; dibújese *AD* paralela a *CB*. Se sigue del postulado de las paralelas que los ángulos *EAD* y *ACB* son iguales y que los ángulos *DAB* y *CBA* son iguales. Puesto que los ángulos *EAD*, *DAB* y *BAC* suman π, también lo hacen los ángulos *ACB*, *CBA* y *BAC*.

Prolonguemos *CA* hasta *E* y tracemos una recta *AD* que pasa por *A* y es paralela a *CB*. Entonces (como se sigue del postulado de las paralelas), los ángulos *EAD* y *ACB* son iguales, y también lo son *DAB* y *CBA*. Puesto que los ángulos *EAD*, *DAB* y *BAC* suman π (o 180°, o dos ángulos rectos), así deben hacerlo también los tres ángulos *ACB*, *CBA* y *BAC* del triángulo, tal como queríamos demostrar. Pero veamos que aquí se ha utilizado el postulado de las paralelas.

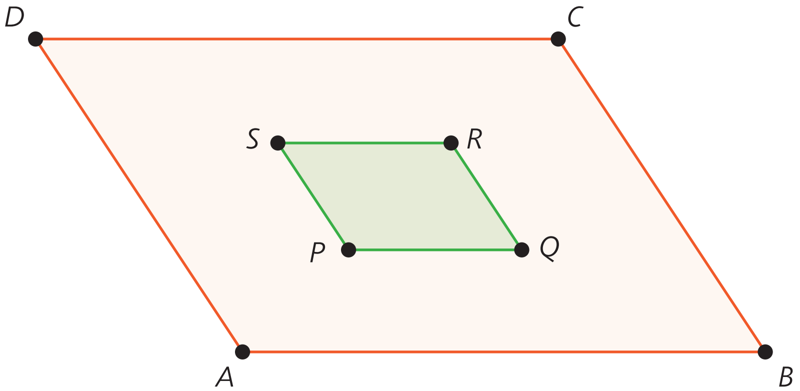
Esta demostración del teorema de Pitágoras también hace uso del hecho de que las áreas de figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de cualquier medida lineal de sus tamaños. (Aquí escogemos la hipotenusa de cada triángulo como representación de su medida lineal.) Este hecho no solo depende de la existencia misma de figuras semejantes de diferentes tamaños –que en el caso de los triángulos de la figura siguiente



se han establecido utilizando el postulado de las paralelas–, sino también de algunas cuestiones más sofisticadas que se relacionan con el modo en que definimos realmente el “área” para formas no rectangulares. Estas cuestiones generales se abordan en términos de procedimientos de paso al límite y no queremos entrar por el momento en esta clase de discusión. Nos llevará a cuestiones más profundas relacionadas con el tipo de números que se utilizan en geometría. Volveremos a la cuestión más adelante.

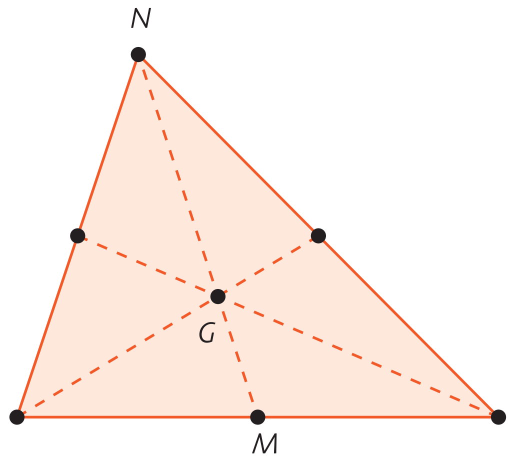
Un mensaje importante de la discusión de las secciones precedentes es que el teorema de Pitágoras parece depender del postulado de las paralelas. ¿Es así realmente? Supongamos que el postulado de las paralelas fuera falso. ¿Significa eso que el propio teorema de Pitágoras podría ser falso? ¿Tiene sentido semejante posibilidad? Tratemos de abordar la cuestión de lo que sucedería si se admite que el postulado de las paralelas sea considerado falso. Parecerá que estemos entrando en un mundo de fantasía, en el que la geometría que aprendimos en la escuela se pone patas arriba. Así es, pero también encontraremos que aquí hay un objetivo más profundo.

En el paralelogramo *ABCD* se toman los respectivos baricentros *P*, *Q*, *R* y *S* de los triángulos *DAB*, *ABC*, *BCD* y *CDA*. Mostrar que *PQRS* es un paralelogramo que se puede obtener mediante una homotecia de razón $\frac{1}{3}$ aplicada a *ABCD*.



Solución

Primero revisemos el concepto de baricentro y su propiedad fundamental. El baricentro de un triángulo es el punto *G* de intersección de sus medianas y divide a estas en la relación 2:1.



En la figura precedente, *M* es el punto medio del lado opuesto al vértice *N*, es decir, *MN* es una mediana del triángulo siendo:

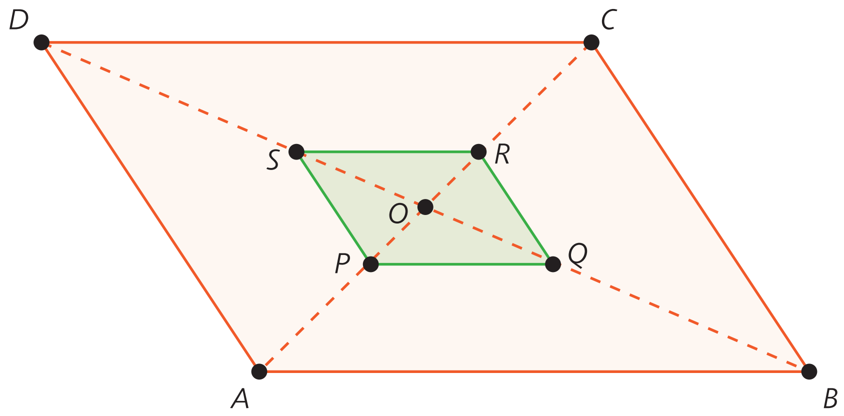
$$NG = 2 \cdot GM$$

o bien:

$$GM = \frac{1}{3} \cdot NM,,$$

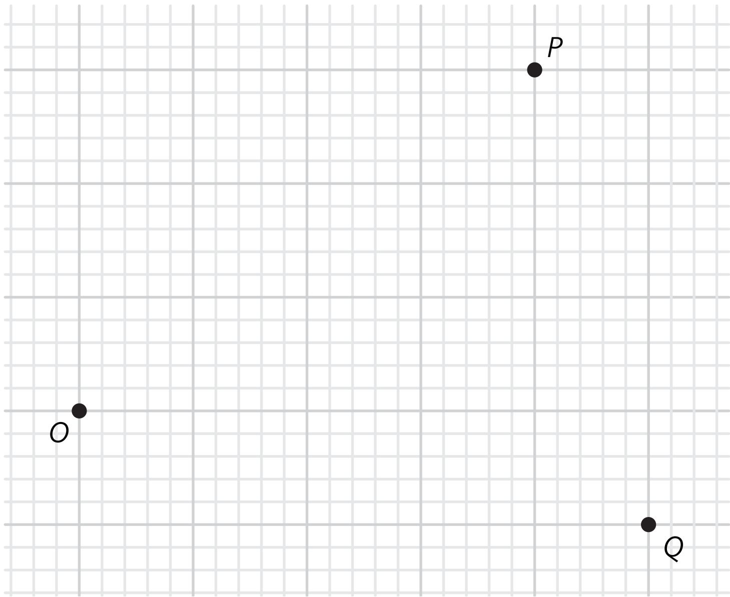
lo que significa que *G* puede obtenerse aplicando a *N* la homotecia con centro en *M* y razón $\frac{1}{3}$.

Volviendo al problema, si se tiene en cuenta que, por tratarse de un paralelogramo, las diagonales de *ABCD* se cortan en sus puntos medios que indicamos con *O*, resulta que *BO* es mediana de *ABC*, *CO* es mediana de *BCD*, *DO* es mediana de *CDA* y *AO* es mediana de *DAB*.



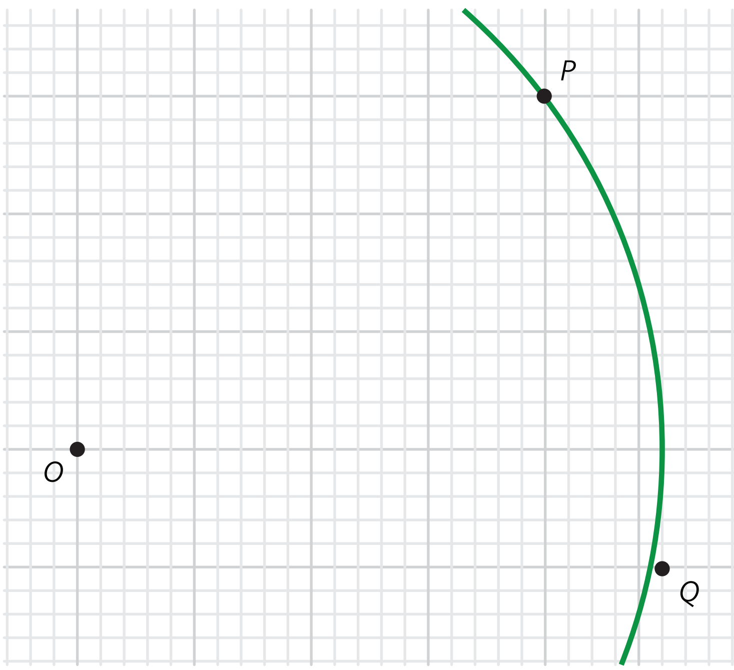
La homotecia con centro en O y razón $\frac{1}{3}$ transforma A, B, C y D en P, Q, R y S, respectivamente.

Sean los puntos *O*, *P* y *Q* en la cuadrícula, como indica la figura. La circunferencia con centro *O* que pasa por *P*, ¿pasa por Q?

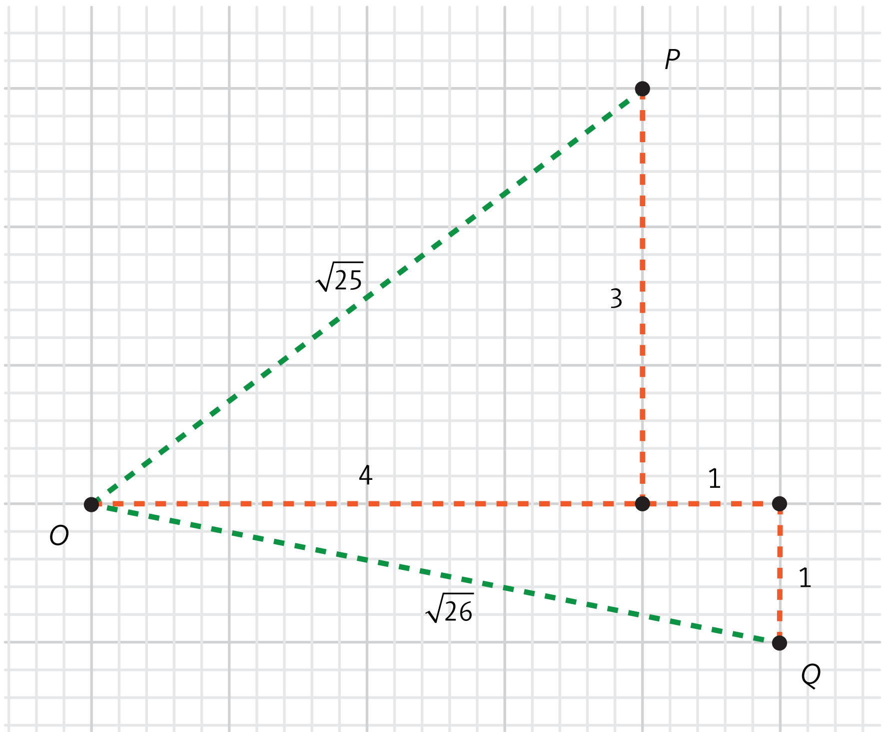


Solución

Si trazamos con GeoGebra dicha circunferencia, vemos que esta no pasa por *Q*.



Para ver que el dibujo de GeoGebra es correcto, medimos las distancias desde *O* hasta *P* y desde *O* hasta *Q*, tomando como unidad de medida la longitud de un lado de los cuadrados de la cuadrícula y usando el *teorema de Pitágoras*.



Esto muestra que, efectivamente, la circunferencia no pasa por Q.