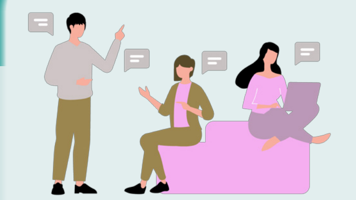
# Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

7ª época • Nº 5 • 22 de mayo de 2025

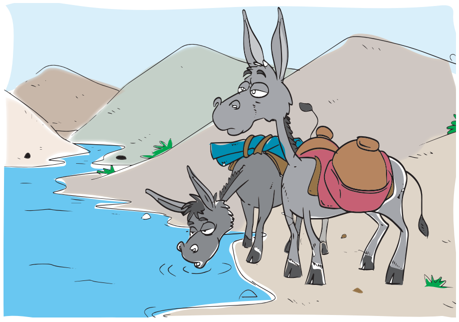



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

## *I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas*

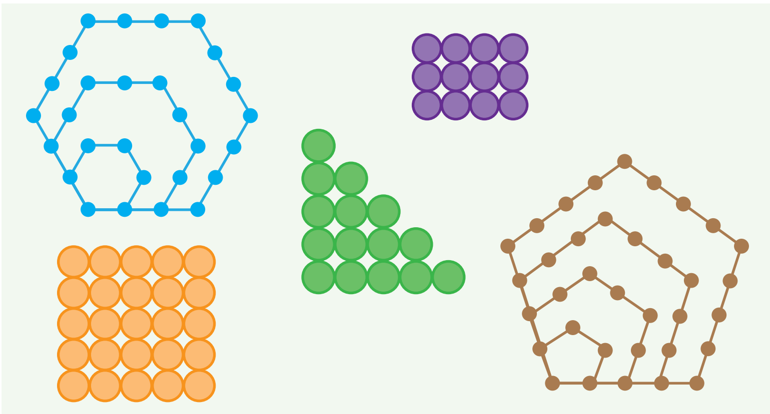
*¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?*

### *En la epoca heroica de la matemática*



Demócrito de Abdera (Abdera, Tracia, c. 460 a. C.-370 a. C.) fue un filósofo y polímata griego, fundador del atomismo y maestro de Protágoras. El campo de sus intereses fue amplio, pero es especialmente recordado por su concepción atomista de un universo compuesto únicamente por átomos y vacío. Se lo ha considerado como "el padre de la física" o "el padre de la ciencia moderna". Lo evocamos por sus valoraciones en su época: "Antes preferiría descubrir una causa que ganar el reino de Persia".

### LOS NÚMEROS FIGURADOS



Ejemplos de números figurados.

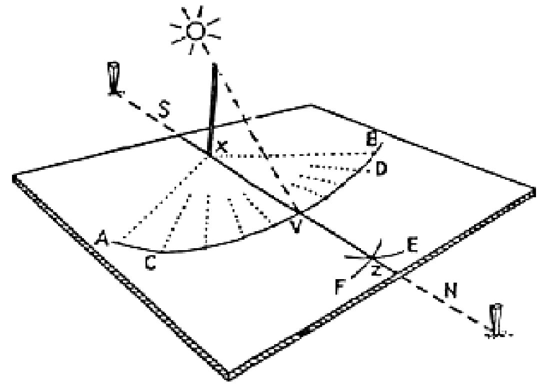
Lo que atentamente entretejieron los pitagóricos fue la idea de número en su pensamiento, que puede ilustrarse muy bien por su interés en los números figurados. Aunque no se pueda formar ningún triángulo con menos de tres puntos, sí es posible construir triángulos con un número de puntos mayor, como con seis, diez o quince puntos. Los números tales como tres, seis, diez, quince y, en general, los números dados por la fórmula

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

recibieron el nombre de números triangulares, y el diseño triangular que representa al número diez, la sagrada tetractis, rivalizó en veneración con el pentágono en la teoría de números pitagórica. Había además

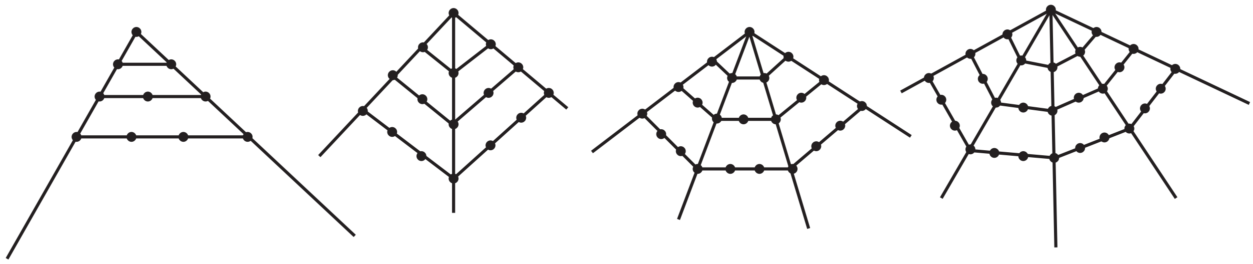
* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

muchas otras categorías de números privilegiados, desde luego; los sucesivos números cuadrados se obtenían sumando




Antiguo reloj de sol.

las sucesiones 1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2$n$ – 1), en las que cada uno de los números impares que aparecen sumados se consideraba como una distribución de puntos en forma de "*gnomon*" (el antiguo reloj de sol babilónico) situado a lo largo de dos lados contiguos del cuadrado de puntos anterior (véase la figura siguiente).



De aquí, la palabra *gnomon* (relacionada en un principio con la palabra para "saber") pasó a verse asociada a los mismos números impares. La suma de una sucesión de números pares de la forma 2 + 4 + 6 + 8 + … + + 2$n$ = $n$($n$ + 1) da lugar a lo que los griegos llamaron un *número oblongo*, cada uno de los cuales es el doble de un número triangular.

**Recordemos.** Un número oblongo es el resultado de multiplicar dos números naturales consecutivos. Por ejemplo, 42 es un número oblongo porque 42 = 6 x 7. Algunas características de los números oblongos son:

- Todos los números oblongos son pares, excepto el 2, que es el único que es primo.
- El $n$-ésimo número oblongo es el doble del $n$-ésimo número triangular.
- El número de elementos de una matriz cuadrada que no están en su diagonal principal es siempre un número oblongo.

Las distribuciones de puntos pentagonales representan los números pentagonales, que vienen dados por la sucesión

$$N = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

y los números hexagonales se obtienen a su vez de la sucesión

$$N = 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

y así, de una manera análoga, se van obteniendo los números poligonales de todos los órdenes. Este proceso se puede ampliar fácilmente a distribuciones de puntos en el espacio tridimensional, lográndose entonces los *números poliédricos*. Se dice que Filolao, entusiasmado con estas ideas, sostenía que

"**Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser concebido ni conocido**".

Esta afirmación de Filolao parece haber sido una especie de dogma de la escuela pitagórica, y así aparecieron historias acerca del descubrimiento de algunas leyes simples de la música por Pitágoras, a quien se atribuye el haberse dado cuenta por vez primera de que si las *longitudes de las cuerdas vibrantes* se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, tales como la de dos a tres (para la quinta) o como la de tres a cuatro (para la cuarta), entonces los tonos producidos serán armoniosos.

En otras palabras, si una cuerda emite la nota C al ser tañida, entonces una cuerda análoga de longitud doble emitirá la nota C una octava más baja, y los tonos entre estas dos notas los emitirán cuerdas cuyas longitudes vengan dadas por razones intermedias: 16:9 para la D; 8:5 para la E; 3:2 para la F; 4:3 para la G; 6:5 para la A; y 16:15 para la B, en orden ascendente. Aquí nos encontramos quizá con las primeras leyes cuantitativas de la acústica, y probablemente incluso con las más antiguas de todas las leyes cuantitativas de la física.

Los pitagóricos primitivos hicieron gala de una imaginación tan audaz que extrapolaron rápidamente sus resultados para sacar la conclusión de que los cuerpos celestes emitían análogamente en sus movimientos tonos armoniosos, la *armonía de las esferas*. La ciencia pitagórica, en general, al igual que la matemática pitagórica, parece haber sido una curiosa mezcla de pensamiento riguroso y de especulación fantástica.

La teoría que afirma la esfericidad de la Tierra se le ha atribuido frecuentemente a Pitágoras, pero, en caso de ser correcta tal atribución, lo que no sabemos es si esta conclusión estaba basada en la observación física (quizá de constelaciones nuevas observadas por Pitágoras en sus viajes hacia el sur) o simplemente en la imaginación. La idea misma de que el universo es un "cosmos", es decir, un todo armoniosamente ordenado, parece haber sido también una contribución pitagórica relacionada con la anterior, idea que, en su época, bien poca base podía tener en la observación directa, pero que ha resultado ser enormemente fructífera para el desarrollo de la astronomía.

Cuando nos sonreímos al conocer las antiguas fantasías numéricas, deberíamos ser al mismo tiempo conscientes del impulso que estas fantasías dieron al desarrollo, tanto de la matemática como de la ciencia en general; de hecho, los pitagóricos estuvieron sin duda entre los primeros que creyeron que los fenómenos de la naturaleza podrían entenderse por medio de la matemática.

## LA TEORÍA DE PROPORCIONES

Proclo, citando quizá del libro de Eudemo, atribuye a Pitágoras dos descubrimientos matemáticos concretos: 1) la construcción de los poliedros regulares, y 2) la teoría de proporciones, y aunque es discutible hasta qué punto tenemos que tomar esta afirmación literalmente, es muy probable al menos que refleje correctamente la dirección del pensamiento pitagórico. La teoría de proporciones encaja claramente en el marco general de los primitivos intereses matemáticos de los griegos, y no es difícil encontrar una probable fuente de inspiración; sabemos que Pitágoras aprendió en Mesopotamia tres medias, la aritmética, la geométrica y la subcontraria (llamada más tarde *armónica*), así como la *proporción áurea* que relaciona dos de ellas: el primero de dos números es a su media aritmética como su media armónica es al segundo de ellos. Esta relación es la esencia del algoritmo babilónico para el cálculo de raíces cuadradas, luego la información es por lo menos plausible.

En algún momento, sin embargo, los pitagóricos generalizaron este esquema añadiéndole siete medias nuevas para reunir un total de diez: si $b$ es la media entre $a$ y $c$, con $a < c$, entonces las tres cantidades están relacionadas por una de las diez ecuaciones siguientes:

1) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}$; 2) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}$; 3) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$; 4) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}$; 5) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a}$;

6) $\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$; 7) $\frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$; 8) $\frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$; 9) $\frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$; 10) $\frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$.

Las tres primeras ecuaciones son, obviamente, las ecuaciones que nos definen las medias aritmética, geométrica y armónica, respectivamente.

Es difícil asignar una fecha al estudio pitagórico de las medias, y lo mismo pasa con respecto a la clasificación de los números. El estudio de las proporciones de igualdades de razones sin duda debió formar parte al principio de la aritmética o teoría de números pitagórica, aunque más tarde las cantidades $a$, $b$ y $c$ que figuran en tales proporciones debieron ser consideradas ya probablemente como magnitudes geométricas, pero el período durante el cual tuvo lugar el cambio no está claro.

Además de los números poligonales que ya hemos mencionado y de la clasificación de los números en pares e impares, los pitagóricos introdujeron en algún momento los conceptos de número *impar-impar* y *par-impar*, según que el número en cuestión fuera el producto de dos números impares o de uno par y uno impar, y así se reservó a veces el nombre de número par para las potencias enteras de dos; y hacia la época de Filolao, o incluso antes, parece haber adquirido su importancia la distinción entre números primos y compuestos.

Espeusipo, sobrino de Platón y sucesor suyo a la cabeza de la Academia, afirmaba que el diez era "perfecto" para los pitagóricos debido a que, entre otras cosas, es el entero $n$ más pequeño para el cual hay exactamente tantos números primos como compuestos entre 1 y $n$.

En ocasiones, a los números primos se les llamó también *lineales*, en vista de que la única manera de representarlos por puntos es en una sola dimensión, y los neopitagóricos excluían generalmente al dos de la lista de los primos basándose en la idea de que el uno y el dos no son en realidad verdaderos números, sino solo lo generadores de los números impares y pares, respectivamente. La primacía de los números impares sobre los pares se suponía establecida, entre otras causas, por el hecho de que impar + impar = par, mientras que par + par sigue siendo par.

Se les ha atribuido a los pitagóricos la regla para la formación de ternas pitagóricas dada por $\frac{m^2-1}{2}$, $m$, $\frac{m^2+1}{2}$, con $m$ un entero impar; pero en vista de que esta regla está tan estrechamente relacionada con los ejemplos babilónicos, quizá no se trate de un descubrimiento independiente. También se atribuyen a los pitagóricos, aunque la época en cuestión es dudosa, las definiciones de número perfecto, abundante y deficiente, según que la suma de los divisores propios de dicho número sea igual, mayor o menor que el número mismo.

Según esta definición, el número perfecto más pequeño es 6, seguido de 28. Es probable que estas definiciones fueran ya un desarrollo tardío en el pensamiento pitagórico, como sugiere la temprana veneración por el número diez y no por el seis. Si esto es así, entonces la teoría de los "números amigos", relacionada con la anterior, debió ser también un desarrollo tardío.

Dos números naturales $a$ y $b$ se llaman *números amigos* si $a$ es igual a la suma de los divisores propios de $b$ y $b$ es la suma de los divisores propios de $a$; el par más pequeño con esta propiedad está formado por los números 220 y 284.

## CENTROS DE ACTIVIDAD

La historia de los orígenes de la matemática griega se tiene que centrar necesariamente en las llamadas escuelas jónica y pitagórica, y en los representantes principales de cada una de ellas, Tales y Pitágoras, aunque la reconstrucción del pensamiento se basa solamente en informaciones fragmentarias y en tradiciones elaboradas durante los siglos posteriores. En cierta medida, la situación continúa siendo la misma a lo largo del siglo v a. C. No nos ha quedado prácticamente ningún documento matemático, ni científico en general, anterior a la época de Platón en el siglo iv a. C.

Sin embargo, durante la segunda mitad del siglo circularon persistentemente informaciones bastante coherentes relativas al pequeño grupo de matemáticos que, según toda evidencia, estaban profundamente interesados en algunos problemas que fueron la base de la mayor parte de los desarrollos posteriores de la geometría. Por lo tanto, nos referiremos a este período bajo el nombre de la *Época Heroica de la Matemática*, puesto que raramente antes ni después se ha enfrentado el hombre con problemas de importancia tan fundamental con tan pocas herramientas.

La actividad matemática ya no se centró como antes de una manera casi exclusiva en aquellas dos regiones que constituían más o menos los límites opuestos del mundo griego, sino que floreció a lo largo y a lo ancho del Mediterráneo. En lo que es hoy el sur de Italia vivieron Arquitas de Tarento (que nació hacia el 428 a. C.) e Hipaso de Metaponto (que floreció hacia el 450 a. C.); en Abdera de Tracia nos encontramos a Demócrito (que nació aproximadamente el 460 a. C.); más cerca del centro del mundo griego, en la península del Ática, vivía Hipias de Elis (que nació también en torno al 460 a. C.); y en las proximidades de Atenas vivieron, en diversas épocas de esta crítica segunda mitad del siglo v a. C., tres pensadores originarios de otras regiones del mundo heleno: Hipócrates de Quíos (fl. ca. 430 a. C.), Anaxágoras de Clazómenas (†428 a. C.) y Zenón de Elea (fl. ca. 450 a. C.). La obra de estos siete matemáticos nos permitirá dar una descripción de los cambios fundamentales que tuvieron lugar en la matemática un poco antes del 400 a. C.

## Pericles

Pericles (c. 495 a. C.- 429 a. C.) fue un importante jurista, magistrado, general, político y orador ateniense en los momentos de la edad de oro de la ciudad (en concreto, entre las guerras médicas y las del Peloponeso). Era hijo de Jantipo, artífice de la victoria helena sobre los persas en la batalla de Mícala (479 a. C.), y de Agaristé, sobrina del famoso legislador ateniense Clístenes y miembro de la familia aristocrática de los Alcmeónidas. Fue el principal estratega de Grecia. Se lo llamaba el Olímpico, debido a su imponente voz y sus excepcionales dotes de orador.


Busto de mármol de Pericles y reconstitución de la Acrópolis de Atenas.

Pericles tuvo tanta influencia en la sociedad ateniense que Tucídides, un historiador coetáneo, lo denominó como “el primer ciudadano de Atenas”. Pericles convirtió a la Confederación de Delos en el Imperio ateniense, y dirigió a sus compatriotas durante los primeros dos años de la guerra del Peloponeso. El periodo durante el cual gobernó Atenas a veces es conocido como *el Siglo de Pericles*, aunque puede abarcar fechas tan tempranas como las guerras médicas o tan tardías como el siglo siguiente.

Pericles fomentó las artes y la literatura. Por esta razón Atenas tiene la reputación de haber sido el centro educacional y cultural de la Antigua Grecia. Comenzó un ambicioso proyecto que llevó a la construcción de la mayoría de las estructuras supervivientes de la Acrópolis en Atenas, incluyendo el Partenón, así como de otros monumentos como los Propileos. Su programa embelleció la ciudad y sirvió para exhibir su gloria, a la vez que dio empleo a muchos ciudadanos.

Además, Pericles defendió hasta tal punto la República griega que algunos de sus críticos lo consideran populista. Asimismo, consintió gran importancia a los dioses, fundamentalmente a Atenea, pero sin olvidar a su pueblo. Por ello, dedicó un templo a dicha diosa, además de estar presente en numerosas monedas e, incluso, un frontón.

Fue rival de Cimón en 459 a. C. y jefe del partido republicano. Después de la muerte de Cimón, condenó a Tucídides (no el historiador, sino un político hijo de Melesías) al ostracismo. Fundó en sólidas bases la potencia naval y colonial de Atenas, sometió la isla de Eubea en 446 a. C., la de Samos en 440 a. C., e hizo que Atenas tomara parte en la guerra del Peloponeso.

Discípulo de Anaxágoras de Clazómenas y de Zenón de Elea, fue amigo de Fidias y atrajo a Atenas al arquitecto Hipodamo de Mileto, al sofista Protágoras y al historiador Heródoto. En su época brillaron Sófocles y Eurípides, máximas figuras del teatro griego, y se destacó el círculo de Aspasia.

### Heródoto de Halicarnaso

Heródoto de Halicarnaso (484 a. C.-425 a. c.) fue un historiador y geógrafo griego, tradicionalmente considerado como el padre de la historia en el mundo occidental y el primero en componer un relato razonado y estructurado de las acciones humanas. Dedicó parte de su vida a efectuar viajes para obtener la información y los materiales que le permitieron escribir una obra de gran valor histórico y literario.

## EL SIGLO DE PERICLES Y ANAXÁGORAS DE CLAZÓMENAS

El siglo V a. C. constituyó un período crucial en la historia de la civilización del mundo occidental, ya que se inició con la derrota de los invasores persas de Grecia y se cierra con la victoria de Esparta sobre Atenas. Entre estos dos sucesos memorables se desarrolló la esplendorosa época de Pericles, con su apogeo literario y artístico.

La prosperidad y la atmósfera intelectual de Atenas durante la mayor parte de este siglo contribuyeron a atraer a pensadores de todas partes del mundo griego y se logró de esta manera una especie de síntesis de diversas tendencias. De Jonia llegaron hombres como Anaxágoras, con una mentalidad práctica; del sur de Italia vinieron otros, como Zenón, con inclinaciones más metafísicas. Demócrito de Abdera mantenía una concepción materialista del mundo, mientras que Pitágoras defendía en la Magna Grecia una actitud idealista, tanto en ciencia como en filosofía.



Dichos de Pericles.

En Atenas podían encontrarse entonces seguidores entusiastas de las antiguas y de las nuevas ramas del saber, que iban de la cosmología a la ética. Se vivía allí inmerso en un atrevido espíritu de libertad de investigación que a veces entraba en conflicto con las costumbres establecidas. Así, en particular, Anaxágoras fue encarcelado en Atenas por impiedad, por afirmar que el Sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo, tan grande por lo menos como todo el Peloponeso, y que la Luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba su luz del Sol.

Anaxágoras es un buen representante del espíritu de investigación racional de que hablábamos, puesto que consideraba como el fin de su vida el estudio de la naturaleza del universo, determinación que le llegaba heredada de la antigua tradición jónica de la que Tales había sido el fundador. El entusiasmo intelectual de Anaxágoras lo compartieron muchos de sus paisanos por medio de la lectura de uno de sus libros, *Sobre la Naturaleza*, primer *bestseller* científico en el mundo, que podía comprarse en Atenas por solo un dracma.

Anaxágoras fue maestro de Pericles, que consiguió al fin que su mentor fuera liberado de la cárcel. Sócrates se vio atraído en su juventud por las ideas científicas de Anaxágoras, pero el "tábano" ateniense encontró al fin menos satisfactoria la concepción naturalista jónica que la búsqueda de las verdades éticas.

La ciencia griega había echado sus raíces en un tipo de curiosidad altamente intelectualizada, que contrasta a veces con el carácter de inmediatez utilitaria del pensamiento prehelénico; Anaxágoras representaba claramente la motivación griega típica, el deseo de conocer. También en matemáticas la actitud griega difería radicalmente de la de las culturas potámicas anteriores; aquí, el contraste se pudo ver ya de una manera clara al estudiar las contribuciones atribuidas generalmente a Tales y a Pitágoras, y continúa haciéndose notar en las informaciones que tenemos, más fiables esta vez, sobre lo que ocurría en Atenas durante la época heroica.

Anaxágoras era, en principio, más un filósofo de la naturaleza que un matemático, pero su mente inquisidora lo llevó a participar también en el estudio de problemas matemáticos. Así, Plutarco nos cuenta que mientras estaba en prisión, se ocupó del problema de la cuadratura del círculo, y aquí nos encontramos con la primera mención a un problema que iba a fascinar a los matemáticos durante más de 2000 años.

No tenemos más detalles relativos al origen del problema ni a las reglas que lo regían, pero algo más tarde se sobreentendía ya que el cuadrado buscado, de área exactamente igual a la del círculo, había de ser construido utilizando la regla y el compás únicamente. Aquí podemos ver un tipo de matemática muy distinta de la de los egipcios y los babilonios, en la que ya no se trata de la aplicación de una ciencia de los números a una faceta de la vida práctica, sino de una cuestión puramente teórica en la que el papel fundamental lo juega la sutil distinción entre la mayor o menor precisión de un proceso aproximado y la exactitud de pensamiento.

El problema matemático del que, al parecer, se ocupó en esta ocasión Anaxágoras no tenía más interés para el ingeniero que los otros problemas físicos que planteó acerca de la estructura última de la materia. En el mundo griego, la matemática estaba más estrechamente relacionada con la filosofía que con los problemas prácticos de la vida ordinaria, y esta afinidad ha persistido hasta hoy.

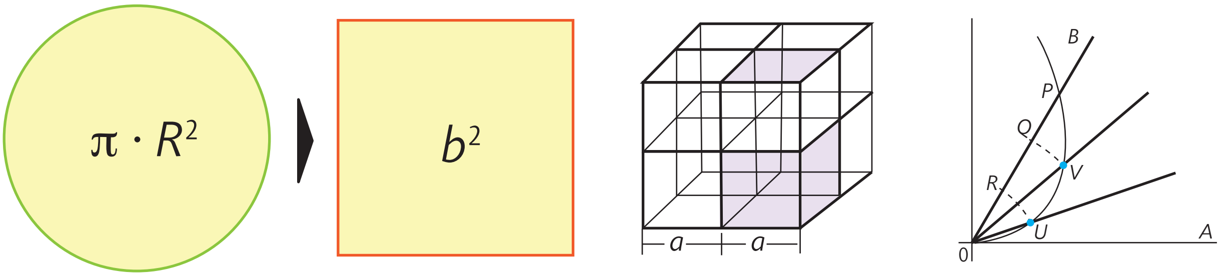
## LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

Anaxágoras murió en 428 a. C., el mismo año en que nacía Arquitas, exactamente un año antes del nacimiento de Platón y un año después de la muerte de Pericles. Se dice que Pericles murió de la peste que se llevó quizá como una cuarta parte de la población ateniense, y la profunda impresión que produjo esta catástrofe fue probablemente el origen de un segundo problema matemático famoso (si no es más antiguo aún). Según las informaciones que nos han llegado, se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo.

El oráculo de Apolo en Delos.

Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; obviamente, el altar había aumentado ocho veces su volumen en vez de dos. Este es, según la leyenda, el origen del problema de la "duplicación del cubo", que se suele conocer también desde entonces como el "problema de Delos": dada la arista de un cubo, construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero.

Por la misma época circuló, aún por Atenas, un tercer problema famoso; dado un ángulo arbitrario, construir, con regla y compás únicamente, un ángulo igual a un tercio del ángulo dado.

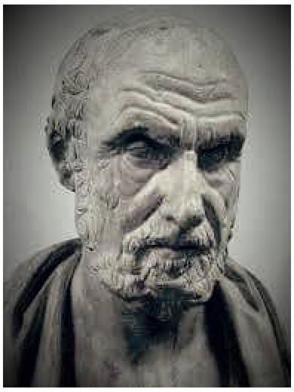


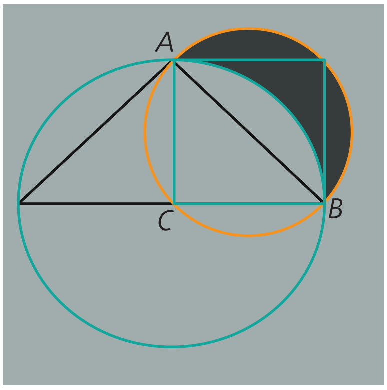

Los tres problemas clásicos de la Antigüedad: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Estos tres problemas, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, han sido conocidos desde entonces como “los tres problemas clásicos” de la Antigüedad. Más de 2 200 años más tarde se iba a demostrar que todos estos tres problemas eran insolubles utilizando únicamente la regla y el compás. No obstante, la parte mejor de la matemática griega y también buena parte del pensamiento matemático muy posterior vinieron motivadas por los esfuerzos para lograr lo imposible o, si estos esfuerzos fracasaban, para modificar las reglas del problema. la “época heroica» fracasó en su objetivo inmediato, respetando las reglas fijadas, pero los esfuerzos realizados se vieron coronados con un éxito brillante desde otros puntos de vista.

## LA CUADRATURA DE LAS LÚNULAS

Hipócrates de Quíos era algo más joven que Anaxágoras y provenía de la misma parte, aproximadamente, del mundo griego. Este Hipócrates no debe confundirse con su contemporáneo más famoso, el médico Hipócrates de Cos; tanto Cos como Quíos son islas del archipiélago del Dodecaneso, pero Hipócrates de Quíos abandonó su patria hacia el 430 a. C. para trasladarse a Atenas en su condición de mercader. Según nos cuenta Aristóteles, Hipócrates se mostró menos hábil que Tales y perdió su dinero en Bizancio por un fraude, aunque otros dicen que fue atacado y robado por los piratas.






Busto de Hipócrates de Quíos y su geometría (cuadratura de las lúnulas).

En cualquier caso, la víctima nunca lamentó más tarde el incidente, considerándolo más bien como una suerte, porque a consecuencia de este se dedicó al estudio de la geometría, en el que cosechó notables éxitos; una historia, en fin, típica de la "época heroica".

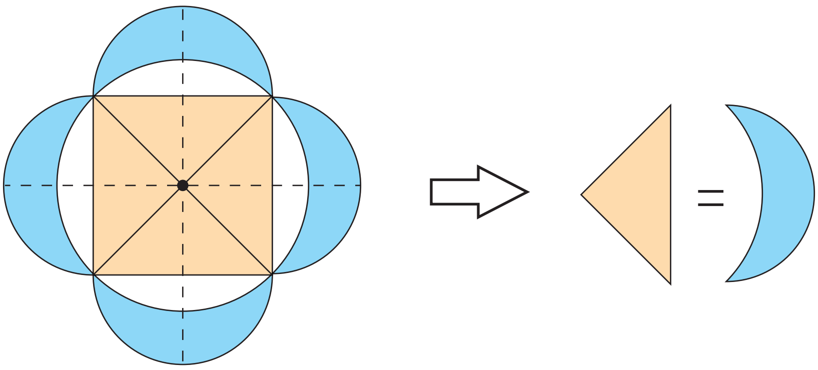
Proclo nos informa de que Hipócrates escribió unos *Elementos de geometría*, anticipándose en más de un siglo a los conocidos *Elementos* de Euclides; sin embargo, el texto de Hipócrates se ha perdido, lo mismo que otro que al parecer fue escrito por León, un personaje asociado más tarde a la escuela platónica, pero el libro de Hipócrates lo llegó a conocer aún Aristóteles. De hecho, hay que decir ya que no ha sobrevivido ningún tratado matemático del siglo V, pero lo que sí conocemos es un fragmento sobre Hipócrates que Simplicio (fl. ca. 520) dice haber copiado literalmente de la *Historia de la matemática* de Eudemo (perdida también).

Este breve pasaje, lo más próximo a una fuente original de la matemática de la época que conozcamos, describe una parte de la obra de Hipócrates que se refiere a la cuadratura de las lúnulas. Una *lúnula* es una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos; parece evidente pues, que el problema de la cuadratura de las lúnulas debió surgir del de la cuadratura del círculo, y el fragmento de Eudemo atribuye a Hipócrates, de hecho, el siguiente teorema:

"**Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases**".

La información transmitida por Eudemo afirma que Hipócrates demostró esto evidenciando en primer lugar que dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros. Hipócrates adopta aquí los conceptos y el lenguaje de la teoría de proporciones, que jugó un papel tan importante en el pensamiento pitagórico; de hecho, algunos creen que Hipócrates se hizo pitagórico. La escuela pitagórica de Crotona fue suprimida (posiblemente por su carácter secreto, o quizá más bien debido a sus tendencias políticas conservadoras), pero la dispersión de sus seguidores por todo el mundo griego solo sirvió para extender la influencia de la escuela, influencia que afectó sin duda a Hipócrates de alguna manera, directa o indirecta.

El teorema de Hipócrates sobre los círculos y los cuadrados circunscritos parece ser la primera afirmación precisa sobre la medida de figuras curvilíneas en el mundo griego.

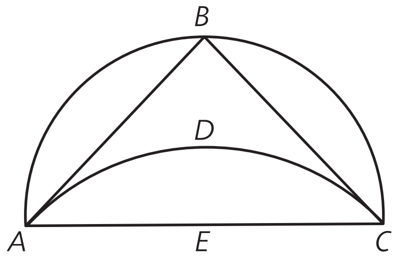


Eudemo, al parecer, creía que Hipócrates había dado una demostración del teorema, pero lo cierto es que en aquella época (digamos hacia 430 a. C.) una demostración rigurosa parece muy improbable, ya que la teoría de proporciones se encontraba casi con toda seguridad en una etapa de su desarrollo que la hacía aplicable únicamente a magnitudes conmensurables.

La demostración que da Euclides en XII. 2 proviene de Eudoxo, un matemático que vivió a medio camino entre Hipócrates y Euclides. Sin embargo, dado que gran parte del material contenido en los dos primeros libros de Euclides pudo derivarse de los pitagóricos, parecería razonable suponer que las formulaciones al menos contenidas en gran parte de los libros III y IV de los *Elementos* provengan de la obra de Hipócrates.

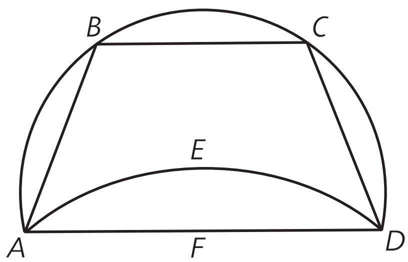
Por otra parte, si Hipócrates consiguió dar efectivamente una demostración de su teorema sobre los círculos, puede haber sido el responsable de la introducción del método indirecto de demostración en la matemática; es decir, la razón entre dos círculos o bien es igual a la razón entre los cuadrados construidos sobre sus diámetros o no lo es, luego por una *reductio ad absurdum* a partir de la segunda de las dos posibilidades quedaría demostrada la única alternativa posible.

A partir de su teorema sobre los círculos, Hipócrates consiguió fácilmente la primera cuadratura rigurosa de una figura curvilínea en la historia de la matemática. Comenzó con un semicírculo circunscrito a un triángulo rectángulo isósceles y sobre la base (la hipotenusa) construyó un segmento circular semejante a los segmentos circulares determinados por los catetos del triángulo rectángulo, como muestra la figura siguiente.




Como los segmentos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus bases, a partir del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo se obtiene que la suma de los dos segmentos circulares menores es igual al segmento circular mayor. Por lo tanto, la diferencia entre el semicírculo de diámetro *AC* y el segmento *ADCE* será igual al triángulo *ABC*; es decir, la lúnula *ABCD* es exactamente igual al triángulo *ABC*, y como el triángulo *ABC* es igual al cuadrado construido sobre la mitad de *AC*, se ha conseguido la cuadratura de la lúnula.

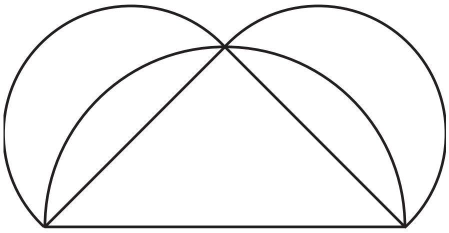
Eudemo nos describe también la cuadratura de otra lúnula por Hipócrates, lúnula que se obtiene a partir de un trapecio isósceles *ABCD* inscrito en un círculo y tal que el cuadrado construido sobre la base o lado más largo *AD* sea igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los tres lados iguales más cortos *AB*, *BC*, *CD* (figura siguiente).



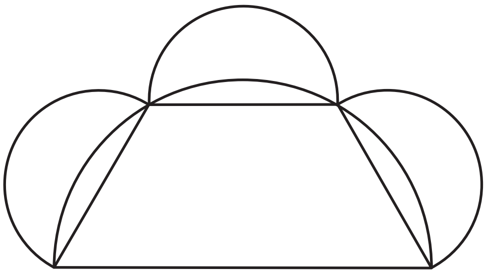
Entonces, si se construye sobre el lado *AD* un segmento circular *AEDF* semejante a los que determinan los tres lados iguales en el círculo, la lúnula *ABCDE* es igual al trapecio *ABCDF*.

Un hecho que nos garantiza que pisamos un terreno relativamente firme desde el punto de vista histórico al describir las cuadraturas de las lúnulas por Hipócrates es el de que hay otros escritores, además de Simplicio, que nos hablan de estos resultados. Simplicio vivió en el siglo VI, y depende en sus fuentes no solo de Eudemo (320 a. C.), sino también de Alejandro de Afrodisias, uno de los principales comentaristas de Aristóteles. Alejandro describe otras dos cuadraturas además de las que hemos mencionado más arriba.

1) Si construimos tres semicírculos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, entonces la suma de las lúnulas que se forman sobre los catetos es igual al triángulo (figura de abajo).



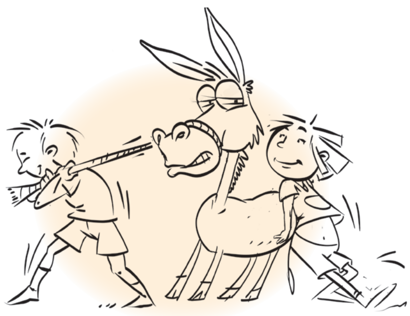
2) Si construimos sobre el diámetro de un semicírculo como base un trapecio isósceles con los otros tres lados iguales (figura siguiente),



y si se construyen sobre estos tres lados tres semicírculos, entonces el trapecio es igual a la suma de cuatro figuras curvilíneas: las tres lúnulas iguales y un semicírculo sobre uno de los tres lados iguales del trapecio. De la segunda de estas cuadraturas se sigue que si pudieran cuadrarse las lúnulas en cuestión entonces podría cuadrarse también el semicírculo y, por lo tanto, el círculo.

Esta conclusión parece haber animado a Hipócrates y a sus contemporáneos y seguidores inmediatos a continuar trabajando en esta línea con la esperanza de conseguir al fin cuadrar el círculo.

## LAS PROPORCIONES CONTINUAS



Las cuadraturas de Hipócrates tienen una gran importancia, no tanto con intentos dirigidos a la cuadratura del círculo cuanto como reflejo del nivel de matemática de la época, ya que nos muestran hasta qué punto dominaban los matemáticos atenienses de la época las transformaciones de áreas y las proporciones. En particular, no tenían evidentemente ninguna dificultad en convertir un rectángulo de lados $a$ y $b$ en un cuadrado, lo que requería hallar la media proporcional o geométrica entre los segmentos $a$ y $b$; es decir que si debía verificarse la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, los geómetras de la época sabían construir fácilmente el segundo $x$.

Era natural, pues, que estos mismos geómetras intentaran generalizar el problema al de interpolar dos medias entre dos magnitudes dadas $a$ y $b$; es decir, dados dos segmentos $a$ y $b$, intentaran construir otros dos segmentos $x$ e $y$ tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Se dice que Hipócrates fue el primero en reconocer que este problema es equivalente al de la duplicación del cubo si tomamos $b = 2a$, ya que, entonces, la proporción continua conduce, por eliminación de $y$, a la conclusión de que $x^3 = 2a^3$.

Hay tres interpretaciones distintas de las consecuencias que debió sacar Hipócrates de sus cuadraturas de las lúnulas. Algunos lo han acusado de creer que podría cuadrar todas las lúnulas y, por tanto, también el círculo; otros estiman que conocía perfectamente las limitaciones que podía tener su obra, dado que solo consideraba algunos tipos de lúnulas muy concretos. Y por último, hay al menos un historiador que ha sostenido que Hipócrates sabía muy bien que no había conseguido cuadrar el círculo, pero que intentó engañar a sus conciudadanos haciéndoles creer que lo había logrado.

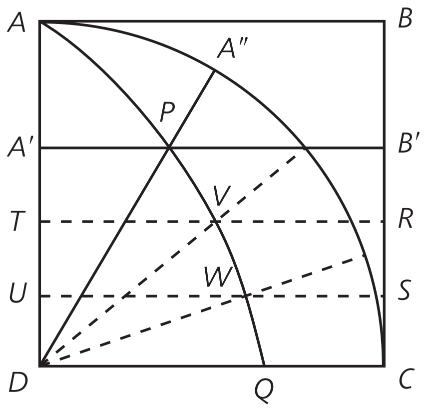
Existen algunas otras cuestiones menores, además, relativas a las contribuciones de Hipócrates a la matemática, tales como la de que se le ha atribuido, aunque con cierta inseguridad, el uso de las letras en las figuras geométricas por vez primera. Es interesante hacer observar que, mientras que Hipócrates hizo progresos en dos de los tres problemas famosos, no parece haberse ocupado de la trisección del ángulo, estudiada un poco más tarde por Hipias de Elis.

## HIPIAS DE ELIS

Durante la segunda mitad del siglo V a. C. floreció en Atenas un grupo de maestros profesionales muy distintos de los pitagóricos. A sus discípulos, Pitágoras les había prohibido aceptar ningún tipo de pago por compartir sus conocimientos con los demás, mientras que los sofistas, que así se llamaban estos maestros, se ganaban abiertamente la vida enseñando a sus conciudadanos, y no solo en cuestiones intelectualmente honradas, sino también en el arte de "hacer que lo peor parezca lo mejor".

Hasta cierto punto, la acusación de superficialidad dirigida contra los sofistas era merecida, pero esto no debiera ocultar el hecho de que ellos solían estar informados ampliamente sobre muy diversos temas, y de que algunos de ellos hicieron contribuciones importantes al saber de su época. Entre estos últimos estaba Hipias, natural de Elis, capital de la Élide, y que desarrolló su actividad en Atenas durante la segunda mitad del siglo V a. C. Se trata de uno de los primeros matemáticos respecto de los cuales encontramos información en los diálogos de Platón.

En estos diálogos podemos ver, por ejemplo, que Hipias se jactaba de haber ganado más dinero que cualesquiera otros dos sofistas juntos. Se dice que escribió mucho, desde matemáticas a oratoria –pero no ha sobrevivido ninguna de sus obras–, y también que tenía una notable memoria, que era hábil en multitud de oficios manuales y presumía también de un inmenso saber. A este Hipias (pues era un hombre muy corriente entonces en Grecia) parece que se debe la introducción en la matemática de la primera curva aparte de la circunferencia y la recta. Proclo y otros comentaristas le atribuyen la invención de la curva que se conoce desde entonces como *trisectriz* o *cuadratriz de Hipias*. Esta curva se dibuja de la manera siguiente: considérese un cuadrado *ABCD* (figura siguiente),




en el que el lado *AB* se traslada con velocidad uniforme desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con *DC*, mientras que, durante el mismo intervalo de tiempo, el lado *DA* gira uniformemente en el sentido de las agujas de un reloj desde su posición inicial hasta llegar a coincidir con *DC*. Si las posiciones de los dos segmentos móviles en un instante cualquiera vienen dadas por *A′B′* y *DA′′*, respectivamente, y si *P* es el punto de intersección de *A′B′* con *DA′′*, entonces el lugar geométrico de *P* a lo largo del movimiento será la trisectriz de Hipias, la curva *APQ* en la figura. Una vez construida esta curva, es posible hacer fácilmente la trisección de un ángulo cualquiera.

Sea, por ejemplo, *PDC* el ángulo a trisecar; simplemente tenemos que dividir en tres partes iguales los segmentos *B´C* y *A’D* por medio de los puntos *R*, *S*, *T* y *U*; si las rectas *TR* y *US* cortan respectivamente a la trisectriz en *V* y *W*, entonces las rectas *DV* y *DW* dividirán al ángulo *PDC* en tres partes iguales, en virtud de la propiedad que define a la trisectriz.

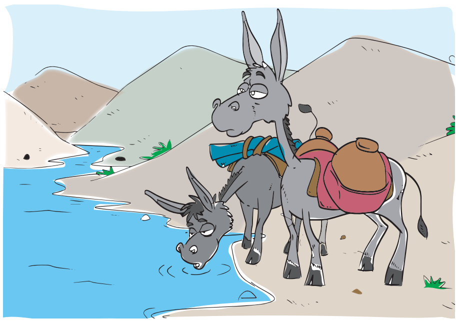
La curva de Hipias, se la suele conocer también como la *cuadratriz*, dado que puede ser utilizada además para cuadrar el círculo. Es imposible para nosotros decidir si Hipias mismo era consciente o no de esta aplicación; algunos historiadores han conjeturado que sí, conocía este método de cuadratura, pero que no fue capaz de justificarlo; y como esta misma cuadratura por medio de la curva de Hipias fue dada más tarde y de una manera detallada por Dinóstrato, nos ocuparemos de ella más adelante.

Hipias fue contemporáneo de Sócrates (399 a. C.) y disponemos de una imagen muy poco halagüeña de él debida a la pluma de Platón, que nos lo presenta como un sofista típico, insustancial, vanidoso y codicioso. Se dice que Sócrates describía a Hipias como elegante y erudito, pero jactancioso y superficial; y Platón satiriza en su diálogo *Hipias* su ostentación de conocimientos. Jenofonte, por su parte, incluye en su *Memorabilia* una imagen desfavorable de Hipias como un hombre que se consideraba a sí mismo un experto en todo, desde la historia y la literatura a la ciencia y los oficios manuales; sin embargo, para juzgar estas informaciones con cierta imparcialidad debemos tener en cuenta que Platón y Jenofonte se mostraron opuestos de una manera irreconciliable a los sofistas en general.

Conviene recordar también que tanto Protágoras, el “padre de los sofistas, como Sócrates, que encabezó la oposición a este movimiento, mostraron cierta hostilidad hacia la matemática y la ciencia en general. Platón nos presenta el contraste entre las personalidades de Hipias y de Sócrates, pero se podría conseguir casi el mismo contraste comparando a Hipias con otro de sus contemporáneos, el matemático pitagórico Arquitas de Tarento.

# II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

## ¿Cuándo y cómo empezaron… las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

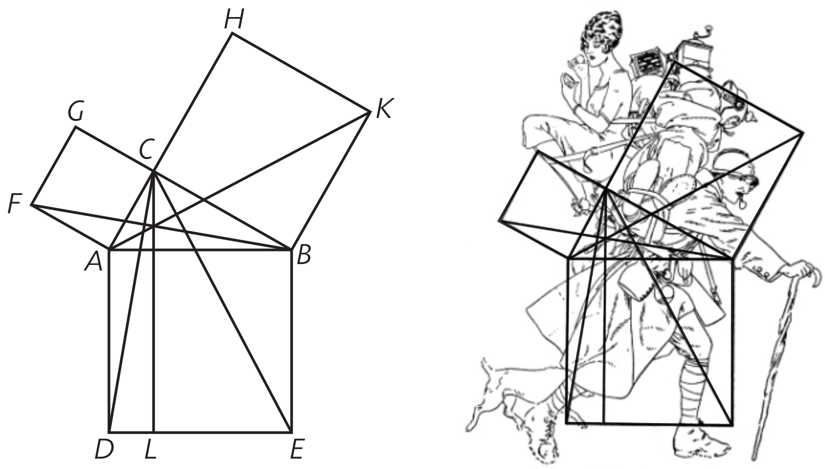


*Continúa de Leñitas Geométricas 7ª época Nº 4, Cap. “Euclides de Alejandría”*

## EL CONTENIDO DEL *LIBRO I* DE EUCLIDES

En las tres primeras proposiciones Euclides pone un gran cuidado en demostrar laboriosamente que una interpretación muy restrictiva del postulado 3 implica, no obstante, el libre uso de los compases, como se hace normalmente en geometría elemental para transportar distancias. Sin embargo, para los niveles modernos de rigor las hipótesis euclídeas son lamentablemente inadecuadas y, de hecho, Euclides hace uso frecuentemente de postulados tácitos en sus demostraciones. En la primera proposición de los *Elementos*, por ejemplo, supone sin demostración que las dos circunferencias se cortarán en un punto; para una situación como esta y otras análogas es necesario añadir a los postulados uno equivalente a un principio de continuidad. Por otra parte, los postulados 1 y 2, tal como fueron formulados por Euclides, no garantizan ni la unicidad de la línea recta que pasa por dos puntos distintos, ni siquiera su infinitud; simplemente aseguran que hay por lo menos una y que no tiene puntos extremos; sin embargo, Euclides utiliza libremente en sus demostraciones la unicidad y la infinitud. Es, desde luego, demasiado fácil criticar la labor de un hombre a la luz de los desarrollos posteriores, olvidando que “suficiente en el día es su rigor”. En su época, los *Elementos* fueron evidentemente el desarrollo lógico de la matemática elemental más finamente razonado que se había reunido jamás, y tuvieron que pasar 2.000 años antes de que se diera una formulación más cuidadosa. Durante este largo intervalo de tiempo, la mayoría de los matemáticos consideraron lógicamente satisfactorio y pedagógicamente adecuado el tratamiento.

La mayor parte de las proposiciones del *Libro I* de los *Elementos* son bien conocidas para cualquiera que haya seguido un curso de geometría a nivel de enseñanza media. Entre ellas están los conocidos teoremas sobre congruencia de triángulos (pero sin ningún axioma que justifique el método de superposición), sobre las construcciones elementales con regla y compás, sobre las desigualdades relativas a ángulos y lados de un triángulo, sobre las propiedades de las rectas paralelas (con la consecuencia principal de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos) y de los paralelogramos (incluida la construcción de un paralelogramo con ángulos dados y con área igual a un triángulo dado o a una figura rectilínea dada). El libro concluye en las proposiciones 47 y 48 con las demostraciones del teorema de Pitágoras y su recíproco. La demostración del teorema que da Euclides no es la que se da normalmente en los libros de texto actuales, en los cuales se aplican proporciones simples entre los lados de los triángulos semejantes que se forman al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa. Se supone que Euclides evitó esta demostración debido a las dificultades que trae consigo en el caso de inconmensurabilidad. Solamente al llegar al *Libro V* se dedica Euclides a establecer la ya bien fundamentada teoría de proporciones, y hasta ese momento evita en lo posible el uso de proporciones. Para demostrar el teorema de Pitágoras, Euclides utilizó en cambio una bella demostración en la que se usa una figura que se ha descrito a veces como un molino de viento o como una cola de pavo real, o bien como la silla de la novia (figura siguiente).

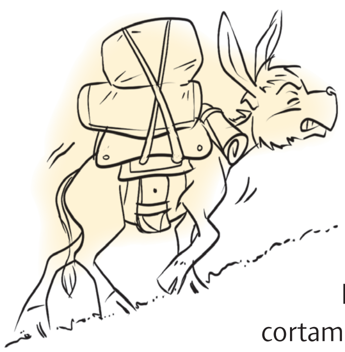



El diagrama de la "silla de la novia" del teorema 1.47 de los *Elementos* de Euclides, en el contexto de la Primera Guerra Mundial. Publicado en *The Mathematical Gazette*, 1922-1923.

La demostración se consigue probando que el cuadrado sobre el lado *AC* es igual al doble del triángulo *FAB* o bien al doble del triángulo *CAD*, es decir, al rectángulo *AL*; y que el cuadrado sobre el lado *BC* es igual al doble del triángulo *ABK* o bien al doble del triángulo *BCE*, es decir, al rectángulo *BL*. Luego, la suma de los cuadrados es igual a la suma de los rectángulos, es decir, al cuadrado sobre *AB*. Se supone que esta demostración es original de Euclides y se han hecho muchas conjeturas acerca de la forma que ofrecerían las demostraciones anteriores. A partir de la época de Euclides se han sugerido una infinidad de demostraciones alternativas.

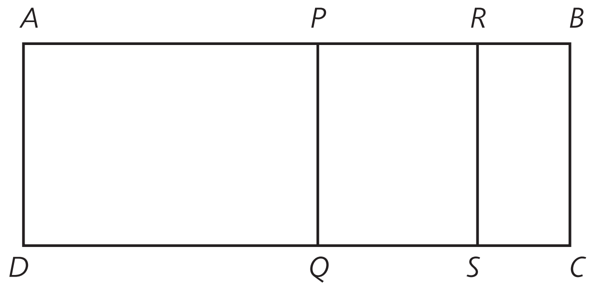
Es de notar, a cuenta de los méritos de Euclides, que el teorema de Pitágoras vaya seguido de inmediato por una demostración del recíproco. **Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados sobre los otros dos lados, entonces el ángulo que forman estos otros dos lados es un ángulo recto.** Es frecuente en algunos libros de texto modernos que los ejercicios que siguen al teorema de Pitágoras requieran no el teorema propiamente dicho, sino el recíproco no demostrado aún. Puede haber muchos defectos menores en los *Elementos*, pero el libro tiene todas las virtudes lógicas mayores.

## EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA



El *Libro II* de los *Elementos* es uno de los más cortos, con solo 14 proposiciones, ninguna de las cuales juega ningún papel en los libros de texto modernos; sin embargo, en la época de Euclides este libro tenía una gran importancia. Esta aguda discrepancia entre los puntos de vista antiguo y moderno es fácil de explicar: hoy, nosotros tenemos un álgebra simbólica y una trigonometría que han reemplazado a sus equivalentes geométricos griegos.

Por ejemplo, la proposición 1 del *Libro II* nos dice que "Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores". Este teorema, que nos asegura que $AD(AP + PR + RB) = AD \times AP + AD \times PR + AD \times RB$ (ver la figura siguiente),




no es otra cosa que una formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la aritmética, que se conoce actualmente como *propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma*:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

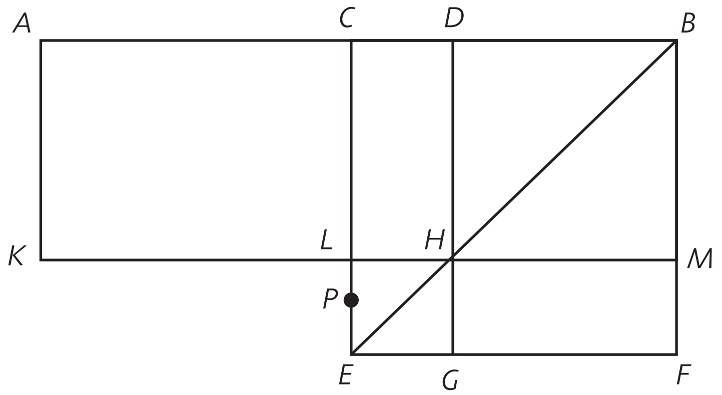
En otros libros posteriores de los *Elementos* (los V y VII) encontramos demostraciones de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación. Mientras que nosotros representamos las magnitudes por letras que se sobreentiende son números (conocidos o desconocidos) con las cuales operamos usando las reglas algorítmicas del álgebra, en tiempos de Euclides las magnitudes se representaban como segmentos de línea recta obedeciendo a los axiomas y teoremas de la geometría.

A veces se dice que los griegos no tenían álgebra, pero esa es una afirmación evidentemente falsa; tenían el *Libro II* de los *Elementos*, que es un álgebra geométrica que les servía más o menos para los mismos fines que nuestra álgebra simbólica. No hay ninguna duda de que el álgebra moderna facilita enormemente la manipulación de relaciones entre magnitudes, pero no es menos cierto que un geómetra griego versado en los 14 teoremas del "álgebra" de Euclides era mucho más hábil aplicando estos teoremas a la práctica de la medida que un geómetra experto de hoy; el álgebra geométrica de los antiguos no era una herramienta ideal, pero estaba muy lejos de ser ineficaz.

La proposición 4 de Euclides, "Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos", es una manera prolija de decir que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, pero su evidencia visual para un muchacho alejandrino ha debido ser mucho más viva de lo que nunca pueda llegar a ser su contrapartida algebraica moderna. Es cierto que su demostración en los *Elementos* ocupa como una página y media, pero ¿cuántos estudiantes de enseñanza media podrían dar actualmente una demostración detallada y rigurosa de la regla algebraica que aplican tan resueltamente? Y lo mismo ocurre con la proposición II.5 de los *Elementos* que contiene lo que podría parecer una circunlocución impracticable de $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

"Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad".

El diagrama que usa Euclides en este contexto jugó un papel clave en el álgebra griega; por lo tanto, lo reproduciremos con algunas explicaciones adicionales. Si en la figura siguiente



llamamos $AC = CB = a$ y $CD = b$, entonces el teorema nos dice que $(a + b) \times (a - b) + b^2 = a^2$. La comprobación geométrica de esta afirmación no es difícil. Sin embargo, el verdadero significado de la figura no está tanto en la demostración del teorema como en el habitual uso que hicieron los algebristas geométricos griegos de figuras análogas. El mayor orgullo de un escolar moderno en álgebra es la resolución de la ecuación de segundo grado (que podrá ser capaz o no de justificar) y para el escolar griego el equivalente geométrico sería alguna figura parecida a la anterior.

Si se le pidiera a un estudiante griego construir un segmento $x$ con la propiedad expresada por la condición $ax - x^2 = b^2$, donde $a$ y $b$ son segmentos tales que $a > 2b$, dibujaría la línea $AB = a$ y hallaría su punto medio $C$; entonces, levantaría en $C$ una perpendicular $CP$ de longitud igual a $b$; con centro en $P$ y radio $\frac{a}{2}$ dibujaría una circunferencia que corte a $AB$ en un punto $D$.

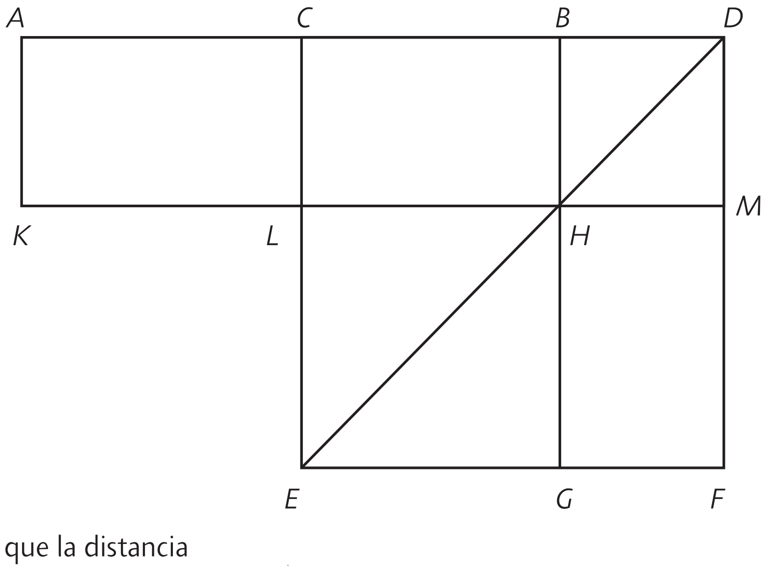
A continuación, construiría sobre $AB$ un rectángulo $ABMK$ de anchura $BM = BD$ y completaría el cuadrado $BDHM$: este cuadrado es del área $x^2$ que cumple la condición expresada por la ecuación cuadrática. Tal como lo denominaban los griegos, hemos aplicado al segmento $AB = a$ un rectángulo $AH = ax - x^2$, que es igual a un cuadrado dado $b^2$ y que se queda corto (del rectángulo $AM$) en un cuadrado $DM$. La demostración de esto viene dada por la proposición anterior (la II.5), según la cual es claro que el rectángulo $ADHK$ es igual al polígono cóncavo $CBFGHL$, es decir, difiere de $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ en el cuadrado $LHGE$ cuyo lado es, por construcción,

$$CD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}.$$

De una manera completamente análoga se resuelve la ecuación cuadrática $ax + x^2 = b^2$, mediante el uso, esta vez, de II.6:

"**Si se corta en dos partes iguales una línea recta y se le añade (siempre en línea recta) otra línea recta, entonces el rectángulo contenido por el total (con la línea recta añadida) y la línea recta añadida, junto con el cuadrado construido sobre la mitad, es igual al cuadrado construido sobre la línea recta formada por la mitad y la línea recta añadida**".

Esta vez tenemos que "aplicar a una línea recta dada $AB = a$ un rectángulo $AM = ax + x^2$, que sea igual a un cuadrado dado $b^2$ y exceda al rectángulo $AH$ en un cuadrado $x^2$". Ver la figura siguiente:

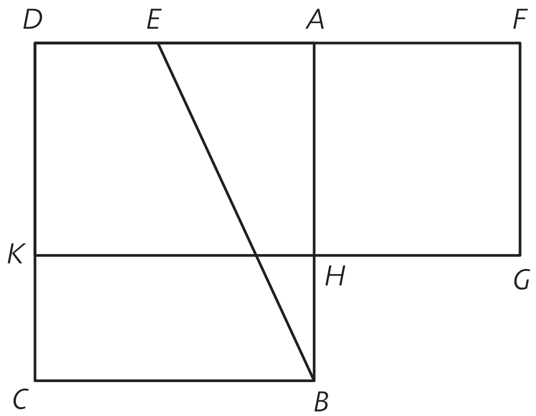



En este caso se tiene que la distancia

$$CD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

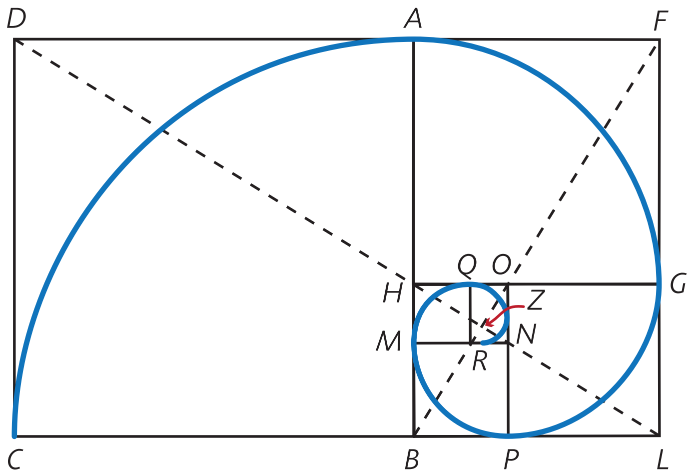
Como por la proposición se sabe que el rectángulo $AM = ax + x^2$ más el cuadrado $LG = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ es igual al cuadrado $CF = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$, se sigue que se verifica la condición $ax + x^2 = b^2$. Las proposiciones siguientes del *Libro II* son variaciones sobre el álgebra geométrica que acabamos de ilustrar, con la II.11 como un caso particular importante de la II.6.

Aquí, Euclides resuelve la ecuación $ax + x^2 = a^2$ trazando un cuadrado $ABCD$ de lado $a$, hallando el punto medio $E$ del lado $AD$, trazando $EB$, extendiendo el lado $DA$ hasta $F$ tal que $EF = EB$ y completando el cuadrado $AFGH$ (figura de abajo):




entonces, extendiendo $GH$ hasta que corte a $DC$ en $K$, habremos conseguido aplicar al segmento $AD$ un rectángulo $FK = ax + x^2$ igual al cuadrado dado $AC = a^2$, y que lo "excede" en un cuadrado $x^2$.

La figura usada por Euclides en la proposición II.11 de los *Elementos* y de nuevo en la VI.30 (la figura anterior) es la base de otra figura que aparece en muchos libros modernos de geometría para ilustrar una propiedad iterativa que tiene la sección áurea. Completemos el gnomon $BCDFGH$ de la figura de arriba añadiéndole el punto $L$ para completar el rectángulo $CDFL$, como se muestra en la figura siguiente:




y dentro del rectángulo menor $LBGH$, que es semejante al rectángulo grande $LCDF$, construyamos el gnomon $LBMNOG$ semejante al $BCDFGH$ tomando $GO = GL$. Ahora, dentro del rectángulo $BHOP$, que es semejante a los $CDFL$ y $LBHG$, construyamos el gnomon $PBHQRN$, semejante a los $BCDFGH$ y $LBMNOG$.

Continuando indefinidamente este proceso tendremos una sucesión indefinida de rectángulos semejantes encajados que tienden hacia un punto límite $Z$. Ocurre que este punto $Z$, que, como se ve fácilmente, es el punto de corte de las rectas $FB$ y $DL$, es también el polo de una espiral logarítmica tangente a los lados de los rectángulos en los puntos $C$, $A$, $G$, $P$, $M$, $Q$... Sobre este fascinante diagrama pueden descubrirse otras propiedades sorprendentes.

Las proposiciones 12 y 13 del *Libro II* tienen el interés de que ya anuncian la trigonometría que iba a florecer pronto en Grecia. Reconoceremos en estas proposiciones formulaciones geométricas, primero para un ángulo obtuso y después para un ángulo agudo, de lo que más tarde se iba a llamar *teorema del coseno para triángulos planos*.

**Proposición 12.** En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso.

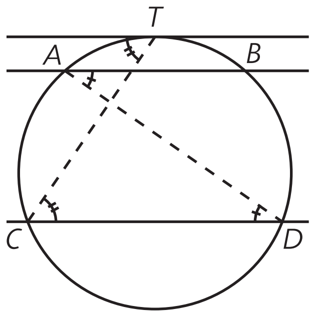
**Proposición 13.** En un triángulo acutángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo agudo en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos dos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular desde el ángulo agudo.

Las demostraciones de las proposiciones 12 y 13 son análogas a las que se hacen hoy en los libros de trigonometría, mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras.

## LOS LIBROS III Y IV

Generalmente se supone que el contenido de los dos primeros libros de los *Elementos* es en gran medida obra de los pitagóricos. Los libros III y IV, por otra parte, están dedicados a la geometría del círculo y aquí el material se supone que fue tomado en su mayor parte de Hipócrates de Quíos.

El contenido de estos dos libros no se diferencia mucho de los teoremas sobre círculos que contienen los libros de texto actuales; así, por ejemplo, la primera proposición del *Libro III* pide construir el centro de un círculo dado, y la última, la proposición 37, es el bien conocido teorema que dice que si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, entonces el cuadrado construido sobre la tangente es igual al rectángulo contenido por la secante completa y su segmento exterior al círculo.




El *Libro IV* contiene 16 proposiciones, la mayoría de ellas muy familiares para los estudiantes modernos, relativas a figuras inscritas o circunscritas a una circunferencia. Los teoremas sobre medida de ángulos se aplazan hasta que se disponga de una teoría de proporciones bien establecida.

## LA TEORÍA DE PROPORCIONES

Los libros más admirados de los trece que componen los *Elementos* han sido el quinto y el décimo, el primero de ellos sobre la teoría general de proporciones y el segundo, sobre la clasificación de los inconmensurables. El descubrimiento de los inconmensurables había provocado una crisis lógica que arrojaba graves dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad, pero la crisis había sido evitada con éxito por medio de los principios enunciados por Eudoxo.

No obstante, los matemáticos griegos tendían a evitar las proporciones, y ya hemos visto que Euclides, por ejemplo, retrasa su uso tanto como puede, sustituyendo una relación entre longitudes que tendría que ser de la forma $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$ por la igualdad de las áreas $xc = ab$. Antes o después, sin embargo, eran necesarias las proporciones, y así Euclides ataca el problema en el *Libro V* de los *Elementos*. Algunos comentaristas van tan lejos como para sugerir que el libro completo, que contiene 25 proposiciones, es obra de Eudoxo, pero esto parece improbable.

Algunas de las definiciones de este libro, tales como la definición de razón, son tan vagas que resultan inútiles, pero la definición 4, en cambio, es esencialmente el axioma de Eudoxo y Arquímedes: “Magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra cuando son capaces, tomando múltiplos, de superar una a la otra”, y la definición 5 de igualdad de razones es precisamente la que hemos dado anteriormente al hablar de la definición de proporcionalidad de Eudoxo.

Si nos sorprenden desprevenidos, podría parecernos el *Libro V* tan superfluo como el *Libro II*, ya que ambos han sido desplazados actualmente por las reglas correspondientes del álgebra simbólica, pero siendo más minuciosos e interesados en la axiomática veremos inmediatamente que el *Libro V* trata de temas de una importancia fundamental para toda la matemática.

El libro comienza con unas cuantas proposiciones que son equivalentes a cosas tales como la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha de la multiplicación respecto de la suma, la distributiva por la izquierda de la multiplicación con respecto a la resta y la propiedad asociativa de la multiplicación $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; a continuación vienen las leyes que rigen el "mayor que" y el "menor que", y las propiedades bien conocidas de las proporciones.

Frecuentemente se suele afirmar que el álgebra geométrica griega no podía superar el segundo grado en geometría plana ni el tercer grado en geometría sólida, pero realmente ese no es el caso; la teoría general de proporciones permitía trabajar con productos de cualquier número de dimensiones, porque una ecuación de la forma $x^4 = abcd$ es equivalente a una que venga expresada en términos de productos de razones de segmentos, tal como $\frac{x}{a} \cdot \frac{x}{b} = \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{x}$.

Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el *Libro V*, Euclides la utiliza en el *Libro VI* para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes. Es notable la proposición 31, que nos da una generalización del teorema de Pitágoras:

"En todo triángulo rectángulo, la figura construida sobre la hipotenusa es igual a las figuras semejantes y análogamente construidas sobre los catetos"; Proclo atribuye esta generalización a Euclides mismo.

El *Libro VI* contiene también, en sus proposiciones 28 y 29, una generalización del método de aplicación de áreas, aprovechando que las bases firmes para la teoría de proporciones establecidas en el *Libro V* le permiten al autor hacer uso libremente del concepto de semejanza, y así los rectángulos del *Libro II* son reemplazados ahora por paralelogramos, y lo que se pide es aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o se quede corto en un paralelogramo semejante a otro dado.

Estas construcciones, como las de II.5-6, son en realidad soluciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas $bx = ac \pm x^2$, sujetas a la restricción (implicada en IX.27) de que el discriminante no sea negativo.

## LA TEORÍA DE NÚMEROS

Los *Elementos* de Euclides son considerados frecuentemente de una manera equivocada como un libro dedicado exclusivamente a la geometría. Ya hemos descrito dos libros, el II y el V, que son casi completamente algebraicos; otros tres libros, el VII, el VIII y el IX, están dedicados a la teoría de números. La palabra "número" para los griegos se refería siempre a lo que nosotros llamamos los *números naturales* o *enteros positivos*. El *Libro VII* comienza con una lista de 22 definiciones, distinguiendo varios tipos de números, par e impar, primo y compuesto, plano y sólido (es decir, el que se puede expresar como producto de dos o de tres factores, respectivamente), y, por último, la definición de *número perfecto* como *aquel que es igual a sus propias partes*.

Los teoremas que aparecen en los libros VII, VIII y IX serán conocidos probablemente para los que hayan seguido un curso elemental de teoría de números, pero el lenguaje en que están hechas las demostraciones no les será familiar, con toda seguridad. A todo lo largo de estos tres libros, cada número se representa por un segmento, y así Euclides hablará de un número como $AB$. (El hallazgo de los inconmensurables había mostrado ya que no todos los segmentos podían asociarse con números enteros, pero el recíproco, que todos los números pueden representarse por segmentos, seguía siendo obviamente verdadero.) Por lo tanto, Euclides no usa las expresiones "es múltiplo de" o "es un factor o divisor de", sino que las sustituye por "está medido por" o "mide a", respectivamente; por ejemplo, un número $n$ está medido por otro número $m$ si existe un tercer número $k$ tal que $n = km$.

El *Libro VII* propiamente dicho empieza con dos proposiciones que constituyen juntas una famosa regla de la teoría de números, que conocemos hoy con el nombre de *algoritmo de Euclides* para hallar el máximo común divisor (o medida) de dos números dados. Consiste en un esquema que sugiere una aplicación inversa y repetida del axioma de Eudoxo. Dados dos números distintos, se resta el menor $a$ del mayor $b$ repetidamente hasta que se obtenga un resto $r_1$ más pequeño que el menor; a continuación, se resta repetidamente a este resto $r_1$ de $a$ hasta obtener un resto $r_2 < r_1$; después se resta repetidamente $r_2$ de $r_1$ y así sucesivamente. Al final, este proceso conducirá a un resto $r_n$ que medirá a $r_{n-1}$, luego a todos los restos anteriores, así como a $a$ y a $b$; este número $r_n$ será el *máximo común divisor* de $a$ y de $b$.

Entre las proposiciones siguientes nos encontramos con equivalentes de teoremas conocidos de la aritmética. Así, la proposición 8 nos dice que si $an = bm$ y $cn = dm$, entonces $(a - c)n = (b - d)m$, y la proposición 24 afirma que si $a$ y $b$ son primos con $c$, entonces $ab$ es primo con $c$. El libro se cierra con una proposición, la 39, que nos da una regla para hallar el *mínimo común múltiplo* de varios números.

El *Libro VIII* es uno de los menos interesantes de los 13 libros de los *Elementos*. Comienza con varias proposiciones acerca de números en proporción continua (o en progresión geométrica) y se dedica después a algunas propiedades sencillas de los cuadrados y los cubos, terminando con la proposición 27: "Números sólidos semejantes tienen uno a otro la razón de un número cúbico a otro número cúbico"; esta proposición expresa simplemente que si tenemos un *número sólido* $ma \cdot mb \cdot mc$ y otro *número sólido semejante* $na \cdot nb \cdot nc$, entonces su razón será la de $m^3 : n^3$, es decir, de un cubo a otro cubo.

## NÚMEROS PRIMOS Y PERFECTOS

El *Libro IX*, último de los tres libros sobre teoría de números, contiene varios teoremas que tienen un interés especial. Entre ellos, el más celebrado es el que expresa la proposición 20: "Los números primos son más que cualquier cantidad fijada de antemano de números primos", es decir, Euclides da aquí la demostración elemental bien conocida de que el número de primos es infinito. La demostración es indirecta, pues lo que se demuestra es que la hipótesis de un número finito de primos conduce a contradicción.

Sea $P$ el producto de todos los números primos, supuesto que solo hay una cantidad finita de ellos, y tomemos el número $N = P + 1$; ahora, $N$ no puede ser primo porque ello estaría en contradicción con la hipótesis de que $P$ era el producto de *todos* los primos, luego $N$ es compuesto y debe ser medido por algún primo $p$; pero $p$ no puede ser ninguno de los factores primos de $P$, porque entonces tendría que ser un factor de 1; luego $p$ tiene que ser un primo distinto de todos los que aparecen multiplicados en $P$, y así la hipótesis de que era el producto de *todos* los primos tiene que ser falsa.

La proposición 35 de este libro contiene una fórmula para hallar una suma de números en progresión geométrica, expresada de una manera elegante pero poco usual: "Si tantos números como queramos están en proporción continua, y se restan del segundo y del último números iguales al primero, entonces, así como el exceso del segundo es al primero, así será el exceso del último a todos los anteriores a él". Esta proposición es, desde luego, equivalente a la fórmula

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que, a su vez, es equivalente a

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

La proposición siguiente, que es la última del *Libro IX*, nos da la conocida fórmula para los números perfectos: "**Si tenemos tantos números como queramos, comenzando por la unidad, y dispuestos en proporciones doble continua, hasta que su suma sea primo, y si se multiplica esta suma por el último, entonces el producto obtenido será un número perfecto**"; es decir, en notación moderna, si $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es perfecto.

La demostración es fácil haciendo uso de la definición de número perfecto dada en el *Libro VII*. Los antiguos griegos conocían los cuatro primeros números perfectos: 6, 28, 496 y 8 128. Euclides no dio una respuesta a la cuestión recíproca de si su fórmula da o no todos los números perfectos; ahora se sabe que todos los números perfectos pares son del tipo exhibido por Euclides, pero el problema de la posible existencia de números perfectos impares es un problema abierto. De las dos docenas de números perfectos conocidos hasta la fecha, todos son pares, pero concluir por una inducción de que todos deben ser pares sería arriesgado.

En las proposiciones que van desde la 21 a la 36 del *Libro IX* hay una unidad que hace suponer que estos teoremas constituyeron alguna vez un sistema matemático autocontenido, posiblemente el más antiguo de la historia de la matemática y que se deriva presumiblemente de mediados o incluso principios del siglo V a. C. Se ha sugerido que las proposiciones 1 a 36 del *Libro IX* fueron tomadas probablemente por Euclides de un libro de texto pitagórico, sin introducir en ellas ningún cambio esencial.

## MÁS SOBRE LOS INCONMENSURABLES

El *Libro X* de los *Elementos* fue, antes de los comienzos del álgebra moderna, el más admirado y el más temido; trata de la clasificación sistemática de los segmentos inconmensurables de las formas $a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm b, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, donde $a$ y $b$, cuando son de la misma dimensión, son conmensurables.

Hoy podríamos considerar este libro como un libro sobre números irracionales de los tipos mencionados, donde $a$ y $b$ son números racionales, pero Euclides consideraba este libro como una parte de la geometría, más bien que de la aritmética, y, de hecho, las proposiciones 2 y 3 reproducen, duplicándolas para magnitudes geométricas, las dos primeras proposiciones del *Libro VII* que se referían a números enteros. Aquí demuestra Euclides que, si se les aplica a dos segmentos distintos el proceso que hemos descrito antes como *algoritmo de Euclides*, y si el resto nunca mide al resto anterior, entonces las magnitudes son *inconmensurables*. La proposición 3 demuestra que cuando se aplica el algoritmo en cuestión a dos magnitudes conmensurables, dará como resultado la mayor posible medida común de los dos segmentos.

El *Libro X* contiene 115 proposiciones, más que ningún otro, la mayoría de las cuales expresan equivalentes geométricos de propiedades de lo que hoy llamamos aritméticamente *irracionales cuadráticos*. Entre estos teoremas los hay que expresan la racionalización de denominadores en fracciones del tipo $\frac{a}{\left(b \pm \sqrt{c}\right)}$ o $\frac{a}{\left(\sqrt{b} \pm \sqrt{c}\right)}$; los segmentos dados por raíces cuadradas, o por raíces cuadradas de sumas de raíces cuadradas, son constructibles con regla y compás tan fácilmente como las combinaciones racionales.

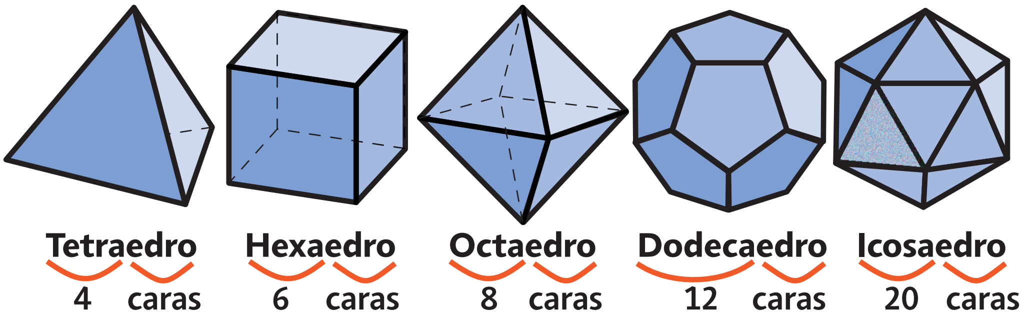
Una razón de que los griegos hicieran un álgebra geométrica en vez de un álgebra aritmética era la de que la primera parecía ser más general que la segunda, en vista de la falta del concepto de número real. Las raíces de la ecuación $ax - x^2 = b^2$, por ejemplo, pueden ser construidas siempre que $a > 2b$. ¿Por qué entonces se había tomado Euclides tantas molestias en demostrar, en las proposiciones 17 y 18 del *Libro X*, las condiciones bajo las cuales las raíces de esta ecuación son conmensurables con $a$?

Allí demostraba que dichas raíces son conmensurables o inconmensurables con $a$ según que $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ y $a$ sean conmensurables o inconmensurables. Se ha sugerido que tales consideraciones indican que los griegos utilizaban sus soluciones de las ecuaciones cuadráticas también para problemas numéricos, tal como hacían los babilonios con sus sistemas de ecuaciones $x + y = a, xy = b^2$; en tales casos sería interesante saber si las raíces van a ser o no van a ser expresables como cocientes de enteros.

Un estudio minucioso de la matemática griega parece suministrar una cierta evidencia de que bajo el barniz geométrico había un mayor interés por el cálculo y las aproximaciones numéricas de lo que dan a entender los tratados clásicos existentes.

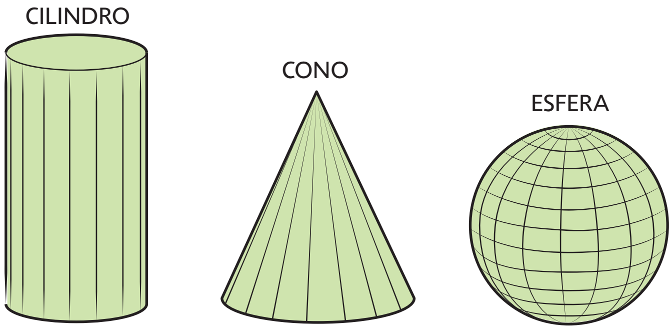
## LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

El material que encontramos en el *Libro XI*, que comprende 39 proposiciones relativas a la geometría tridimensional, resultará conocido en su mayor parte para cualquiera que haya seguido un curso de geometría elemental de sólidos. Una vez más, las definiciones pueden ser fácilmente objeto de crítica, pues Euclides define un sólido como *lo que tiene longitud, anchura y profundidad*, y entonces nos dice que *una frontera de un sólido es una superficie*; las cuatro últimas definiciones son las de cuatro de los poliedros regulares, entre las cuales no figura la del tetraedro, probablemente por considerarlo incluido en una definición previa de pirámide como *una figura sólida limitada por planos, que se construye desde un plano a un punto arbitrario*.




Configuración de los poliedros.

Las 18 proposiciones del *Libro XII* se refieren todas a la medida de figuras utilizando el método de exhaución. El libro comienza con una demostración minuciosa y detallada del teorema que asegura que las áreas de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados sobre sus diámetros. A continuación, se aplica el mismo método de una típica doble *reductio ad absurdum* al cálculo de los volúmenes de pirámides, conos, cilindros y esferas. Arquímedes atribuyó posteriormente las demostraciones rigurosas de estos teoremas a Eudoxo, del cual probablemente adaptó Euclides la mayor parte de este material.




Volúmenes de cilindro, cono y esfera.

El último libro está dedicado exclusivamente a las propiedades de los cinco sólidos regulares, hecho que ha movido a algunos historiadores a pensar que los *Elementos* fueron compuestos como una glorificación de las figuras cósmicas o platónicas. En vista de que una gran parte del material previo está muy lejos de relacionarse con nada que tenga que ver con los poliedros regulares, una hipótesis como esta resulta completamente gratuita, pero en todo caso estos teoremas finales constituyen un "clímax" adecuado para un tratado tan notable.

El objeto de estos teoremas es el de "inscribir" cada uno de los sólidos regulares en una esfera, es decir, hallar la razón de la arista del sólido al radio de la esfera circunscrita. Los comentaristas griegos atribuyen estos cálculos a Teeteto, a quien se debe, pues, probablemente la mayor parte del *Libro XIII*. En los preliminares de estos cálculos se refiere Euclides una vez más a la división de una recta en media y extrema razón, demostrando que "el cuadrado sobre el segmento mayor más la mitad del total es igual a cinco veces el cuadrado sobre la mitad", como se comprueba fácilmente resolviendo la ecuación $\frac{a}{x}=\frac{x}{(a-x)}$, y menciona otras propiedades de las diagonales de un pentágono regular.

A continuación, en la proposición 10, Euclides demuestra el teorema bien conocido de que un triángulo cuyos lados son respectivamente los lados de un pentágono, un hexágono y un decágono regulares inscritos en la misma circunferencia es un triángulo rectángulo. Las proposiciones 13 a 17 expresan las razones de la arista al diámetro para cada uno de los sólidos regulares inscritos en la esfera, a saber: $\frac{e}{d}$ es $\sqrt{\frac{2}{3}}$ para el tetraedro, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ para el octaedro, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ para el hexaedro o cubo, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ para el icosaedro y $\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{3}}$ para el dodecaedro.

Por último, en la proposición 18, la última de los *Elementos*, se demuestra de una manera fácil que no puede haber ningún otro poliedro regular aparte de estos cinco. Unos 1 900 años más tarde, al astrónomo Kepler le impresionó tanto este hecho que construyó una cosmología basada esencialmente en los cinco sólidos regulares, en la creencia de que había debido ser la clave que el creador habría utilizado para la construcción de la estructura de los cielos.

## LA INFLUENCIA DE LOS *ELEMENTOS*

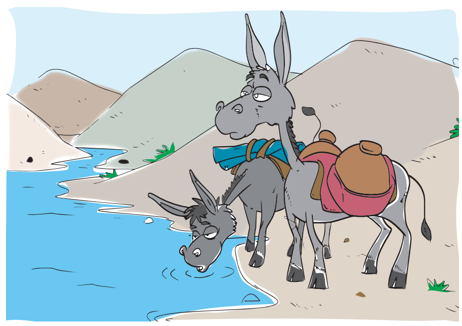
Los *Elementos* de Euclides no solamente fueron la primera obra matemática griega de importancia que ha llegado hasta nosotros, sino también el libro de texto que ha ejercido una mayor influencia de todos los tiempos. Fue escrito hacia el 300 a. C., y desde entonces fue copiado y recopiado sin cesar, con la consecuencia de que se deslizaron en él errores y variaciones, de una manera inevitable; incluso, algunos editores posteriores, especialmente Teón de Alejandría, a finales del siglo IV, pretendieron mejorar el original.

Sin embargo, ha sido posible obtener una impresión bastante buena del contenido de la versión euclídea por comparación entre más de media docena de copias griegas manuscritas que datan en su mayoría de entre los siglos X y XII. Las ampliaciones posteriores, que aparecen generalmente como escolios, añaden información adicional, con un interés histórico frecuentemente, y en la mayor parte de los casos se distinguen con facilidad del texto original. También nos han llegado copias de los *Elementos* en su traducción al árabe, que se vertieron más tarde al latín en el siglo XII y, por último, a los idiomas vernáculos durante el siglo XVI.

La primera versión impresa de los *Elementos* apareció en Venecia en 1482 y fue uno de los primerísimos libros matemáticos que se imprimieron; se estima que desde entonces se han publicado más de un millar de ediciones. Probablemente ningún otro libro, salvo la Biblia, puede jactarse de haber tenido tantas ediciones y, desde luego, ninguna otra obra matemática ha tenido una influencia comparable con la de los *Elementos* de Euclides. ¡Qué apropiado resultaba, pues, el que los sucesores de Euclides se refirieran a él llamándole “El Elementador”, tal vez como “facilitador”!

# III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

*¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?*



## Biografía

### Julio Rey Pastor

Julio Rey Pastor, nacido el 16 de agosto de 1888 en Logroño, España, y fallecido el 21 de febrero de 1962 en Buenos Aires, Argentina, fue un matemático e historiador de la ciencia español cuya contribución al desarrollo de la matemática en España y Argentina fue relevante.

Retrato de Julio Rey Pastor.

Julio Rey Pastor entró en un mundo de actividad científica acelerada, particularmente en España. La creación de la Institución Libre de Enseñanza en 1876 tuvo un enorme impacto en la restauración de la ciencia en ese país. Fundada por un grupo de profesores que se negaron a ajustar sus métodos a los dogmas religiosos, políticos o morales oficiales, el objetivo de la institución era defender la libertad de enseñanza. Este idealismo los obligó a perseguir su objetivo al margen de la sociedad intelectual y a fundar de este modo un establecimiento de educación privada.

Además, la derrota de Francia en la guerra franco-prusiana de 1870 marcó el fin de la hegemonía francesa en la Europa continental y un cambio significativo en la cultura española, que pasó de una orientación francesa a una influencia alemana. Esto fue de gran importancia, ya que trascendería a América Latina a través de matemáticos como Rey Pastor, Esteban Terradas y muchos otros.

Cuando Santiago Ramón y Cajal se convirtió en 1901 en el primer español en ganar el premio Nobel, junto con Camillo Golgi, por su trabajo sobre la estructura del sistema nervioso, parecía que la comunidad científica española finalmente había despertado de un período de estancamiento prolongado. A esto le siguió en 1907 la creación de la Junta para Ampliación de Estudios, que surgió como resultado de la autorreflexión cultural realizada en España después de perder sus últimas colonias. El objetivo clave de la organización era la renovación pedagógica a través de la concesión de becas para elevar el nivel de la cultura española al de los países más avanzados de Europa, como Alemania. Esto tendría un efecto directo en Julio Rey Pastor.

### Recorrido en España

Educado en casa hasta la edad de doce años, Rey Pastor comenzó a estudiar en su escuela secundaria local, el Instituto Sagasta, en 1900. Manifestó amplios intereses durante su juventud y antes de dedicarse por completo a las matemáticas escribió poesía. Habiendo reprobado la sección de matemáticas de la prueba de acceso a la Academia Militar de Zaragoza, comenzó a estudiar ciencias en la Universidad de Zaragoza en 1904. Fue allí donde se despertó su verdadera vocación por las matemáticas y en 1905 publicó su primer artículo, titulado "Sobre los números consecutivos cuya suma es a la vez cuadrado y cubo perfecto". Se doctoró en geometría algebraica en la Universidad de Madrid en 1910.

Entre 1908 y 1910, Rey Pastor fundó la Real Sociedad Matemática Española con el apoyo de José Echegaray y el general Benítez. En 1911, fue nombrado secretario de la sociedad y también se convirtió en profesor de Análisis Matemático en la Universidad de Oviedo, en el norte de España, la cual era una antigua universidad fundada en 1608. Allí escribió su polémico discurso inaugural para el año académico 1913-1914, en el que discutía con franqueza el lamentable estado de la ciencia española desde el siglo XVI. Como consecuencia, Rey Pastor fue acusado de ser antipatriótico y su reputación sufrió significativamente. Un ejemplo de su discurso franco puede verse en su Discurso inaugural de 1915, donde analiza el desarrollo de la ciencia en España. Se puede ver una traducción de parte de este discurso. Entre 1911 y 1916, la Junta para Ampliación de Estudios financió a Rey Pastor para que realizara una serie de visitas a Alemania. De ello resultaron dos publicaciones importantes sobre geometría, en 1912 y 1916. La monografía de 1916 trataba sobre geometría sintética en *n*-dimensiones e introducción a conceptos de gran generalidad (por ejemplo, la definición de curva) que desarrollaba en todas sus consecuencias.

En 1915, Rey Pastor pasó a ocupar una cátedra en la Universidad de Madrid, donde publicó el aclamado *Fundamentos de la geometría proyectiva superior*. Sin embargo, no era de los que se quedaban mucho tiempo en un mismo lugar y en el mismo año se trasladó a Barcelona para impartir una serie de conferencias en el Institut d'Estudia. Sus conferencias allí sobre *n*-geometría dimensional y aplicaciones conformes, que desarrollaba el trabajo de Schwarz, fueron escritas por Esteban Terradas, que asistía a ellas, y el curso se publicó en catalán.

### Rey Pastor y el desarrollo de la matemática en la Argentina

Rey Pastor fue invitado por el Instituto de Cultura Hispánica a dar una conferencia en la Universidad de Buenos Aires en 1917. Aunque todavía era un hombre joven, de solo 29 años, se le pidió que ayudara a promover las matemáticas en Argentina y se encontró una manera de permitirle hacerlo. Se le propuso un contrato que le autorizaba a pasar seis meses por año en Argentina y seis meses en España. Rey Pastor estuvo encantado de firmar el contrato y de dirigir el estudio avanzado de las ciencias exactas en la Argentina.

Se ha afirmado que don Rey Pastor fue responsable de la creación de una distintiva escuela argentina de investigación matemática y de la reconstrucción de la ciencia en Argentina. Cuando aceptó un contrato de 6 años en la Universidad de Buenos Aires, en 1921, la Facultad de Ciencias tenía solo un programa de doctorado, que apenas había progresado desde 1900. Entre entonces y la llegada de Rey Pastor, hubo una pequeña mejora en los cursos de ingeniería, pero todos los demás cursos de matemáticas adicionales estaban en un grave estado de estancamiento. Rey Pastor necesitaba persuadir a los profesores de ingeniería de la importancia de las matemáticas, más allá de los libros de texto elementales que habían estado usando anteriormente.

Había sido invitado por la Institución Cultura Española a dar una serie de conferencias en la Universidad de Buenos Aires en 1917. Este primer curso, dado como profesor visitante, fue una introducción al Programa Erlangen de Felix Klein. En él, Rey Pastor presentó a sus estudiantes el concepto de geometría basado en la teoría de grupos, utilizando métodos para establecer invariantes de cada grupo, siendo los métodos topológicos los más generales. Su segundo curso, dictado en 1921, fue especialmente dirigido a estudiantes de ingeniería e incluyó los siguientes temas: funciones de una variable compleja, aplicaciones conformes, geometría avanzada (no euclidiana), análisis matemático y metodología matemática. Muchos de estos temas, aunque comunes en Europa, eran completamente nuevos y revolucionarios para los matemáticos argentinos. Como consecuencia, Rey Pastor logró ganar popularidad entre los estudiantes, al tiempo que recibía duras críticas de sus profesores de la vieja escuela, que lo consideraban un usurpador extranjero. Rey Pastor se centró principalmente en la enseñanza de la ingeniería, pero reclutó a muchos estudiantes de matemáticas puras para sus cursos, ya que consideraba que los cursos de ingeniería sobre las técnicas de cálculo eran una buena preparación para los matemáticos puros. Creía que era importante mantener una comprensión de ambas áreas de las matemáticas y fue esta visión panorámica característica suya la que les permitió a sus estudiantes apreciar la profundidad de los nuevos conceptos que les estaba enseñando. Al separar las matemáticas de su aspecto puramente técnico, atrajo a una amplia audiencia en ambos lados del océano Atlántico. Rey Pastor fundó la Sociedad Matemática Argentina en 1924. En 1927 obtuvo un puesto permanente en la Universidad de Buenos Aires y ocupó dos cátedras: una de Análisis Matemático y otra de Geometría Superior. Esto tendría un impacto profundo y trascendental en la matemática argentina. En 1928, fundó un influyente seminario matemático, el Seminario Matemático Argentino (similar al que había creado en Madrid). El seminario publicó un boletín que contenía las primeras investigaciones modernas en matemática argentina. También trajo importantes matemáticos extranjeros a la universidad para dar cursos cortos, entre ellos: Federigo Enriques (1925), Francesco Severi (1930), Tullio Levi-Civita (1937), Émile Borel (1928) y Jacques Hadamard (1930). En la década de 1940, los mejores estudiantes de Pastor comenzaron a ganar reconocimiento internacional. Entre ellos estaban: Alberto González Domínguez, quien se convirtió en un importante físico cuántico; Alberto Calderón, quien asumiría como presidente del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago; y muchos más que mejoraron considerablemente la capacidad de enseñanza colectiva de la comunidad matemática.

En 1931, Rey Pastor publicó uno de sus trabajos más elegantes sobre análisis en los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, una revista matemática italiana. Trataba sobre el estudio del método de suma de series. Este artículo se enmarca en una larga serie de trabajos iniciados a principios del siglo XX, enfocada en problemas de suma de series, algoritmos de convergencia, integrales singulares y estudios comparativos de series e integrales. Había presentado por primera vez su trabajo en esta área en 1926, en su curso sobre

“Series e Integrales” que dictaba en la Universidad de Buenos Aires. El mismo curso, ligeramente ampliado, se repitió en Madrid en 1928. El mismo año, Rey Pastor presentó un resumen de sus ideas en su trabajo presentado en el Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia, al que asistió con un gran grupo de sus estudiantes argentinos. Continuó trabajando en problemas relacionados con la teoría de la suma de series divergentes a lo largo de la década de 1930 y publicó gran parte de sus resultados en revistas internacionales. Los temas tratados por Rey Pastor en este período tuvieron una influencia considerable en el desarrollo de la matemática argentina.

En 1952 fue expulsado de Argentina, a pesar de sus esfuerzos por permanecer apolítico. Sin embargo, se retiró con la satisfacción de haber iniciado la transformación de la matemática argentina. Contribuyó excepcionalmente al desarrollo de la investigación en matemáticas puras y formó una nueva escuela de ingenieros argentinos con una perspectiva moderna. Además, su enseñanza abrió las puertas al estudio de la historia de la ciencia y sentó las bases para generaciones de maestros de escuela secundaria con sus influyentes libros de texto. En 1954 regresó a Argentina y se unió a la Academia de Lengua.

La historia de las matemáticas siempre había interesado a Rey Pastor y al final de su carrera sus intereses en temas históricos se extendieron a la cartografía. Por supuesto, España tiene una reputación de cartografía notable, por lo que su monografía (escrita conjuntamente con E. García Camarero en 1960) sobre la historia de la cartografía española fue una adición particularmente útil al conocimiento del tema.

Examinar sus libros de texto nos permite comprender las ideas de Rey Pastor sobre la enseñanza de las matemáticas. En la introducción a *Elementos de análisis algebraico* (1917), el matemático comenta que, en lugar de seguir la tendencia general de elevar los problemas elementales al punto de la abstracción, su objetivo es simplificar las cuestiones complicadas manteniendo un enfoque riguroso. Añade que todo pensamiento abstracto requiere una base preexistente de conocimientos, de la que muchos estudiantes carecen cuando llegan a la universidad y que esperan adquirir a lo largo de su carrera. Sin embargo, según Rey Pastor, es un error didáctico y un absurdo histórico intentar abordar los conceptos de análisis de esta manera contraria. Murió en su casa en Buenos Aires, el 21 de febrero de 1962.

Fuertemente ligado a Rey Pastor y al desarrollo de la matemática en España y en Argentina es el doctor Esteban Terradas, que estuvo en las universidades de Buenos Aires y La Plata, en Argentina, y en la universidad de Santiago de Chile y de Bolivia.

## Esteban Terradas Illa

Esteban Terradas, nacido el 15 de septiembre de 1883 en Barcelona, España, y fallecido el 9 de mayo de 1950 en Madrid, España, fue un matemático, físico e ingeniero español. Ocupó prestigiosos puestos en las universidades de Barcelona y Madrid y también hizo contribuciones considerables al desarrollo de los ferrocarriles españoles, la industria aeroespacial y otras industrias.



Retratos de Esteban Terradas Illa.

Esteban Terradas Illa, también conocido como Esteve Terradas, era hijo de Marcellí Terradas i Domingo, de Barcelona, y de Leonor Illa i Navarro, de L’Arboc, un pueblo a unos 40 km al oeste de Barcelona. Marcellí Terradas, que era comerciante, murió cuando Esteban tenía dos años. Junto con sus tres hermanos, este quedó bajo la tutela de su tío, Joseph Terradas, un sacerdote que lo envió a completar sus estudios primarios en Charlottenburg, en las afueras de Berlín. Permaneció allí hasta los trece años y para entonces ya hablaba con fluidez alemán y francés, además de su lengua materna.

De regreso a Barcelona en 1896, Esteban recibió clases particulares para poder presentarse a los exámenes de bachillerato. Estos fueron exigentes, con quince materias diferentes para examinar, pero después de dos años de estudio los aprobó con éxito en 1898 y pudo iniciar sus estudios universitarios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona a los pocos meses. Su objetivo en esta etapa era ingresar a la Escuela de Ingeniería Industrial y para lograrlo cursó materias preparatorias de matemática y ciencias, por lo que no comenzó sus estudios de ingeniería hasta 1902. En ese momento, ya había decidido trabajar para obtener el título de Bachiller en Ciencias, que le fue otorgado en 1904. Su actuación fue sobresaliente y resultó galardonado con el "Premio Extraordinario". También en 1904, produjo su primer trabajo, "Propiedades de las raíces de la unidad", que fue publicado en la *Revista Trimestral de Matemáticas*. Posteriormente en el mismo año publicó, en la misma revista, "Analizando las condiciones de hilos flexibles pesados suspendidos en sus extremos de dos puntos fijos, produciendo catenarias de formas especiales dadas".

**Un científico con múltiples intereses tecnológicos**

Para continuar sus estudios de doctorado, Terradas acudió a la Universidad Complutense de Madrid. Esta medida era necesaria, ya que en aquel momento la de Madrid era la única universidad española capaz de otorgar doctorados. En junio de 1905 defendió dos tesis doctorales, una en física y otra en matemática, y obtuvo sendos doctorados. Su tesis de física se tituló *Algunas propiedades sin luz absorbida por cuerpos cristalinos*, mientras que la de matemáticas fue: *Condicionar de modo que un hilo homogéneo, flexible, inextensible e inelástico caiga según la curva que forme, para que todos sus puntos sigan trazando la misma curva que se realiza*. Durante el mismo año publicó tres artículos en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*, revista que había sido fundada solo dos años antes, en 1903. Estos artículos llevan por títulos: "Efecto de la luz circulante polarizada sobre el recubrimiento de una película absorbente cristalina activa"; "Sobre algunas curvas realizadas con cuerdas en movimiento"; y "Sobre el cálculo de intensidad en una regla".

Tras ambos doctorados, Terradas fue nombrado profesor ayudante en la Universidad Complutense de Madrid y en 1906 se presentó a una oposición para la cátedra de Mecánica Racional de la Universidad de Zaragoza, que ganó. Julio Rey Pastor era por entonces estudiante en la Universidad de Zaragoza y muchos años después recordaba: "Yo era ya estudiante en Zaragoza en 1906 cuando se difundió la noticia: ¡ha llegado el nuevo profesor de Mecánica Racional, pero es un muchacho! Un muchacho, ciertamente, por su edad, pero un gran caballero por su distinción y su cultura; un niño que hablaba perfectamente todas las lenguas cultas y conocía la historia y la literatura de todos los países, un niño que manejaba las funciones elípticas con la misma facilidad con que nuestros antiguos profesores manejaban la trigonometría".

Terradas solo estuvo un año en la Universidad de Zaragoza antes de regresar a su ciudad natal, Barcelona, en 1907, donde ganó por oposición la Cátedra de Acústica y Óptica de la Universidad de Barcelona. Publicó "Fenómenos de polarización en cristal" (1907) y "Teorías modernas sobre la emisión de luz" (1909). En 1907 la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona le concedió el premio Agell por el segundo de los trabajos de 1904 que hemos mencionado anteriormente. En 1909 fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona y pronunció un discurso inaugural sobre la emisión de radiaciones por cuerpos fijos o móviles donde afirmaba: "[...] con verdadero dominio de las diversas teorías sobre la radiación que han sido establecidas por Maxwell, Jeans, Lorentz, Planck y otros estudiosos, sentando los principios de la Mecánica Estadística, que sirve maravillosamente para ser aplicada a las teorías del electromagnetismo".

A pesar de haber alcanzado puestos académicos destacados, Terradas había regresado a su objetivo original, es decir, estudiar la carrera de Ingeniería Industrial. Este fue un curso muy exigente que requirió que se examinaran veinte materias diferentes, las cuales rindió en una sola convocatoria de exámenes en 1909.

Asistió al Congreso Internacional de Matemáticos en 1908 en Roma y, cuatro años más tarde, al Congreso Internacional de Matemáticos en Cambridge, Inglaterra, donde pronunció la conferencia "Sur le mouvement d'un fil", dedicada al movimiento de un alambre en el caso en que todos sus puntos describen la misma trayectoria relativa a los ejes dado un movimiento de rotación. Este había sido el tema de su artículo de 1904 que ganó el premio Agell.

La Sociedad Astronómica de Barcelona se fundó el 30 de enero de 1910 con el propósito de atraer tanto a académicos profesionales como a aficionados. Terradas, aunque no era astrónomo, tenía tan alta reputación de erudito que fue elegido primer presidente de la Sociedad y pronunció su discurso presidencial sobre el progreso de la astronomía. La Sociedad comenzó con 210 miembros en 1910 y había crecido a 370 en 1912.

Terradas se casó con María Luisa Vía i Freixas (1887-1977) y tuvieron un hijo, Robert Terradas i Vía (1916-1976). Recordemos que Robert estudió en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona, obteniendo su título en 1942, y llegó a ser director de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona de 1960 a 1967. Como arquitecto, entre sus edificios en Barcelona se encuentran el Real Club de Polo, la Escuela Suiza, la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, el Colegio de Médicos y la Facultad de Filosofía y Letras.

En 1919, Terradas fundó el Instituto de Electricidad y Mecánica Aplicadas y fue su director. También fue profesor en la sección de ingeniería eléctrica de la Escola del Treball.

La *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-Americana* es una enciclopedia española compuesta por 72 volúmenes publicados entre 1908 y 1930, seguidos de un apéndice de 10 volúmenes publicado entre 1933 y 1935. Se cree que Terradas escribió alrededor de 180 artículos para la enciclopedia, que ha sido descrita como "una fuente inagotable, llena de tesoros". Como ejemplos de temas de sus artículos destacamos los siguientes: aberración, acústica, aerodinámica, aerostática, álgebra, funciones algebraicas, alternadores, asteroides, astigmatismo, cálculo, cálculo de probabilidades, ecuaciones diferenciales, electricidad, gravedad, calor, hidrodinámica, cinemática, locomotora, magnetismo, mecánica, luna, número, óptica, placas, teoría cuántica, superficies de Riemann, mecánica estadística, teoría de la relatividad, vibración.

Terradas ha participado en un notable número de proyectos diferentes. En 1913 fue nombrado "asesor técnico" del Consejo de Investigaciones Pedagógicas de la Diputación de Barcelona. A partir de 1914 impartió clases de tecnología del automóvil en la Escuela de Artes y Oficios de la Diputación Provincial de Barcelona. También fue director de la División de Telefonía de la Mancomunidad de Cataluña de 1916 a 1924: "Se trataba de un puesto de alta responsabilidad técnica, ya que tenía que intentar cumplir con la voluntad política de la Mancomunidad de hacer llegar el teléfono a todos los rincones del territorio catalán. [...] Durante su mandato, la red telefónica catalana amplió notablemente sus servicios, transformando el mapa telefónico de Cataluña".

Aunque sus intereses le llevaron a involucrarse en numerosos ámbitos, no descuidó sus intereses académicos e hizo mucho para concienciar en España sobre la teoría cuántica y la relatividad. Invitó a Barcelona a destacados matemáticos y físicos como Jacques Hadamard (1921), Hermann Weyl (1921), Arnold Sommerfeld (1922), Tullio Levi-Civita (1922), Béla Kerékjártó (1923) y Albert Einstein (1923). Observamos que después de las discusiones con Terradas, Einstein dijo: "He descubierto un hombre extraordinario: Terradas".

Fue también director del Departamento de Ferrocarriles Secundarios de la Mancomunidad de Cataluña de 1918 a 1924. A pesar de los títulos que ya había obtenido, sintió que necesitaba estar tan calificado como otros en el Departamento, por lo que se graduó como Ingeniero Civil tomando dos exámenes (junio y septiembre de 1918), para las veinte materias requeridas. José Manuel Sánchez Ron relata el siguiente episodio: "Terradas tenía un amor extraordinario por el conocimiento y la erudición, y abundan las anécdotas de su erudición, incluso mientras vivió. Por ejemplo, refiriéndose al examen de ingeniero de caminos de Terradas, el arquitecto Joan Bergós [...] contaba que su amigo, muy entendido en arquitectura, le confiaba que 'no se había atrevido a estudiarla formalmente por miedo a que en la Escuela Superior perdiera la pasión por la arquitectura, la primera de las artes'. Bergós añadía que en el examen de arquitectura para la Escuela de Caminos, al ser interrogado sobre las 'molduras de decadencia bizantina', Terradas fue capaz de dibujarlas sin vacilar, ante la total estupefacción del tribunal".

Bajo su dirección se iniciaron cuatro líneas de ferrocarriles: Reus-Montroig; Lérida-Fraga; Tárrega-Balaguer; y Tarragona-Ponts. Sin embargo, los acontecimientos políticos hicieron que esta obra fuera abandonada. La causa fue el golpe militar del 13 de septiembre de 1923 en España, liderado por Miguel Primo de Rivera, quien se estableció como dictador. Aunque el objetivo de Primo de Rivera era modernizar España, intentó acabar con la cultura catalana y esto generó muchas dificultades. El interés de Terradas por los ferrocarriles se mantuvo, sin embargo, y se incorporó al Metropolitano Transversal de Barcelona en 1923 y realizó una contribución esencial a la finalización del tramo Cataluña-La Bordeta en 1926.

En 1927, Terradas se trasladó a Madrid y se convirtió en diputado universitario de la Asamblea Nacional de Primo de Rivera. Se le consiguió un puesto en la Universidad de Madrid y en 1928 fue nombrado catedrático de Ecuaciones Diferenciales. Además de ocupar estos cargos, se desempeñó como profesor de la Escuela Superior Aerotécnica en 1929. En la época en que se trasladó a Madrid, pasó algún tiempo en Sudamérica, asumiendo la Cátedra de Cultura Hispánica en la Institución Cultural Española de Buenos Aires. Dictó cursos, disertó en congresos y estableció contactos en Chile, Uruguay y Bolivia. En 1929 aceptó otro cargo como director de la Compañía Nacional de Teléfonos de España.

**Irrupción de los acontecimientos políticos**

Sin embargo, los acontecimientos políticos le generaron dificultades a Terradas. El rey Alfonso XIII de España fue depuesto y el 14 de abril de 1931 se proclamó la República española, habitualmente llamada Segunda República. Como resultado de ello, Terradas dejó su puesto en la Compañía Telefónica Nacional en junio de 1931. En septiembre, el Ministerio de Instrucción Pública decidió destituirlo de la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales. Se convocó entonces un concurso para la cátedra al que se presentó Terradas, pero no resultó vencedor. Posteriormente ocupó la Cátedra de Mecánica Racional, entre 1932 y 1933. Había sido elegido miembro de la Real Academia Española de Ciencias el 4 de febrero de 1931 y pronunció una lección inaugural en torno del "Programa de un curso sobre ecuaciones diferenciales" el 15 de febrero de 1933. En esta conferencia describió su enfoque de la enseñanza de ecuaciones diferenciales que había preparado en pos del concurso para la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales pero que, por razones políticas, no había podido ganar. Julio Rey Pastor pronunció un discurso de bienvenida a Terradas en la Real Academia de Ciencias de España y habló de las dificultades a las que se enfrentaba: "Bajo la Mancomunidad Catalana, tuvo oportunidad de desarrollar sus múltiples actividades en la organización del Institut d'Estudis Catalans, y en la construcción de la red telefónica, de los ferrocarriles secundarios [...] Y viendo en la llamada de la primera dictadura la posibilidad de trabajar por España, sacrificó sus opiniones personales para trabajar junto con otros insignes compañeros nuestros, dentro del radio de sus posibilidades; y lo mismo habría hecho bajo cualquier régimen político orientado hacia la visión fundamental opuesta".

El izquierdista Frente Popular ganó las elecciones de 1936 y la situación se deterioró rápidamente hacia una guerra civil. Terradas, un católico tachado de conservador, perdió el favor de la Barcelona republicana y se dio cuenta de que tenía que abandonar España. Partió a fines de octubre de 1936 rumbo a Argentina, donde permaneció hasta 1941: "Terradas estuvo muy activo en sus años en Argentina. En la Universidad de Buenos Aires dictó cursos de matemática e ingeniería; en la Universidad Nacional de La Plata, estuvo vinculado al Observatorio Astronómico y participó en la medición de un arco meridiano que se extiende desde el extremo norte de Argentina hasta el sur, dirigiendo la parte hidrográfica del proyecto (específicamente, el valor de la altura media del mar a lo largo de la costa atlántica). Sus actividades también incluyeron la aeronáutica. En la Universidad de Buenos Aires, en 1940, dictó un curso de aeronáutica teórica. En la Universidad Nacional de La Plata, creó un grupo para estudiar problemas de ingeniería aeronáutica, y dictó cursos y seminarios sobre teoría de la elasticidad, aerodinámica y problemas técnicos de la aviación (entre ellos la construcción de pistas de aterrizaje). De hecho, uno de los pocos artículos que publicó en Argentina fue sobre aeronáutica. Este trabajo, sobre hélices de aviones, tuvo su origen en una conferencia dictada en la Universidad Nacional de La Plata el 24 de junio de 1937, y eventualmente pasó a formar parte de su curso de aeronáutica".

Juan Vigón había sido partidario del rey Alfonso XIII y estaba en el ejército español. Dimitió en 1931 cuando se formó la Segunda República, pero regresó al estallar la Guerra Civil Española y se convirtió en general. Tras finalizar la Guerra Civil, en 1939, fue nombrado ministro del Aire y a finales de 1941 animó a Terradas a regresar a España para utilizar su experiencia en la investigación aeronáutica. Este regresó y fue nombrado catedrático de Física Matemática de la Facultad de Ciencias de Madrid. Debemos señalar, sin embargo, que sus colegas en Argentina no estaban contentos con que cancelara sus planes en ese país y se marchara: "Durante mucho tiempo sus amigos en Argentina intentaron recuperarlo, sin éxito, para lo que él llamaba 'su segundo país'. Estos esfuerzos involucraron a un influyente grupo de científicos, tecnólogos de investigación e instituciones que en ese momento estaban a la vanguardia del movimiento de investigación de Argentina".

Vigón fundó el Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica en 1942 y Terradas se convirtió en el primer presidente de su Patronato. Tras su muerte en 1950, el Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica pasó a denominarse Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial "Esteban Terradas" en su honor. Junto con Juan Vigón, fue miembro de un grupo de trabajo creado con el propósito de buscar vías para desarrollar un uso práctico de la energía nuclear en España. Los esfuerzos de este grupo dieron lugar a la creación de la Junta de Energía Nuclear en 1951, un año después de la muerte de Terradas.

Sixto Ríos García escribe sobre Terradas como maestro: "Es común que profesores con amplios conocimientos y gran erudición en un tema no sepan limitar su exposición y mezclen cuestiones mayores y secundarias. Por el contrario, Dr. Esteban Terradas, que en estadística como en cualquier otra materia que explicaba tenía una preparación previa en la que había agotado las fuentes bibliográficas, no por ello había perdido las más preciosas condiciones pedagógicas de hacer ver con claridad a sus discípulos los caminos principales, distinguiéndolos de los menores, y haciéndolos llegar y detenerse en las mesetas que permiten una perfecta contemplación del paisaje científico que se había propuesto captar".

Terminemos esta biografía citando un discurso que Terradas pronunció el 11 de mayo de 1913 con motivo del ingreso de Paulino Castells y Vidal (1877-1956) a la Academia Española de Ciencias: "Hoy estamos convencidos de que nuestra misión principal no es la enseñanza en el sentido arcaico. Más bien, nuestro deber fundamental es el estudio y el avance de la ciencia. Representamos la cultura de la patria, y el decoro y el deber hacen imperativo que el estudio sea nuestra ocupación central. Ya han pasado los tiempos en que la calidad didáctica se medía en términos de la meticulosidad con la que un profesor de matemáticas hacía una transformación o pasaba de una fórmula a otra. Hoy en día [...] la calidad de la enseñanza se mide según las ideas de los profesores y cómo estas reflejan el pensamiento de los grandes centros culturales, como también por la naturaleza de los problemas que un estudiante inteligente es capaz de resolver".

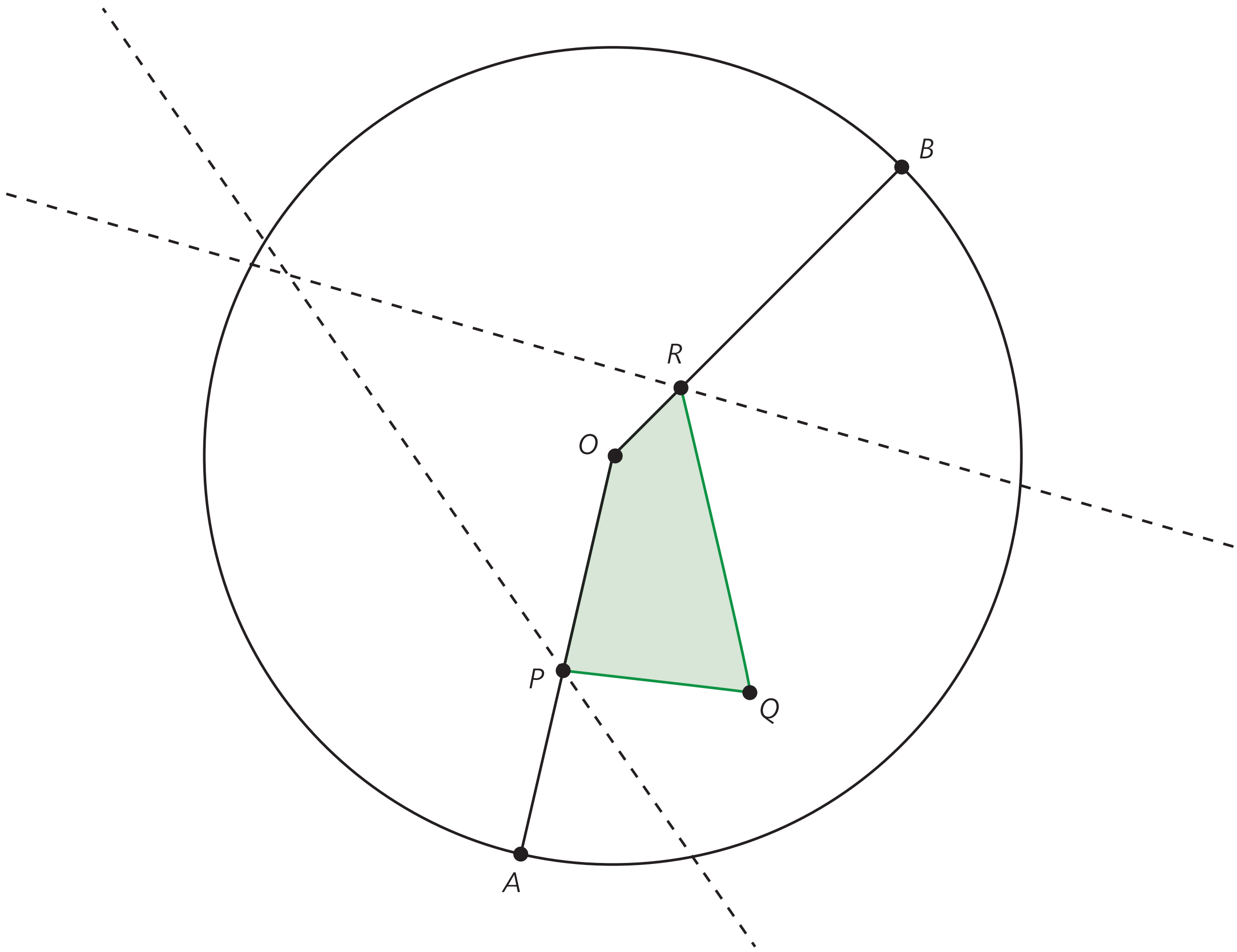
# El Problema Semanal

Propuesto por el Dr. José Araujo

Respuesta del Nº 6 - 2025



Hallar el perímetro del cuadrilátero *OPQR* teniendo en cuenta que, en la figura, la circunferencia es de radio 3 cm y centro *O*, las rectas en líneas de puntos son las mediatrices de los segmentos *QA* y *QB*, respectivamente.




**Solución**

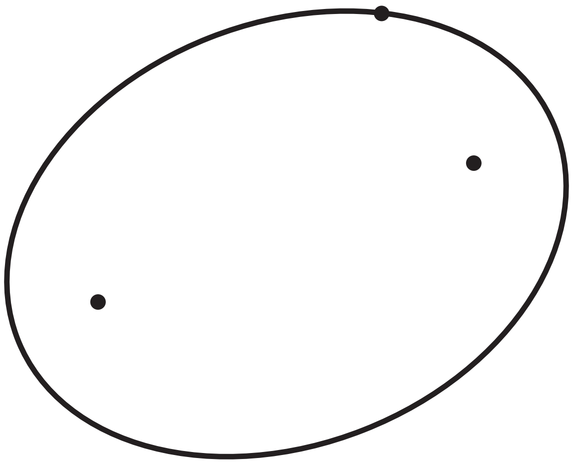
Dado que *R* está en la mediatriz de *QB*, los segmentos *QR* y *RB* tienen igual longitud. Por similar argumento, los segmentos *QP* y *PA* tienen igual longitud. El perímetro del cuadrilátero puede calcularse como:

$$OP + PQ + QR + RO = OP + PA + RB + RO = 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

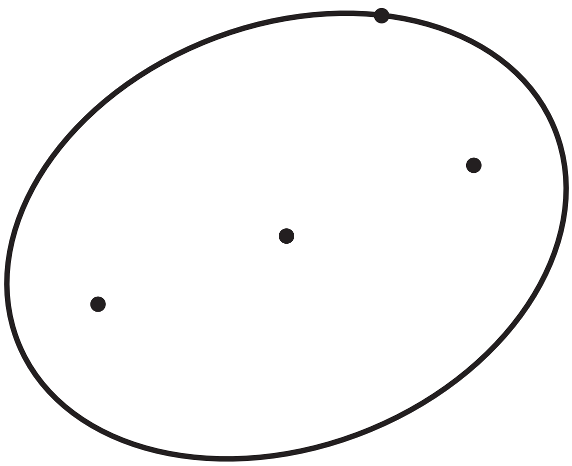
Usando *GeoGebra*, dibujar una elipse con su centro; luego, también con *GeoGebra*, inscribir un cuadrado en la elipse.

**Solución**

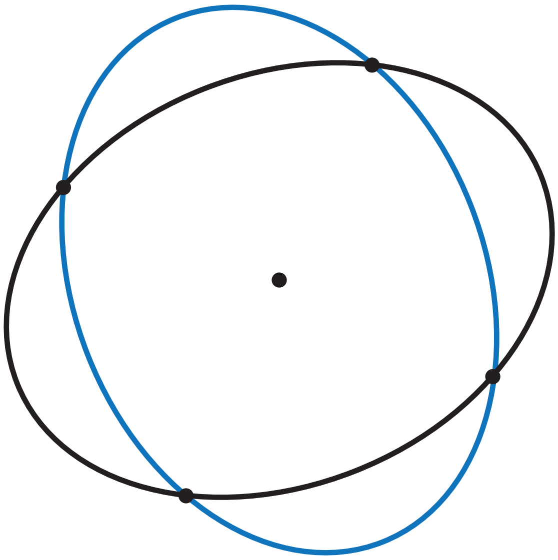
Seleccionando el recurso ***Elipse*** marcamos tres puntos, los dos primeros serán los focos y el tercero un punto de la elipse.



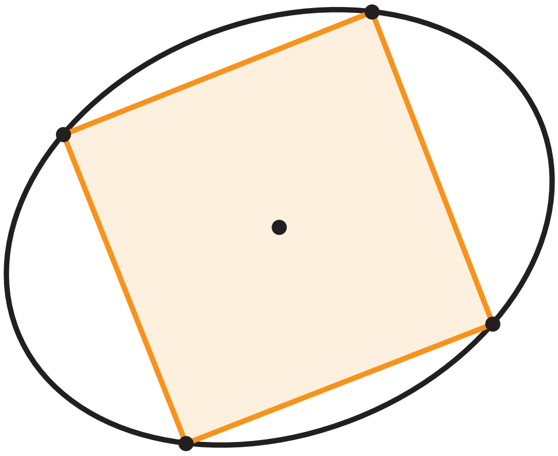
Hallamos el centro de la elipse seleccionando el recurso ***Medio*** o ***Centro*** y luego pulsando el botón izquierdo del mouse sobre cada foco de la elipse.



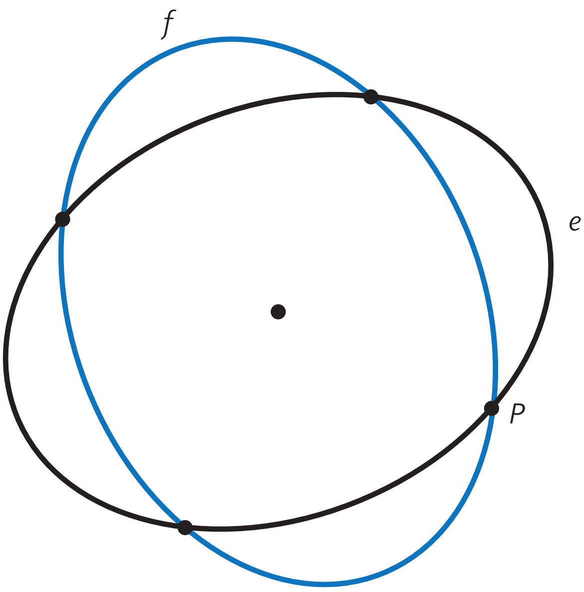
Ocultamos los focos y el punto de la elipse marcando cada uno de estos puntos con el botón derecho y seleccionando luego ***Objeto visible***. Usando ***Rotación***, rotamos la elipse 90° en cualquier sentido. Ahora, con ***Intersección*** marcamos una elipse; luego, la otra y así obtenemos cuatro puntos en la intersección de ambas elipses.



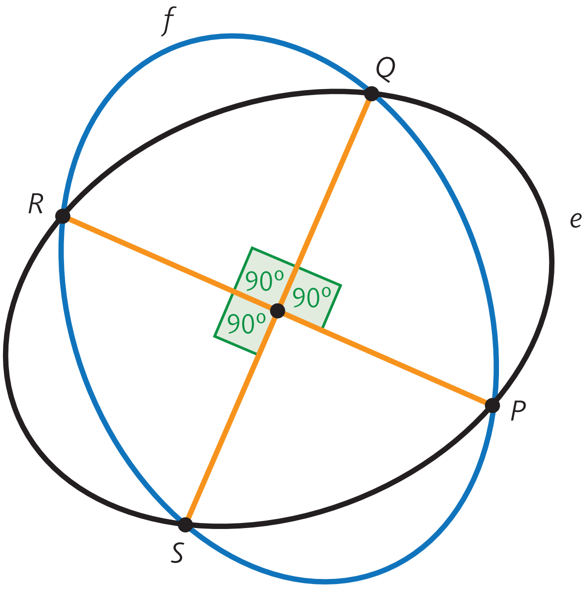
Estos puntos así obtenidos son los vértices de un cuadrado.



Para justificar la afirmación precedente, es conveniente observar que si se rota una de las dos elipses anteriormente dadas 90° alrededor del centro, se obtiene la otra elipse. Notemos con $e$ y $f$ las elipses y un punto $P$ en la intersección de ambas elipses, como muestra la siguiente figura.



Al rotar $P$ 90° alrededor del centro, se obtendrá un punto de $f$ dado que $P$ está en $e$, pero como $P$ también está en $f$, se obtendrá un punto de $e$, es decir, se obtendrá un punto en la intersección de $e$ con $f$. En consecuencia, si rotamos $P$ 90° en sentido antihorario alrededor del centro, obtenemos $Q$. Si hacemos lo mismo con $Q$ obtendremos $R$ y haciendo lo mismo con $R$ obtendremos $S$.




De este modo se forma el cuadrado $PQRS$.

*Nota: Una elipse es el lugar geométrico del plano dado por los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es un valor dado. El centro de una elipse es el punto medio de sus focos y la simetría respecto del centro transforma a la elipse en sí misma, es decir, la elipse es simétrica respecto de su centro.*