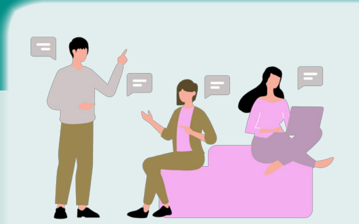
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

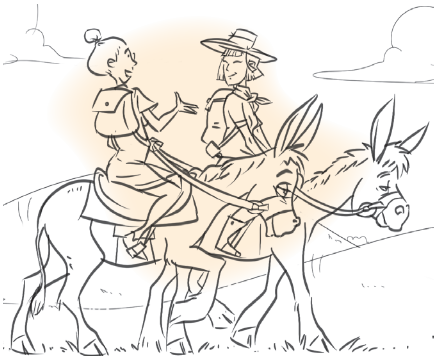
7ª época • Nº 4 • 8 de mayo de 2025



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Sistemas de números

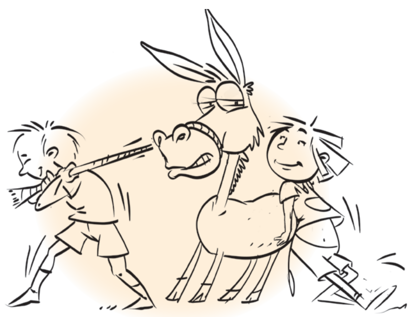
INTRODUCCIÓN

Debemos extender suficientemente el concepto inicial de número, como número natural, hasta crear un instrumento capaz de satisfacer las necesidades de la práctica y de la teoría. En una larga y, a veces, titubeante evolución histórica, fueron sucesivamente aceptados el cero, los enteros negativos y las fracciones, en el mismo plano que los naturales, y hoy día las reglas operativas con estos números debieran ser del dominio de todo alumno del bachillerato. Pero para lograr completa libertad en las operaciones algebraicas debemos ir más allá, hasta incluir en el concepto de número las cantidades irracionales y complejas. Aunque estas extensiones del concepto de número natural han sido utilizadas en matemática durante varios siglos y, por otra parte, constituyen la base de toda la matemática moderna; hasta tiempos relativamente recientes no fueron establecidas sobre una base lógica sólida. En el presente capítulo haremos una exposición del modo como dicha base fue alcanzada.

LOS NÚMEROS RACIONALES

1. Los números racionales como resultado de mediciones

Los números enteros son abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Pero en la vida diaria no es suficiente poder contar objetos individuales, es preciso también medir cantidades tales como longitudes, áreas, pesos y tiempo. Si se quiere operar sin trabas con las medidas de estas cantidades, que son susceptibles de subdivisiones arbitrariamente pequeñas, es necesario extender el campo de la aritmética más allá de los números enteros. El primer paso será el de reducir el problema de la medida al de contar.



Comenzaremos por elegir, de modo completamente arbitrario, una unidad de medida –metro, pie, gramo, libra, segundo, etc.– a la que asignaremos la medida 1. Luego, contaremos el número de esas unidades contenidas en la cantidad que deseamos medir; por ejemplo, una cierta masa de plomo pesa exactamente 54 kg. Sin embargo, el proceso de contar no es suficiente en general, ya que la cantidad dada puede no ser exactamente medible mediante múltiplos enteros de la unidad elegida. Las más de las veces podremos decir únicamente que dicha cantidad está comprendida entre dos múltiplos consecutivos de la unidad; por

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

ejemplo, entre 53 kg y 54 kg. Cuando esto ocurra, avanzaremos un paso introduciendo nuevas subunidades, obtenidas por subdivisión de la unidad inicial en un cierto número n de partes iguales. En el lenguaje ordinario, estas nuevas subunidades pueden tener nombres especiales: el pie se divide en 12 pulgadas; el metro, en 100 centímetros; la libra, en 16 onzas; la hora, en 60 minutos; el minuto, en 60 segundos, etcétera.

Sin embargo, en el simbolismo de la matemática, una subunidad obtenida dividiendo la unidad inicial en n partes iguales se denota con el símbolo $1/n$; y si una cantidad contiene exactamente m de estas subunidades, su medida se denota con el símbolo m/n. Este símbolo se llama *fracción* o *razón* (a veces se escribe $m : n$).

El paso siguiente, verdaderamente decisivo, solo se dio de modo consciente después de varios siglos de tentativas. El resultado fue que el símbolo m/n quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medidas y a las cantidades medidas, y fue considerado simplemente como un número, un ente en sí mismo, en el mismo plano que los números naturales. Cuando m y n son números naturales, el símbolo m/n se llama *número racional*.

El uso de la palabra número (inicialmente reservada para los números naturales) para estos nuevos símbolos está justificado por el hecho de que la adición y la multiplicación de estos entes obedecen a las mismas leyes que rigen dichas operaciones con los números naturales. Para probar esto, debemos definir previamente la adición, la multiplicación y la igualdad de números racionales. Como es bien sabido, estas definiciones son:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \tag{1}$$
$$\frac{a}{a}=1,\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \text{si } ad=bc$$

para enteros cualesquiera a, b, c, d; por ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2\cdot5+3\cdot4}{3\cdot5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15};\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot4}{3\cdot5}=\frac{8}{15};\quad \frac{3}{3}=1;\quad \frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Estas definiciones se nos presentan forzosamente si deseamos que los números racionales sean apropiados para medir longitudes, áreas, etc. Pero hablando en sentido estricto, estas reglas de adición, multiplicación e igualdad de nuestros símbolos quedan establecidas por su propia definición y no aparecen impuestas por otras necesidades que las de ser no contradictorias y resultar útiles para las aplicaciones. A partir de las definiciones (1) se puede probar que las leyes fundamentales de la aritmética de los números naturales continúan siendo válidas en el dominio de los números racionales:

$$\begin{aligned} p+q &= q+p && \text{(ley conmutativa de la adición)},\\ p+(q+r) &= (p+q)+r && \text{(ley asociativa de la adición)},\\ pq &= qp && \text{(ley conmutativa de la multiplicación)},\\ p(qr) &= (pq)r && \text{(ley asociativa de la multiplicación)},\\ p(q+r) &= pq+pr && \text{(ley distributiva)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Por ejemplo, la prueba de la ley conmutativa de la adición de fracciones resulta de las ecuaciones

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

en las cuales el primero y el último signo de igualdad corresponden a la definición (1) de la adición, mientras que el del centro es una consecuencia de las leyes conmutativas de la adición y de la multiplicación de números naturales. Podemos comprobar las otras cuatro leyes de manera análoga.

Para la efectiva comprensión de estos hechos se debe insistir una vez más en que los números racionales son creación nuestra, y que las reglas (1) dependen de nuestra voluntad. Podríamos haber definido de manera caprichosa la adición por la fórmula $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, la cual habría dado en particular $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, lo que sería absurdo aplicado a la medición de cantidades. Reglas de tal tipo, aunque permisibles lógicamente, harían de la aritmética de nuestros nuevos símbolos un juego carente de sentido. El juego libre del intelecto debe estar guiado aquí por la necesidad de crear un instrumento capaz de ser utilizado para la medida.

2. Necesidad natural de incorporar los números racionales. Principio de generalización

Junto con las razones prácticas que indujeron a la introducción de los números racionales, existen otras de carácter intrínseco y, en cierto modo, más apremiantes, que vamos a discutir independientemente de los argumentos anteriores. Estas razones son de carácter aritmético y típico de una tendencia dominante en el proceso matemático.

En la aritmética ordinaria de los números naturales se pueden efectuar siempre las dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. En cambio, las operaciones inversas no son siempre posibles. La diferencia $b - a$ de dos enteros a, b es el entero c tal que $a + c = b$; es decir, es la solución de la ecuación $a + x = b$.

Pero en el dominio de los números naturales, el símbolo $b - a$ posee significación únicamente cuando es $b > a$, ya que únicamente entonces tiene la ecuación $a + x = b$ una solución que sea un número natural. Un gran paso para suprimir esta restricción se dio cuando se introdujo el símbolo 0 mediante la relación $a - a = 0$. De mayor importancia aún fue la introducción de los símbolos –1, –2, –3, ..., junto con la definición

$$b - a = -(a - b)$$

para el caso $b < a$, que permitió la sustracción, sin restricciones, en el dominio de los enteros positivos y negativos. Para incluir los nuevos símbolos –1, –2, –3, ..., en una aritmética más amplia, que comprenda tanto los enteros positivos como los negativos, debemos, naturalmente, definir las operaciones con ellos de tal manera que las reglas de las operaciones aritméticas con los números naturales se conserven para el nuevo dominio; por ejemplo, la regla

$$(-1)(-1) = 1, \tag{3}$$

que servirá para regir la multiplicación de los enteros negativos, es una consecuencia del deseo de conservar la ley distributiva $a(b + c) = ab + ac$.

Puesto que, si hubiéramos convenido, por ejemplo, en que fuera $(-1)(-1) = -1$, poniendo $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ resultaría $-1(1 - 1) = -1 - 1 = -2$, mientras que por otro lado se tendría $-1(1 - 1) = -1 \cdot 0 = 0$. Fue necesario mucho tiempo para que los matemáticos comprendieran que la “regla de los signos” (3), junto con todas las demás definiciones que se refieren a los enteros negativos y a las fracciones, no podían ser “demostradas”.

Todas eran creaciones hechas con el objeto de alcanzar libertad en las operaciones, conservando siempre las leyes fundamentales de la aritmética. Lo que puede y debe probarse es únicamente el hecho de que con tales definiciones las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la aritmética se conservan. Aun el gran matemático Leonhard Euler dio un argumento poco convincente para mostrar que $(-1)(-1)$ debe ser igual a +1. Decía: dicho producto debe ser +1 o –1, pero no puede ser –1, puesto que $-1 = (+1)(-1)$.

Del mismo modo que la introducción de los enteros negativos y del cero despejó el camino para la sustracción sin restricciones, la introducción de los números fraccionarios suprime análogos obstáculos para la división. El cociente $x = b/a$ de dos enteros a y b, definido por la ecuación

$$ax = b, \tag{4}$$

existe, como entero, únicamente cuando a es un divisor de b. Si no es ese el caso, como, por ejemplo, si es $a = 2$, $b = 3$, introducimos simplemente el símbolo b/a, al que llamamos *fracción*, para el que se establece la regla $a(b/a) = a$, de modo que b/a es, "por definición", una solución de (4). La introducción de las fracciones como nuevos números hace posible la división sin restricciones, excepto la división por cero, la cual será excluida en todos los casos.

Expresiones del tipo 1/0, 3/0, 0/0, etc., serán siempre símbolos sin significado para nosotros, puesto que si se admitiera la división por cero, podríamos deducir de ecuaciones correctas, como $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$, la consecuencia absurda $1 = 2$. Sin embargo, a veces puede ser útil designar expresiones del tipo 3/0 por el símbolo ∞ (léase "infinito"), siempre que no se pretenda operar con el símbolo ∞ como si estuviera sujeto a las leyes ordinarias del cálculo numérico.

La significación aritmética propia del sistema de todos los números racionales –enteros y fraccionarios, negativos y positivos– resulta ahora clara. Para el dominio de los números así extendido, no solo valen las leyes formales asociativa, conmutativa y distributiva, sino que ahora también las ecuaciones $a + x = b$ y $ax = b$ tienen las soluciones $x = b - a$ y $x = b/a$, sin restricción alguna, con tal de que para la última se tenga $a \neq 0$.

En otros términos, en el dominio de los números racionales las llamadas *operaciones racionales* –adición, sustracción, multiplicación y división– son posibles sin restricción y los resultados pertenecen siempre a aquel dominio de números. Un dominio de números cerrado respecto de dichas operaciones se llama un *cuerpo*. Daremos otros ejemplos de cuerpos más adelante.

Extender un dominio por la introducción de nuevos símbolos, de tal modo que las leyes que valen en el primero continúen rigiendo en el segundo, es uno de los aspectos del proceso de generalización característico de la matemática. La generalización del concepto de número natural al de número racional satisface, por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división, y cumple, por otra, la necesidad práctica de tener números para representar los resultados de mediciones.

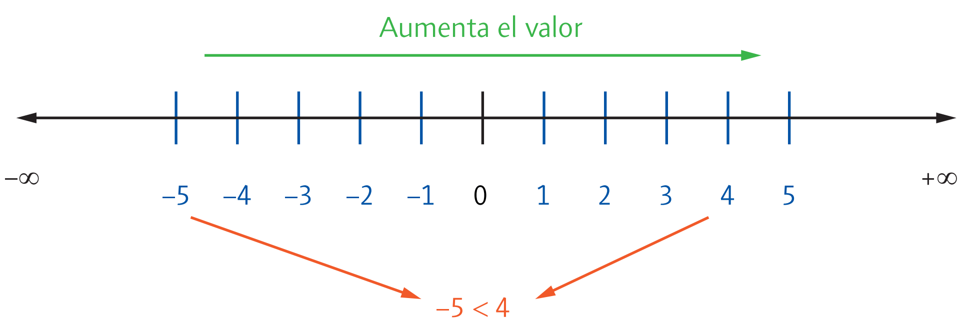
Del hecho de que los números racionales satisfagan esa doble necesidad resulta verdaderamente su gran importancia. Como hemos visto, esta extensión del concepto de número ha sido posible por la creación de nuevos números en la forma de símbolos abstractos tales como 0, –2, y 3/4.

Hoy, acostumbrados como estamos a tratarlos como cosa corriente, resulta difícil creer que hasta el siglo XVII no fueron admitidos con los mismos derechos que los enteros positivos y que, aunque usados cuando se hacían necesarios, no era sin ciertas dudas y prevenciones. A la natural tendencia humana a apoyarse en lo concreto, y como tales aparecían los números naturales, se debe la lentitud con que se dio este paso inevitable. Únicamente en el dominio de lo abstracto puede ser creado un sistema satisfactorio de aritmética.

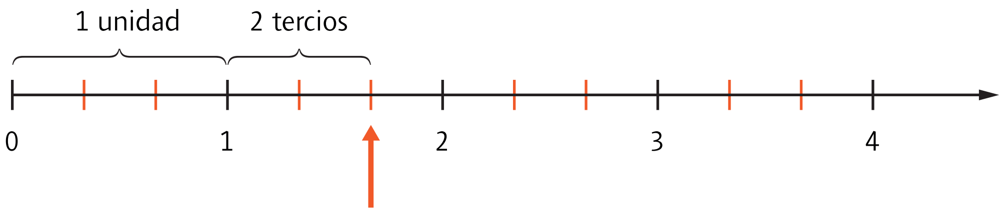
3. Interpretación geométrica de los números racionales

La construcción que sigue dará una interpretación geométrica intuitiva del sistema de los números racionales.

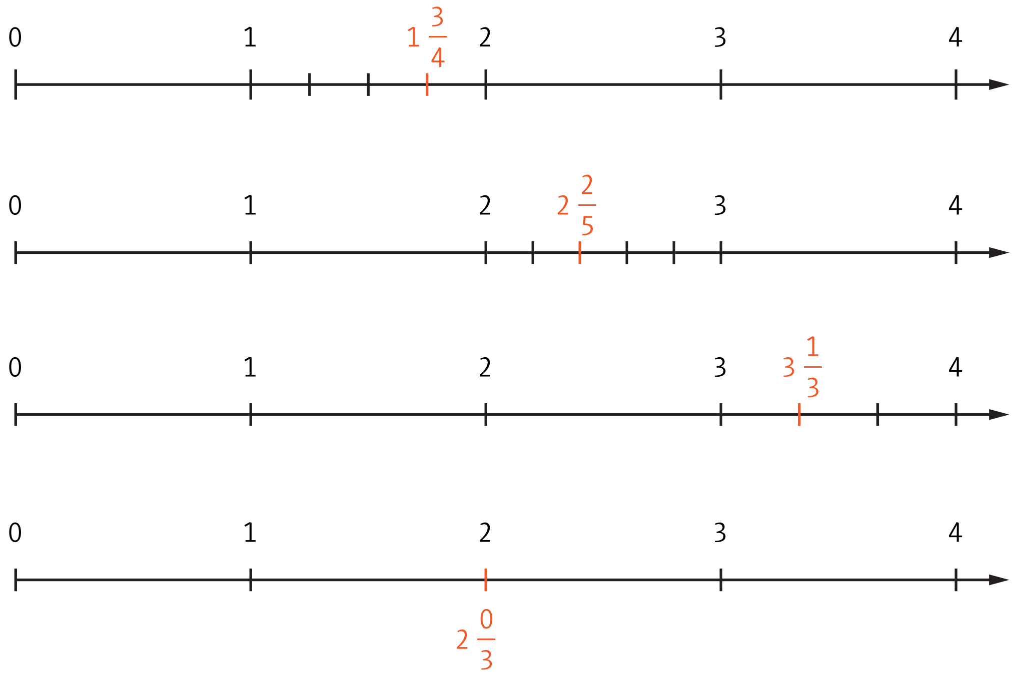
Tomemos sobre una recta, *recta numérica*, un segmento de 0 a 1.



Elijamos dicho segmento como unidad de longitudes, unidad que puede ser tomada arbitrariamente. Los enteros positivos y negativos serán representados por puntos equidistantes sobre la recta numérica, los positivos a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda (figura de arriba).



Para representar las fracciones de denominador n, dividimos cada uno de los segmentos de longitud unidad en n partes iguales; los puntos de subdivisión representan las fracciones con denominador n, en la figura anterior n es 3. Si efectuamos esa construcción para todo entero n, todos los números racionales vendrán representados por puntos de la recta numérica. Llamaremos a los puntos así obtenidos *puntos racionales*, y usaremos las expresiones "número racional" y "punto racional" como equivalentes (figura siguiente).

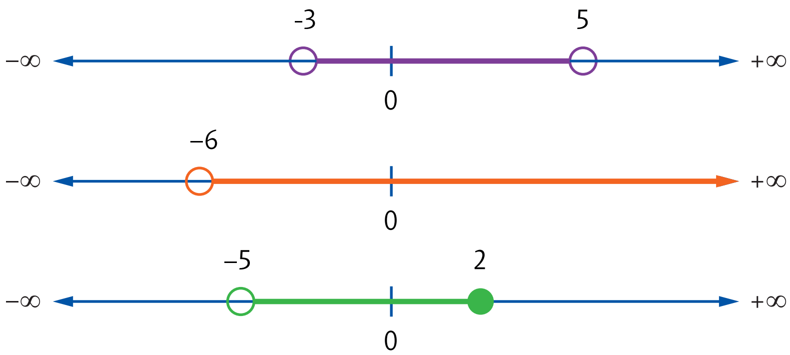


Ya se definió la relación $A < B$ para números naturales (*Leñitas Geométricas* 7ª época Nº 1, p. 6). Esta relación tiene una interpretación en la recta numérica, que resulta del hecho de que, si un número natural A es menor que otro B, el punto A está a la izquierda del punto B. Esta relación geométrica tiene significado para todos los puntos racionales, por lo que parece natural intentar extender la relación aritmética a los números racionales, de modo que corresponda al orden geométrico de los puntos racionales.

Se llega a ese resultado con la definición siguiente:

Diremos que el número racional A es menor que el número racional B ($A < B$), y B se dice mayor que A ($B > A$) cuando $B - A$ es positivo.

De la definición se sigue que, si es $A < B$, los puntos (números) entre A y B son aquellos que satisfacen simultáneamente las condiciones de ser $> A$ y $< B$. Todo par de puntos distintos, junto con los puntos comprendidos entre ellos, forman el *segmento* o *intervalo* $[A, B]$ (figura siguiente).



La distancia de un punto A al origen, considerada como positiva, se llama *valor absoluto* de A y se indica con el símbolo $|A|$.

Es decir: si es $A > 0$, se tiene $|A| = A$; y si es $A < 0$, se tiene $|A| = -A$. Es fácil ver que, si A y B tienen el mismo signo, vale la igualdad $|A + B| = |A| + |B|$; mientras que, si A y B tienen signos distintos, es $|A + B| < |A| + |B|$. Por tanto, combinando estos dos resultados, se tendrá en todo caso $|A + B| < |A| + |B|$, cualesquiera que sean los signos de A y B.

Para la representación que consideramos, se tiene la siguiente proposición de fundamental importancia:

Los puntos racionales forman un conjunto denso en la recta. Con esto se quiere decir que interiores a todo intervalo, por pequeño que sea, hay siempre puntos racionales.

Basta con tomar el denominador n suficientemente grande, de modo que el intervalo $[0, 1/n]$ sea más pequeño que el intervalo $[A, B]$ en cuestión, para que al menos una de las fracciones m/n sea interior a él. No existen, por tanto, intervalos, por pequeños que sean, vacíos de puntos racionales. Resulta también que en todo intervalo debe haber infinitos puntos racionales puesto que, si hubiera solamente un número finito de ellos, el intervalo determinado por dos consecutivos no podría contener puntos racionales, en oposición a lo que acabamos de probar.

SEGMENTOS INCONMENSURABLES, NÚMEROS IRRACIONALES Y CONCEPTO DE LÍMITE

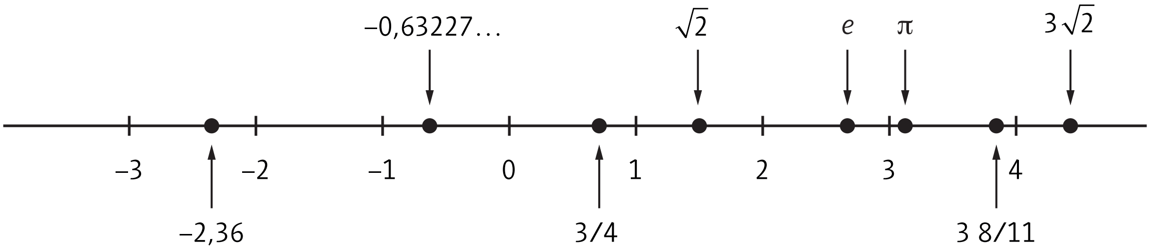
En matemática, dos segmentos son inconmensurables cuando no es posible encontrar enteros positivos que satisfagan una determinada condición. Esto significa que no se pueden comparar y el número asociado a ellos es irracional. El descubrimiento de la inconmensurabilidad por la escuela pitagórica fue un tropiezo cultural para los antiguos griegos, ya que ellos, como los pitagóricos, consideraban que todo podía medirse o compararse con números enteros. Este descubrimiento invalidó las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones, lo que provocó la primera crisis de los fundamentos en la historia de la matemática.

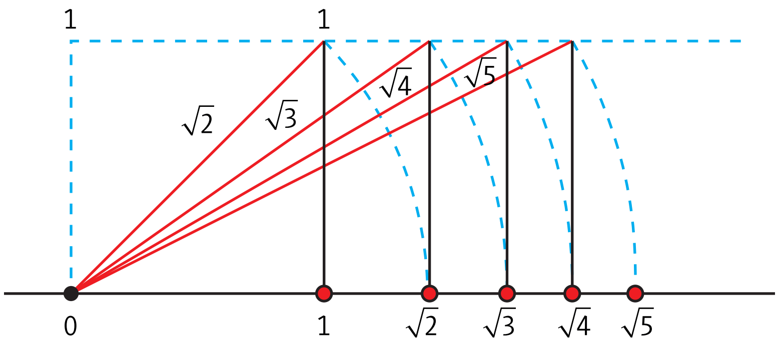
1. Introducción

Cuando se comparan las longitudes de dos segmentos rectilíneos a y b, puede ocurrir que a esté contenido un número r exacto de veces en b. En este caso podemos expresar la medida del segmento b tomando como unidad a y diciendo que la longitud de b es r veces la de a. Pero puede ocurrir que, mientras que ningún múltiplo entero de a sea igual a b, se pueda dividir a en un cierto número de partes iguales, por ejemplo, n, cada una de longitud a/n y tales que un múltiplo entero m del segmento a/n sea igual a b:

$$b = \frac{m}{n}a. \qquad (1)$$

Cuando se tiene una igualdad de la forma (1) diremos que los dos segmentos a y b son conmensurables, dado que tienen una medida común: el segmento a/n está contenido n veces en a y m veces en b. El conjunto de todos los segmentos conmensurables con a estará constituido por aquellos segmentos cuya longitud puede ser expresada en la forma (1), para enteros m y n convenientes ($n \neq 0$). Si tomamos a como segmento unidad $[0, 1]$ (véase la figura de abajo), algunos segmentos conmensurables con el segmento unidad corresponderán a todos los puntos racionales m/n sobre la recta numérica, mientras otros, no.





Para todas las cuestiones prácticas relacionadas con la medida, los números racionales son suficientes. Incluso desde un punto de vista teórico, como los puntos racionales cubren la recta *densamente*, podría pensarse que todos los puntos de la recta fueran racionales.

Si esta sospecha fuese cierta, todos los segmentos serían conmensurables con la unidad. Uno de los descubrimientos más sorprendentes de los primeros matemáticos griegos (la escuela pitagórica) fue el de que las cosas no sucedían de modo tan simple. Existen *segmentos inconmensurables* y si suponemos que a todo segmento corresponde un número, como medida de su longitud con un segmento unidad, existen también números irracionales.

Este descubrimiento fue un acontecimiento científico de la máxima importancia. Posiblemente señala el origen de lo que puede considerarse como contribución específica de los griegos a los procesos rigurosos de la matemática. Es evidente que este hecho afectó profundamente la matemática y la filosofía desde la época griega hasta nuestros días.

La teoría de los inconmensurables de Eudoxo de Cnido, presentada en forma geométrica en los *Elementos* de Euclides, es una obra maestra de la matemática griega, frecuentemente omitida en las desfiguradas versiones didácticas de los *Elementos*. Dicha teoría no fue apreciada en su justo valor hasta el siglo XIX, después de que Richard Dedekind, Georg Cantor y Karl Weierstrass construyeron una teoría rigurosa de los números irracionales. Expondremos aquí la teoría de los inconmensurables en la forma aritmética moderna.

Antes de nada, probaremos que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con su lado. Supongamos que se ha tomado como unidad de longitud el lado del cuadrado y que la diagonal tiene una longitud x. Entonces, por el teorema de Pitágoras, se tendrá

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

(Designamos x con el símbolo $\sqrt{2}$.) Si x fuese conmensurable con 1, existirían dos enteros p y q tales que $x = p/q$, y

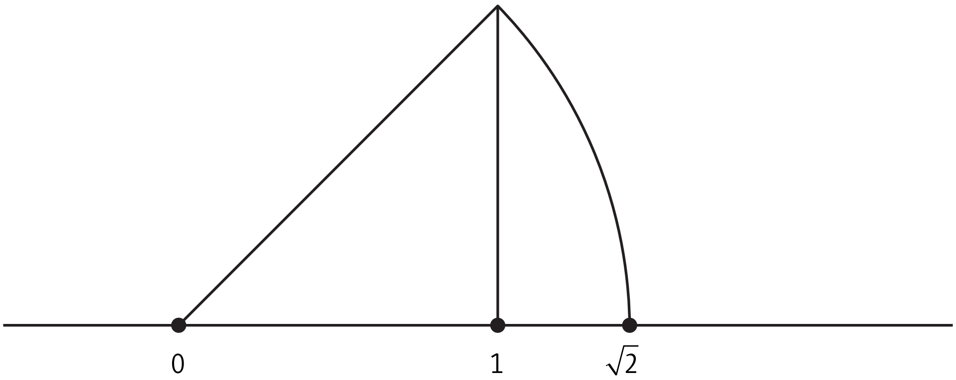
$$p^2 = 2q^2. \qquad (2)$$

Supongamos p/q irreducible, ya que puede suprimirse todo factor común al numerador y denominador. Puesto que 2 aparece como factor en el segundo miembro, p^2 tiene que ser un número par, de donde resulta que p debe ser par, pues el cuadrado de todo número impar es impar. Podemos, por tanto, escribir $p = 2r$. Al sustituir este valor en (2) se tiene $4r^2 = 2q^2$, o, lo que es lo mismo, $2r^2 = q^2$.

Por ser 2 un factor del primer miembro de la última igualdad, q^2 es par y, en consecuencia, también lo es q. Resultan así p y q divisibles por 2, lo que contradice la hipótesis de que p y q no tenían factores comunes;

en consecuencia, no se puede tener la igualdad (2); es decir, x no puede ser un número racional. Nuestro resultado puede ser expresado por la proposición: no existe ningún número racional igual a $\sqrt{2}$.

Del argumento precedente resulta que, mediante una construcción geométrica muy sencilla, se puede obtener un segmento inconmensurable con el segmento unidad. Si con un compás llevamos dicho segmento sobre la recta numérica, en la forma indicada en la figura siguiente,



el punto obtenido no puede coincidir con ninguno de los puntos racionales: el sistema de los números racionales, aunque denso en toda ella, no cubre toda la recta numérica.

A una mente ingenua debe resultarle ciertamente extraño y paradójico que el conjunto denso de los puntos racionales no llena la recta completa. Nada en nuestra "intuición" puede ayudamos a "ver" los puntos irracionales como distintos de los racionales.

No es de extrañar que el descubrimiento de los inconmensurables produjera gran impresión en los filósofos y matemáticos griegos, y que aún hoy le ofrezca, a quien medite sobre la cuestión, cierta perplejidad.

Es fácil construir con la unidad tantos *segmentos inconmensurables* como se desee. Los extremos de tales segmentos llevados a partir del 0 de la recta numérica son los llamados *puntos irracionales*. Ahora bien: el principio que sirvió para introducir las fracciones fue el de medir las longitudes con números, y deseamos en lo que sigue conservar este principio y tratar de acuerdo con él los segmentos inconmensurables con la unidad. Si queremos que exista una correspondencia mutua entre números, de una parte, y puntos de la recta, de otra, es preciso introducir los números irracionales.

Resumiendo en lo posible la situación, se puede decir que un número irracional representa la longitud de un segmento inconmensurable con la unidad. En las secciones que siguen precisaremos esta definición un poco vaga y completamente geométrica, hasta llegar a otra más satisfactoria desde el punto de vista del rigor lógico. Nuestras primeras consideraciones a este propósito partirán de las propiedades de las fracciones decimales.

Ejercicios para fijar ideas

1. Demuéstrese que $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$ no son racionales.
2. Pruébese que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ y $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ no son racionales. (Indicación: si, por ejemplo, el primero de estos números fuera igual a un número racional r, poniendo $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$ y elevando al cuadrado, $\sqrt{2}$ resultaría racional.)
3. Demuéstrese que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ es irracional. Inténtese construir ejemplos análogos y más generales.

2. Fracciones decimales. Decimales de infinitas cifras

Para cubrir la recta numérica con un conjunto de puntos denso en toda ella no son necesarios todos los números racionales; bastan, por ejemplo, los números obtenidos por subdivisión de cada intervalo unidad en 10, luego en 100, 1 000, etc., segmentos iguales. Los puntos así obtenidos corresponden a las "fracciones decímales"; por ejemplo, el punto 0,12 = 1/10 + 2/100 corresponde al punto situado en el primer intervalo unidad, en el segundo subintervalo de longitud 10^{-1} y en el origen del tercer "sub-sub"intervalo de longitud 10^{-2}. (a^{-n} significa $1/a^n$.) Si una fracción decimal contiene n cifras después de la coma, tiene la forma

$$f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \dots + a_n 10^{-n},$$

donde z es un entero y las a son cifras (0, 1, 2,... , 9) que indican las décimas, centésimas, y así de seguido. El número f se representa en el sistema decimal en la forma abreviada $z, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

Se ve inmediatamente que estas fracciones pueden escribirse en forma de fracción p/q, siendo $q = 10^n$; por ejemplo, $f = 1{,}314 = 1 + 3/10 + 1/100 + 4/1\,000 = 1\,314/1\,000$. Si p y q tienen un divisor común, la fracción podrá reducirse a otra cuyo denominador será divisor de 10^n. Por otra parte, ninguna fracción irreducible cuyo denominador no sea divisor de alguna potencia de 10 puede venir representada por una fracción decimal; por ejemplo $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ y $\frac{1}{250} = 4/1\,000 = 0{,}004$; en cambio, 1/3 no puede ser escrita como número decimal de n cifras, por grande que sea n, ya que una igualdad de la forma

$$1/3 = b/10^n,$$

conduciría a

$$10^n = 3b,$$

lo que es absurdo, ya que 3 no es factor de ninguna potencia de 10.

Tomemos sobre la recta numérica un punto P que no corresponda a ninguna fracción decimal; por ejemplo, el punto racional 1/3 o el punto irracional $\sqrt{2}$. Entonces, por el proceso de subdivisión del intervalo unidad en diez partes iguales, y luego en cien y así sucesivamente, el punto P no será nunca origen de ninguno de los subintervalos parciales. Sin embargo, P puede ser incluido dentro de intervalos cada vez más pequeños de la subdivisión decimal, con el grado de aproximación que se desee. Este proceso de aproximación puede ser descrito en la forma siguiente: supongamos que P está en el primer intervalo unidad; subdividiendo este intervalo en 10 partes iguales, cada una de longitud 10^{-1}, supongamos que P está en el tercero de tales intervalos.

Diremos entonces que P está entre las fracciones decimales 0,2 y 0,3. Subdividimos entonces el intervalo de 0,2 a 0,3 en 10 partes iguales, cada una de longitud 10^{-2}, y supongamos que P está en el cuarto de tales intervalos. Subdividamos este, a su vez, y supóngase que P está en el primero de estos intervalos de longitud 10^{-3}. Podremos decir entonces que P está entre 0,230 y 0,231.

Este proceso puede continuarse indefinidamente, dando lugar a una sucesión ilimitada de cifras a_1, a_2, a_3, …, a_n…., con la propiedad siguiente: para todo valor del entero n, el punto P está incluido en el intervalo I_n, cuyo origen es la fracción decimal $0{,}a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n$ y cuyo extremo es $0{,}a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}(a_n + 1)$, siendo 10^{-n} la longitud de I_n. Si elegimos la sucesión n = 1, 2, 3, 4,..., vemos que cada uno de los intervalos I_1, I_2, I_3,…, está contenido en el precedente, mientras que sus longitudes 10^{-1},10^{-2},10^{-3},… , tienden a cero. Diremos que P está contenido en una *sucesión de intervalos decimales encajados*; por ejemplo, si P es el punto racional 1/3, todas las cifras a_1, a_2, a_3, … son iguales a 3, y P está contenido en todo intervalo I_n cuyos extremos sean 0,333… 33 *y* 0,333… 34; es decir, 1/3 es mayor que 0,333… 33 y menor que 0,333… 34, donde el número de cifras puede ser arbitrariamente grande. Expresaremos este hecho diciendo que el número decimal de n cifras 0,333… 33 “tiende hacia 1/3” al crecer n, y escribiremos

$$1/3 = 0{,}333\ldots ;$$

los puntos indican que la fracción decimal debe extenderse e indefinidamente.

El punto irracional $\sqrt{2}$ antes definido conduce también a una fracción decimal que se extiende indefinidamente; sin embargo, en este caso, la ley que determina los valores de las cifras de la sucesión no es sencilla. En efecto, no se conoce ninguna fórmula explicita que determine las cifras de la sucesión, aunque se pueden calcular tantas como se desee:

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2 < (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 < 2 < (1{,}42)^2 = 2{,}0264$$

$$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 < 2 < (1{,}415)^2 = 2{,}002225$$

$$(1{,}4142)^2 = 1{,}99996164 < 2 < (1{,}4143)^2 = 2{,}00024449, \text{etc.}$$

Como definición general diremos que un punto P que no esté representado por una fracción decimal con un número finito n de cifras está representado por la fracción decimal infinita $z{,}a_1a_2a_3$..., si para cualquier valor de n el punto P está situado en el intervalo de longitud 10^{-n} con origen en el punto $z{,}a_1a_2a_3 \ldots a_n$.

De este modo se establece una correspondencia entre los puntos de la recta numérica y todas las fracciones decimales, finitas e infinitas. Esto sugiere la siguiente definición: un “número” es una fracción decimal, finita o infinita. Los decimales infinitos que no implican números racionales serán llamados números irracionales.

Hasta mediados del siglo XIX, las consideraciones precedentes eran aceptadas como una exposición satisfactoria del sistema de los números racionales e irracionales, sistema designado con el nombre de *continuo numérico*. El avance enorme de la matemática a partir del siglo XVII, en particular el desarrollo de la geometría analítica y del cálculo diferencial e integral, se hace sin riesgo con este concepto de sistema numérico como base.

Pero durante el periodo de examen crítico de los principios y de consolidación de los resultados, fue abriéndose paso la idea de que el concepto de número irracional requería un análisis más preciso. Como preliminar a nuestra exposición de la teoría moderna del continuo numérico, discutiremos en forma más o menos intuitiva el concepto básico de límite.

Ejercicio para fijar ideas. Calcúlese $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{5}$ con una aproximación de 10^{-2}.

3. Límites. Progresiones geométricas indefinidas

Como vimos en el punto precedente, ocurre a veces que un cierto número racional s viene aproximado por una sucesión de otros números racionales s_n, en la cual el índice n toma sucesivamente los valores 1,2, 3,...; por ejemplo, si es $s = 1/3$, la sucesión de números racionales $s_1 = 0{,}3$, $s_2 = 0{,}33$, $s_3 = 0{,}333$, etc., tiende hacia s. Para tener otro ejemplo, dividamos el intervalo unidad en dos mitades, la segunda mitad en otras dos partes iguales y así sucesivamente, hasta que los dos menores intervalos obtenidos sean de longitud 2^{-n}, donde n es arbitrariamente grande; es decir, $n = 100$, $n = 100\,000$, o el número que queramos. Sumando entonces todos los intervalos, excepto el último, obtenemos una longitud total igual a

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{2^n}. \tag{3}$$

Vemos que S_n difiere de 1 en $(1/2)^n$, y que esta diferencia llega a ser arbitrariamente pequeña, o tiende a cero cuando n crece indefinidamente. Carece de sentido decir que la diferencia es cero cuando n es infinito. El infinito aparece únicamente en el proceso y no como una cantidad efectiva.

Podemos describir el comportamiento de S_n diciendo que la suma S_n se aproxima a 1 cuando n tiende a infinito, y escribir

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots, \tag{4}$$

donde en el segundo miembro se tiene una serie indefinida o infinita. Esta "ecuación" no significa que debamos sumar efectivamente infinitos sumandos; es solo una expresión abreviada para el hecho de que 1 es el límite de la suma finita s_n cuando n tiende a infinito (no que es infinito). Así, la ecuación (4), con su símbolo incompleto "+ ...", es solo una manera breve de escribir la proposición precisa:

1 = al límite, cuando n tiende hacia infinito, de la cantidad

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

En forma más abreviada, pero más expresiva, se puede escribir

$$s_n \to 1 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{6}$$

Como otro ejemplo de límite, consideremos las potencias de un número q. Si es $-1 < q < 1$; por ejemplo, $q = 1/3$ o $q = -4/5$, la sucesión de potencias de q,

$$q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,\ q^n, \ldots ,$$

se aproxima a cero cuando n crece. Si q es negativo, el signo de q^n será alternativamente + o –, y q^n tenderá a cero aproximándose a este valor a derecha e izquierda, alternativamente. Para $q = 1/3$ se tiene $q^2 = 1/9$, $q^3 = 1/27$, $q^4 = 1/81$, ...; mientras que si es $q = -1/2$, se tendrá $q^2 = \frac{1}{4}$, $q^3 = -\frac{1}{8}$, $q^4 = \frac{1}{16}$, ... Diremos que el límite de q^n, cuando n tiende a infinito, es cero, o, en símbolos:

$$q^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty, \text{ para } -1 < q < 1. \tag{7}$$

(Incidentalmente, si $q > 1$ o $q < -1$, q^n no tiende hacia cero, sino que su valor absoluto crece sin límite.)

Para dar una demostración rigurosa de la proposición contenida en (7), partimos de la desigualdad probada anteriormente, la cual decía que $(1 + p)^n \geq 1 + np$ para todo entero positivo n y $p > -1$. Si q es un número fijo entre 0 y 1, por ejemplo, $q = 9/10$, se tiene $q = 1/(1 + p)$, siendo $p > 0$. De ahí resulta

$$\frac{1}{q^n} = (1 + p)^n \geq 1 + np > np \text{ o } 0 < q^n < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}.$$

Por consiguiente, q^n está comprendido entre el valor fijo 0 y $(1/p) \cdot (1/n)$, que se aproxima a cero al crecer n, puesto que p es fijo. De aquí resulta evidentemente que $q^n \to 0$. Si q es negativo, se tiene $q = -1/(1 + p)$ y, en vez de las cotas anteriores 0 y $(1/p)\,(1/n)$ aparecen ahora, respectivamente, $(-1/p)(1/n)$ y $(1/p)(1/n)$. Por lo demás, el razonamiento es el mismo.

Consideremos ahora la progresión geométrica

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n. \qquad (8)$$

(El caso $q = 1/2$ fue discutido.) Como vimos, se puede decir s_n en una forma concisa y simple. Multiplicando s_n por q, encontramos

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}, \qquad (8a)$$

y restando (8a) de (8) vemos que desaparecen todos los términos excepto el 1 y el q^{n+1}, obteniendo

$$(1 - q)s_n = 1 - q^{n+1},$$

o, por división,

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

El concepto de límite interviene al hacer crecer n. Como hemos visto, $q^{n+1} = q \cdot q^n$ tiende a cero si es $-1 < q < 1$, y por paso al límite se obtiene

$$s_n \to \frac{1}{1-q} \quad \text{cuando } n \to \infty, \quad \text{para } -1 < q < 1. \qquad (9)$$

Escrito como *progresión geométrica indefinida* (*serie*) resulta:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{para } -1 < q < 1. \qquad (10)$$

Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

de acuerdo con la ecuación (4), y, análogamente

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \ldots = \frac{9}{10}\frac{1}{1-1/10} = 1,$$

de forma que 0,99999… = 1. Del mismo modo se tiene que el número decimal finito 0,2374 y el decimal infinito 0,237399999… representan el mismo número.

Ejercicios para fijar ideas

1. Pruébese que $1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - \ldots = \dfrac{1}{1+q}$, si es $|q| < 1$.

2. ¿Cuál es el límite de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, donde es $a_n = n/(n + 1)$? (Indicación: Escríbase el término a_n en la forma $\dfrac{n}{n+1} = 1 - 1/(n+1)$ y obsérvese que el último término del segundo miembro tiende a cero.

3. ¿Cuál es el límite de $\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ para $n \to \infty$? (Indicación: Póngase la expresión en la forma $\dfrac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$).

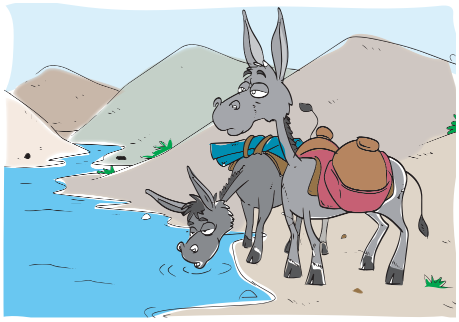
4. Pruébese, para $|q| < 1$, que $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots = \dfrac{1}{(1-q)^2}$. (Indicación: Utilícese el resultado del ejercicio 3 de la página 7, en *Leñitas Geométricas* 7ª época Nº 2.)

5. ¿Cuál es el límite de la serie indefinida $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots$?

6. ¿Cuál es el límite de $\dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$, de $\dfrac{1^2+2^2\dots+n^2}{n^3}$ y de $\dfrac{1^3+2^3\dots+n^3}{n^4}$? (Indicación: Utilícense los resultados de los puntos 2 (pp. 3-4) y 4 (pp. 4-5) en *Leñitas Geométricas* 7ª época Nº 2.)

II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?



Alejandro Magno

Alejandro III de Macedonia (Pela, Grecia, 20 o 21 de julio de 356 a. C. -Babilonia, 10 u 11 de junio de 323 a. C.), más conocido como Alejandro Magno o Alejandro el Grande, fue rey del antiguo reino griego de Macedonia (desde 336 a. C.), hegemón de Grecia, faraón de Egipto (332 a. C.) y Gran rey de Media y Persia (331 a. C.), hasta la fecha de su muerte. Sucedió a su padre Filipo II en el trono en 336 a. C., a la edad de 20 años, y pasó la mayor parte de sus años como gobernante liderando una extensa campaña militar a lo largo de Asia Occidental, Asia Central, partes de Asia del Sur y Egipto. Para la edad de 30 años había creado uno de los mayores imperios de la historia, extendiéndose desde Grecia hasta el noroccidente de la India. Nunca fue derrotado en batalla y se le considera ampliamente como uno de los más grandes y exitosos comandantes militares de la historia.

Hijo y sucesor de la princesa Olimpia de Epiro y el rey Filipo II de Macedonia, su padre lo preparó para reinar, proporcionándole experiencia militar y encomendando su formación intelectual a Aristóteles (hasta la edad de 16 años). Su ascenso al trono no fue fácil: su padre lo exilió, junto con su madre, por considerarlo un hijo adúltero. Su madre se exilió en Epiro y las amistades de Alejandro también fueron desterradas para evitar una posible conspiración. Filipo murió asesinado y Alejandro se hizo con el poder eliminando los adversarios que pudiesen reclamar el trono.

Alejandro Magno y su imperio.

LA CONSTRUCCIÓN DE UN IMPERIO Y LA SEMILLA DE LA UNIVERSIDAD COMO EL LUGAR DEL SABER

Alejandro Magno dedicó los primeros años de su reinado a consolidar su autoridad sobre los pueblos sometidos a Macedonia, que habían aprovechado la muerte de Filipo para rebelarse. En 336 a. C., poco después de asumir el trono de Macedonia, libró una campaña en los Balcanes y reafirmó el control sobre Tracia y partes de Iliria, antes de marchar contra la ciudad de Tebas, que fue destruida en la batalla. Luego, Alejandro lideró la Liga de Corinto y utilizó su poder para lanzar el proyecto panhelénico anhelado por su padre, asumiendo el liderazgo sobre todos los griegos en su conquista de Persia.

Como hegemón de toda Grecia en concepto de sucesor de su padre, continuó el plan que habían aprobado las polis griegas: conquistar el vasto imperio de Persia para vengar todos los daños que los persas habían causado a los griegos durante siglos, incluyendo la recuperación de todas las ciudades costeras de Asia Menor y las islas del mar Egeo. Preparó un ejército de macedonios y aliados griegos y en el año 334 a. C. se lanzó con su ejército de 40 000 hombres contra el poderoso Imperio persa en una guerra de venganza liderada por Macedonia.

A lo largo de su reinado de trece años, cambió por completo la estructura política y cultural de la zona al conquistar el Imperio aqueménida y dar inicio a una época de extraordinario intercambio cultural, en la que los griegos se expandieron por el Próximo Oriente. Es el llamado período helenístico (323-30 a. C.). Sus hazañas lo convirtieron en un mito y, en algunos momentos, prácticamente en una figura divina.

Tras consolidar la frontera de los Balcanes y la hegemonía macedonia sobre las ciudades-Estado de la antigua Grecia, poniendo fin a la rebelión que se produjo tras la muerte de su padre, Alejandro cruzó el estrecho del Helesponto hacia Asia Menor (334 a. C.) y comenzó la conquista del Imperio persa, regido por Darío III. Victorioso en las batallas del Gránico (334 a. C.), Issos (333 a. C.), Gaugamela (331 a. C.) y de la Puerta Persa (330 a. C.), se hizo con un dominio que se extendía por la Hélade, Egipto, Anatolia, Oriente Próximo y Asia Central, hasta los ríos Indo y Oxus.

Habiendo avanzado hasta la India, donde derrotó al rey Poro en la batalla del Hidaspes (326 a. C.), sus tropas se negaron a continuar hacia Oriente y hubo de regresar a Babilonia, donde falleció sin completar sus planes de conquista de la península arábiga. Con la llamada "política de fusión", Alejandro promovió la integración de los pueblos sometidos a la dominación macedonia mediante su incorporación al ejército y apoyando los matrimonios mixtos entre las élites macedonia y persa. Él mismo se casó con dos mujeres persas de noble cuna.

Esplendor de Alejandría durante el reinado de Alejandro Magno.

En sus treinta y dos años de vida, su imperio se extendió desde Grecia hasta el valle del Indo por el este y hasta Egipto por el oeste donde, prolífico fundador de ciudades, edificó Alejandría.

Esta ciudad egipcia habría de ser con mucho la más famosa de todas las Alejandría fundadas por el también faraón Alejandro. El control sobre diversas regiones era débil, en el mejor de los casos, y había territorios del norte de Asia Menor que jamás se hallaron bajo dominio macedonio. Al morir sin nombrar claramente un heredero, lo sucedieron su medio hermano Filipo III Arrideo (323-317 a. C.), que era una persona con discapacidad intelectual, y su hijo póstumo Alejandro IV (323-309 a. C.). No obstante, el verdadero poder estuvo en manos de sus generales, los llamados diádocos (sucesores), que iniciaron una lucha por la supremacía que conduciría al fraccionamiento del imperio de Alejandro en una serie de reinos, entre los cuales acabarían imponiéndose el Egipto ptolemaico, el Imperio seléucida y la Macedonia antigónida.

Alejandro es el mayor de los iconos culturales de la Antigüedad, considerado como el más heroico de los grandes conquistadores. Un segundo Aquiles ("soldado y semidiós"), para los griegos su héroe nacional y libertador, o vilipendiado como un tirano megalómano que destruyó la estabilidad creada por los persas. Su figura y su legado han estado presentes en la historia y la cultura, tanto de Occidente como de Oriente, y a lo largo de más de dos milenios inspiró a los grandes conquistadores de todos los tiempos, desde Julio César hasta Napoleón Bonaparte.

AÑOS DE FORMACIÓN Y ASCENSO AL PODER

Su educación fue dirigida por Leónidas de Epiro, un austero y estricto maestro macedonio que daba clases a los hijos de la más alta nobleza, que lo inició en el ejercicio corporal y también se encargó de su educación. Lisímaco, un profesor de letras bastante más amable, se ganó el cariño de Alejandro llamándolo Aquiles, y a su padre, Peleo. Sabía de memoria los poemas homéricos y todas las noches colocaba la *Ilíada* debajo de su cama. También leyó con avidez al historiador Heródoto y al poeta Píndaro.

Se cuentan numerosas anécdotas de su niñez, siendo la más referida aquella que narra Plutarco: Filipo II había comprado un gran caballo al que nadie conseguía montar ni domar. Alejandro, aun siendo un niño, se dio cuenta de que el caballo se asustaba de su propia sombra y lo montó dirigiendo su vista hacia el Sol. Tras domar a Bucéfalo, nombre que le dio a su corcel, su padre le dijo: "Búscate otro reino, hijo, pues Macedonia no es lo suficientemente grande para ti". Algunos historiadores antiguos coinciden en este relato, especialmente Calístenes, quien además narra la participación de Alejandro en los Juegos Olímpicos durante su adolescencia, en los que obtuvo victorias en competencias de carros.

A los trece años fue puesto bajo la tutela de Aristóteles. Este sería su maestro durante cinco años, en un retiro de la ciudad macedonia de Mieza. Aristóteles le daría una amplia formación intelectual y científica en las ramas que él mismo había abordado, como filosofía, lógica, retórica, metafísica, estética, ética, política, biología y otras tantas áreas.

Muy pronto (340 a. C.) su padre lo asoció a tareas del gobierno nombrándolo regente, a pesar de su juventud. Recibía personalmente a los enviados persas, deseosos de que Macedonia pagase los altos tributos exigidos por Darío. Conversaba amablemente con ellos y así se enteraba de sus estrategias acerca de las travesías de rutas tierra-mar, la preparación del ejército persa, todas informaciones que resultarían valiosas para las acciones que desarrollaría en el futuro. En el año 338 a. C. dirigió la caballería macedónica en la batalla de Queronea, siendo nombrado gobernador de Tracia ese mismo año.

Desde pequeño, Alejandro evidenció las características más destacadas de su personalidad: activo, enérgico, sensible y ambicioso. Es por eso por lo que, a pesar de tener apenas dieciséis años, se vio obligado a repeler una insurrección armada. Se afirma que Aristóteles le aconsejó esperar para participar en batallas, pero Alejandro le respondió: "Si espero, perderé la audacia de la juventud".

Una conocida anécdota, embellecida por la leyenda, es la del encuentro entre Alejandro y el filósofo Diógenes de Sinope en Corinto, durante los Juegos Ístmicos: "Reunidos los griegos en Corinto, y tras haber acordado en votación alinearse con Alejandro para luchar contra los persas, este fue proclamado general en jefe. Muchos políticos e intelectuales acudieron a darle la enhorabuena, por lo que Alejandro confiaba en que también Diógenes el sinopense hiciera otro tanto, ya que ambos se hallaban por entonces en Corinto. Mas Diógenes no prestó la menor atención a Alejandro, sino que continuó con toda calma en el barrio de Cranio. De modo que fue el propio Alejandro quien acudió a visitarlo. Lo encontró echado al sol, y al ver Diógenes que se acercaba una gran masa de gente, se incorporó un poco y miró a la cara a Alejandro. Tras saludarse, Alejandro preguntó a Diógenes si necesitaba algo: "Una cosa bien pequeña –contestó–, apártate un poco, que me estás quitando el sol".

Se cuenta que Alejandro, ante esta respuesta, quedó tan impresionado y admirado por la altivez, el desprecio y la independencia de espíritu de este hombre que dijo a sus acompañantes, que merodeaban riéndose y haciendo burlas: "Pues yo, de no ser Alejandro, de buen grado me gustaría ser Diógenes". En otra ocasión, encontró a Diógenes revolviendo basura. Al preguntarle qué buscaba, Diógenes respondió: "Estoy buscando huesos de esclavos, pero no hallo la diferencia entre estos y los de tu padre". Era claro que Diógenes despreciaba a Alejandro, quien nunca tomó represalia alguna.

Euclides de Alejandría

Proclo Diádoco escribió en su tiempo: "Ptolomeo le preguntó una vez a Euclides si había algún camino más corto para el conocimiento de la geometría que por el estudio de los *Elementos*, a lo que Euclides respondió que no había ningún camino real a la geometría".

La muerte de Alejandro Magno había conducido a una feroz contienda entre los generales del ejército griego, pero hacia el año 306 a. C. el control de la parte egipcia del imperio estaba ya firmemente en manos de Ptolomeo I, por lo que este ilustrado gobernante pudo dirigir al fin su atención a esfuerzos más constructivos.

Entre sus primeras decisiones estuvo la de establecer en Alejandría un instituto conocido como el Museo, que no fue superado por ningún otro en su tiempo. Como profesores de esta escuela hizo llamar a un grupo de sabios de primera línea entre los cuales estaba Euclides, el autor del texto de matemáticas más fabuloso y exitoso que se haya escrito nunca, los *Elementos* (*Stoicheia*).

EL MISTERIO EUCLIDES Y SUS OBRAS PERDIDAS

Teniendo en cuenta la fama del autor y de su "*bestseller*", es notable lo poco que se sabe de Euclides. Su vida fue tan oscura que no hay ningún lugar de nacimiento asociado a su nombre. Aunque a menudo algunas ediciones de los *Elementos* mencionan como identidad del autor la de Euclides de Megara, y en las historias de la matemática aparece frecuentemente un retrato de Euclides de Megara, se trata de un caso de confusión de identidad.

El auténtico Euclides de Megara era un discípulo de Sócrates y, si bien se ocupó de lógica, no se sentía más atraído por la matemática que su maestro. Nuestro Euclides, en cambio, es conocido como Euclides de Alejandría, debido a que fue llamado allí para enseñar matemáticas. Por el carácter de su obra se puede suponer que había estudiado con los discípulos de Platón, si no en la Academia misma. Las leyendas relacionadas con Euclides nos lo pintan como un viejo amable y gentil.

La tradición que hemos reproducido acerca de la petición de Alejandro Magno por una introducción fácil a la geometría se ve repetida en el caso de Ptolomeo a quien, según se dice, Euclides le aseguró que "no hay ningún camino real para la geometría". Evidentemente, Euclides no hacía hincapié en los aspectos prácticos de la materia. En efecto, una leyenda narra que cuando uno de sus alumnos le preguntó qué utilidad tenía el estudio de geometría, Euclides ordenó a su esclavo que le diera unas monedas, "ya que debe necesariamente ganar algo de lo que aprende".

Euclides y los *Elementos* son considerados frecuentemente como sinónimos, pero en realidad él fue el autor de una docena de tratados que cubrían ampliamente materias variadas, desde óptica, astronomía, música y mecánica hasta incluso un libro sobre las secciones cónicas. Aparte de *La esfera en movimiento*, de Autólico de Pitane, considerado el tratado más antiguo de la antigua Grecia que se conserva completo, las obras de Euclides que han sobrevivido integran las obras de matemática griega más antiguas existentes, a pesar de que se haya perdido más de la mitad de sus escritos, entre los que están algunos de los más importantes, tales como un tratado sobre cónicas.

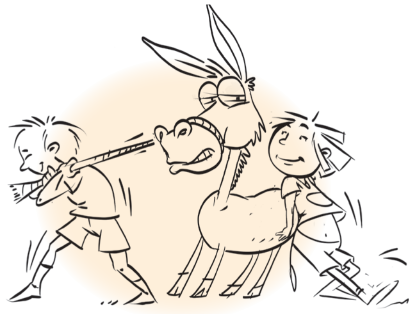
Euclides pensaba que Aristeo, un geómetra contemporáneo suyo, era merecedor de grandes honores por haber escrito un tratado anterior, *Cinco libros acerca de lugares sólidos* (que era el nombre griego para las secciones cónicas, derivado posiblemente de la definición estereométrica de estas curvas en la obra de Menecmo). Ambos tratados sobre cónicas escritos por Aristeo y Euclides se han perdido, con toda probabilidad de manera irrecuperable, y ello se debió quizá a que fueron pronto reemplazados por la obra más extensa sobre cónicas, la de Apolonio, que describiremos más adelante. Entre las obras de Euclides perdidas están también: *Sobre falacias* (*Pseudaria*), *Tres libros de porismas*, y un tratado sobre lugares de superficie.

A partir de las referencias antiguas, no está siquiera muy claro qué material contenían estas obras. La tercera, por ejemplo, podría haber estado dedicada a las superficies conocidas por los antiguos –esfera, cono, cilindro, toro, elipsoide de revolución, paraboloide de revolución e hiperboloide de revolución de dos hojas– o también a curvas sobre estas superficies. Por lo que sabemos, los griegos no estudiaron ninguna superficie que no fuera la de un sólido de revolución.

La pérdida de los *Porismas* es especialmente exasperante, porque pudiera haber representado una aproximación antigua a un tipo de geometría analítica. Más tarde, Papo de Alejandría nos dirá que un *porisma* es algo intermedio entre un teorema –en que se propone algo para ser demostrado– y un problema –en que se propone algo para ser construido–. Otros han descrito un porisma como una proposición en la que uno determina una relación entre cantidades conocidas y variables o indeterminadas, quizá el enfoque más próximo al concepto de función en la Antigüedad.

Si un porisma era, como se ha llegado a pensar, algo así como una ecuación verbal de una curva, el libro de Euclides pudo haber diferido ampliamente de nuestra geometría analítica, por la falta de símbolos y técnicas algebraicas. Michel Chasles, el historiador francés de la geometría del siglo XIX, sugería como un típico porisma euclídeo la determinación del lugar geométrico de un punto cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos era constante.

OTRAS OBRAS CONOCIDAS

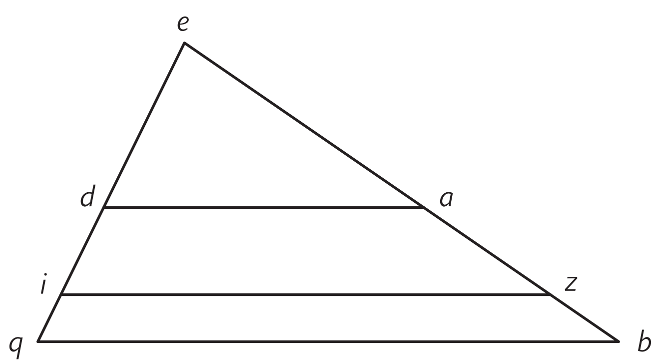


Hasta nuestros días han sobrevivido cinco obras de Euclides: los *Elementos*, las *Data*, la *División de Figuras*, los *Fenómenos* y la *Optica*. La última tiene el interés de ser una obra primitiva sobre perspectiva, o la geometría de la visión directa. Los antiguos habían dividido el estudio de los fenómenos ópticos en tres partes: (1) óptica (o la geometría de la visión directa), (2) catóptrica (o la geometría de los rayos reflejados), y (3) dióptrica (o la geometría de los rayos refractados). Una *Catóptrica* atribuida a veces a Euclides es de autenticidad dudosa, siendo quizá debida a Teon de Alejandría, que vivió unos 600 años después. La *Optica* de Euclides es notable por su adopción de una teoría de "emisión" de la visión según la cual el ojo envía rayos que viajan hasta el objeto, en contraste con una teoría aristotélica rival en función de la cual viaja en línea recta una actividad en el medio ambiente desde el objeto hasta el ojo. Debe notarse que la matemática de la perspectiva (en oposición a la descripción física) es la misma, cualquiera que sea de las dos la teoría que se adopte.

Entre los teoremas que se encuentran en la *Optica* de Euclides hay uno que fue muy usado en la Antigüedad: $\operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta < \alpha/\beta$ si $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Uno de los objetivos de la *Optica* era el de combatir una obstinación pertinaz de los epicúreos en el sentido de que un objeto era exactamente tan grande como parecía, sin tener en cuenta en absoluto la deformación de escorzo implicada por la perspectiva.

Los *Fenómenos* se parecen mucho a *La esfera*… de Autólico, es decir, es una obra sobre geometría esférica para uso de astrónomos. Una comparación de las dos obras viene a indicar que ambos autores se apoyaron ampliamente en una tradición de textos que era bien conocida a su generación. Es muy posible que pasara lo mismo en gran medida con los *Elementos* de Euclides, pero en este caso no nos queda ningún trabajo contemporánea con el que el tratado pudiera ser comparado.

La obra euclídea sobre *División de Figuras* es significativa por su característica de que, de no haber sido por la erudición de los sabios árabes, también se habría perdido. No ha sobrevivido en el original griego, pero antes de que desaparecieran las versiones griegas se hizo una traducción al árabe (omitiendo algunas de las demostraciones originales "porque son fáciles"), la cual a su vez fue traducida posteriormente al latín, y por último a los idiomas modernos usuales. Lo mismo ha ocurrido frecuentemente con otras obras antiguas. La *División de Figuras* incluye una colección de 36 proposiciones relativas a la división de figuras planas. Por ejemplo, la proposición 1 pide la construcción de una recta que sea paralela a la base de un triángulo y divida al triángulo en dos partes de iguales áreas. La proposición 4 exige la bisección de un trapecio *abqd* (figura siguiente)



mediante una recta paralela a sus bases; la recta buscada *zi* se halla determinando el punto *z* tal que

$$\overline{ze}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{eb}^2 + \overline{ea}^2\right).$$

Otras proposiciones piden la división de un paralelogramo en dos partes iguales mediante una recta trazada por un punto dado de uno de los lados (proposición 6), o por un punto dado exterior al paralelogramo (proposición 10). La última proposición pide la división de un cuadrilátero en una razón dada, mediante una recta que pase por un punto dado de uno de los lados del cuadrilátero.

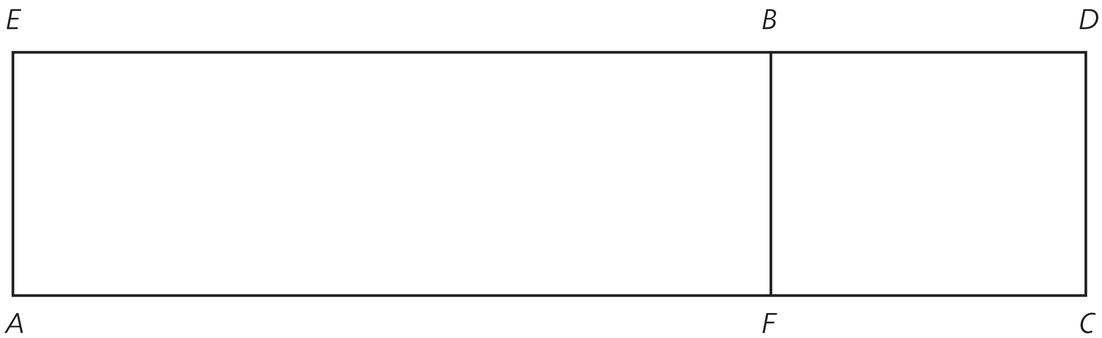
Algo parecido a la *División de Figuras*, por su carácter y finalidad, son las *Data* de Euclides, obra que nos ha llegado tanto en el original griego como en árabe. Parece que fue escrita para ser usada en la Universidad de Alejandría como complemento a los seis primeros libros de los *Elementos*, de la misma manera que un manual de tablas sirve de suplemento a un libro de texto; sería útil, pues, como una guía en el análisis de problemas de geometría con el objeto de descubrir demostraciones.

El libro empieza con quince definiciones referentes a magnitudes y lugares geométricos, y la parte central del texto comprende 95 proposiciones relativas a las interrelaciones entre condiciones y magnitudes que pueden darse en un problema. Las dos primeras afirman que si se dan dos magnitudes a y b, entonces está dada también su razón y que si se da una magnitud y su razón a otra segunda, entonces también está dada la segunda magnitud.

Los matemáticos clásicos, sus obras y manuscritos.

Hay como dos docenas de proposiciones análogas que sirven como reglas o fórmulas algebraicas, y a continuación siguen algunas reglas geométricas sencillas relativas a rectas paralelas y magnitudes proporcionales, recordando al lector algunas de las consecuencias de los datos de un problema, tales como la advertencia de que cuando dos segmentos están en una cierta razón dada entonces se conoce la razón de las áreas de dos figuras rectilíneas semejantes cualesquiera construidas sobre dichos segmentos.

Algunas de las proposiciones nos dan el equivalente geométrico de la resolución de ecuaciones cuadráticas; por ejemplo, se nos dice que si se aplica un área rectangular dada AB sobre un segmento de longitud dada AC (figura siguiente)



y si nos dan además el área BC que le falta al área AB para agotar el rectángulo completo AD construido sobre AC, entonces también son conocidas las dimensiones del rectángulo BC. Utilizando notación algebraica moderna se demuestra fácilmente que la afirmación anterior es verdadera.

Sea a la longitud de AC, b^2 el área de AB, y sea $\frac{c}{d}$ la razón de FC a CD; entonces, si llamamos $FC = x$, $CD = y$ tenemos que $\frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ y, además, que $(a - x)y = b^2$. Eliminando y nos queda $(a - x)xd = b^2c$ o bien $dx^2 - adx + b^2c = 0$, de donde resulta

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b^2c}{d}}.$$

La solución geométrica dada por Euclides es equivalente a esta, salvo que solo utiliza el signo menos antes de la raíz. Las proposiciones 84 y 85 de las *Data* son sustitutos geométricos de los notables métodos algebraicos de los babilonios para resolver los sistemas $xy = a^2$, $x \pm y = b$, que son, a su vez, equivalentes a la solución de ecuaciones cuadráticas. Las últimas proposiciones de las *Data* se refieren a las relaciones entre medidas lineales y angulares en un círculo dado.

LA FINALIDAD DE LOS ELEMENTOS

La Universidad de Alejandría no era probablemente muy distinta de las instituciones modernas de enseñanza superior. Algunos de los miembros de la facultad sobresaldrían en la investigación, otros se adaptarían mejor a tareas administrativas y otros aún sobresaldrían por su virtud pedagógica. Según parece, por las referencias que tenemos, Euclides tenía de manera muy definida a esta última categoría; no hay ningún descubrimiento nuevo que se le atribuya a él directamente, pero sí destacó por su habilidad expositiva. Esa es la clave del éxito de su obra más importante, los *Elementos*: se trataba claramente de un libro de texto, y no precisamente el primero.

Sabemos que hubo al menos tres *Elementos* análogos anteriormente, incluyendo el de Hipócrates de Quíos, pero no queda ni rastro de ellos ni de ningún otro rival potencial durante los tiempos antiguos. Los *Elementos* de Euclides se destacaron de tal manera por encima de los restantes competidores que fueron los únicos que sobrevivieron. Los *Elementos* no eran, como se piensa a veces, un compendio de todos los conocimientos geométricos, sino más bien un texto introductorio que cubría toda la matemática elemental –es decir, la aritmética (en el sentido de la "aritmética superior" de los ingleses, o de la "teoría de números" de los americanos), la geometría sintética (de puntos, rectas, planos, círculos y esferas) y el álgebra (no en el sentido simbólico moderno, sino lo equivalente con ropaje geométrico)–. Se notará inmediatamente que el arte de calcular no está incluido, ya que esto no formaba parte de la enseñanza universitaria; tampoco estaba incluido en el libro el estudio de las cónicas ni el de las curvas planas superiores, porque esto formaba parte de la matemática más avanzada. Proclo nos describe los *Elementos* como si guardaran la misma relación con el resto de la matemática que la que tienen las letras del alfabeto con relación al lenguaje.

Si los *Elementos* hubieran tratado de ser un depósito de información exhaustivo, el autor habría incluido probablemente referencias a otros autores, revelación acerca de las investigaciones recientes y explicaciones informales, pero tal como están escritos, los *Elementos* se limitan austeramente al asunto de que se trata: la exposición en un orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental.

De vez en cuando, sin embargo, otros escritores posteriores interpolaron en el texto explicaciones en forma de escolios, y los copistas ulteriores copiaron dichos añadidos como si fueran parte del texto original; algunos de ellos aparecen en todos los manuscritos existentes actualmente. Euclides mismo no formuló ninguna pretensión de novedad, y está claro que debió hacer nutrido uso de las obras de sus predecesores, pero se cree que la ordenación final es suya propia, y presumiblemente algunas de las demostraciones se deban también a él, pero aparte de esto es difícil estimar el grado de originalidad que hay en esta obra matemática, la más famosa de la historia.

DEFINICIONES Y POSTULADOS

Los *Elementos* están divididos en trece libros o capítulos, de los cuales la primera media docena trata sobre geometría plana elemental; los tres siguientes, sobre teoría de números; el libro X, sobre los inconmensurables; y los tres últimos, principalmente sobre geometría de sólidos. No hay ninguna introducción o preámbulo a la obra, y el primer libro comienza abruptamente con una lista de 23 definiciones. Los defectos o debilidades están aquí en que algunas de las definiciones no definen nada, ya que no hay ningún conjunto previo de elementos indefinidos en términos de los cuales definir los demás.

Así, decir, como hace Euclides, que "un punto es lo que no tiene parte", o que "una línea es longitud sin anchura", o que "una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura", apenas significa definir estos objetos, pues una definición debe expresarse en términos de cosas anteriores y mejor conocidas que las cosas que se definen. Es fácil plantear objeciones a otras de las llamadas "definiciones" de Euclides, a cuenta de su circularidad lógica, como en el caso: "los extremos de una línea son puntos", o "una línea recta es una línea que está situada de la misma manera con respecto a todos sus puntos", o "los extremos de una superficie son líneas", todas ellas posiblemente debidas a Platón. La definición euclídea de un ángulo plano como "la inclinación de una respecto de la otra de dos líneas en un plano que se cortan y no están situadas sobre una línea recta" es defectuosa por el hecho de que "inclinación" no ha sido definida previamente y no resulta ser mejor conocida que la palabra"ángulo".

A continuación de las definiciones, Euclides nos presenta una lista de cinco postulados y cinco nociones comunes. Aristóteles había hecho una distinción clara entre axiomas (o nociones comunes) y postulados; los primeros, según él, deben ser convincentes por sí mismos, por ser verdades comunes a todas las ciencias, mientras que los segundos son menos evidentes y no presuponen el asentimiento del que está aprendiendo, ya que se refieren solamente a la materia concreta de que se trate.

Algunos escritores posteriores distinguieron entre los dos tipos de hipótesis aplicando la palabra axioma a algo conocido o aceptado como obvio, mientras que la palabra postulado se refería a algo que se"exige". Nosotros no podemos saber si Euclides suscribiría alguno de estos dos puntos de vista, e incluso sí distinguiría entre los dos tipos de hipótesis; los manuscritos existentes no se muestran de acuerdo en este punto, y en algunos casos las 10 hipótesis aparecen reunidas todas en una sola categoría; en cualquier caso, los matemáticos modernos no ven ninguna diferencia esencial entre un axioma y un postulado. En la mayor parte de los manuscritos de los *Elementos* nos encontramos con las 10 hipótesis siguientes:

Postulados. Postúlese lo siguiente:

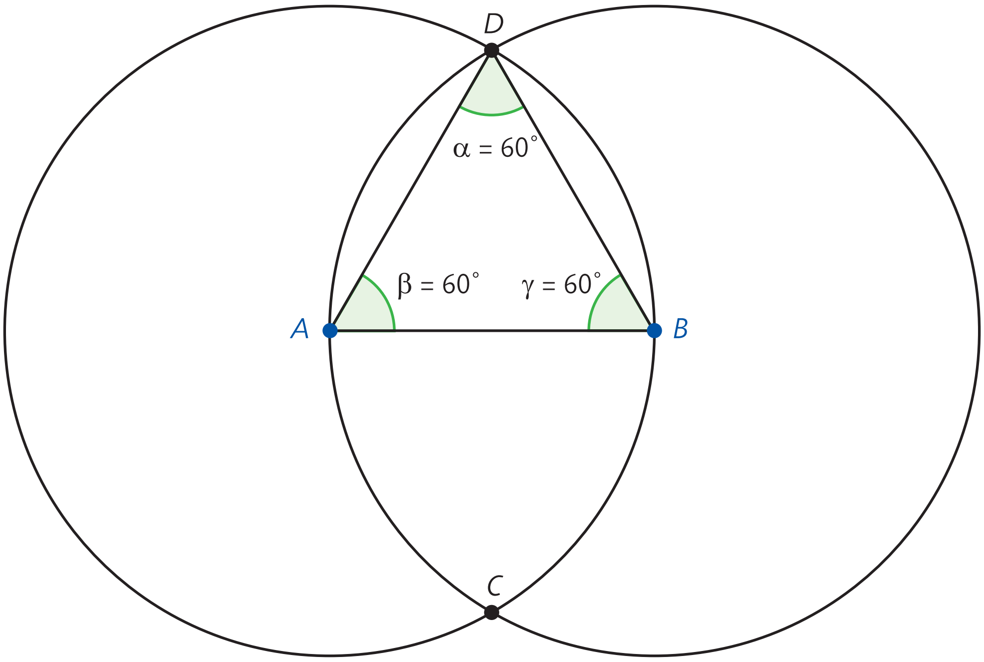
1. Trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.
2. Prolongar una línea recta finita de manera continua a otra línea recta.
3. Describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Que todos los ángulos rectos son iguales.
5. Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes:

1. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
3. Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

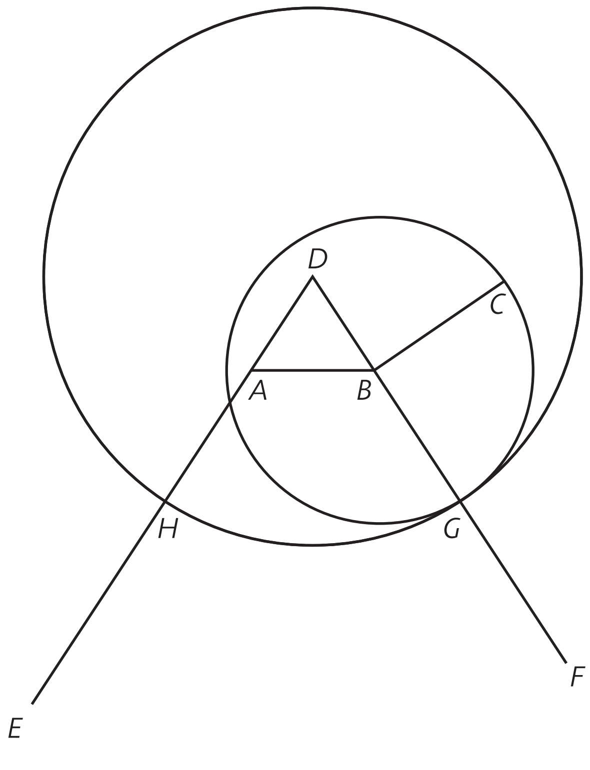
Aristóteles había escrito que "siendo iguales las demás cosas, la demostración mejor será aquella que proceda del menor número de postulados", y Euclides evidentemente suscribía este principio; por ejemplo, el postulado 3 se interpreta en su sentido literal más limitado, expresado a veces como el uso del compás euclídeo (o colapsable), cuyas patas mantienen una abertura firme en tanto que las puntas están apoyadas en el papel, pero se cierran en cuanto se lo levanta del papel. Es decir, el postulado no se interpreta en el sentido de dejar el uso del compás para transportar una distancia igual a un segmento sobre otro segmento separado más largo, a partir de uno de sus extremos.

En las tres primeras proposiciones del *Libro I* se demuestra que esta última construcción es siempre posible, incluso bajo la interpretación estricta del postulado 3.



La primera proposición justifica la construcción de un triángulo equilátero *ABC* sobre un segmento dado *AB*, construyendo una circunferencia con centro en *A* y pasando por *B*, y otra con centro en *B* y pasando por *A* y tomando como punto *C*, el punto de intersección de las dos circunferencias (que deberían cortarse, se suponía tácitamente) (figura de arriba).

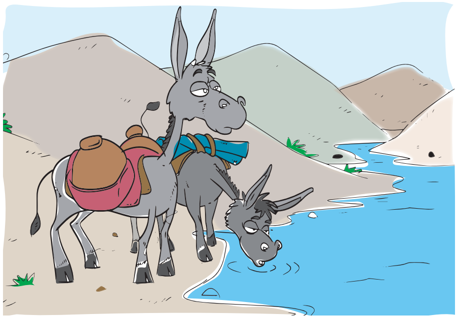
La proposición 2 se apoya entonces en la proposición 1 para demostrar que desde cualquier punto *A* como extremo (ver la figura de abajo) se puede trazar un segmento rectilíneo igual a un segmento dado *BC*. En primer lugar, Euclides dibuja *AB* y sobre él construye el triángulo equilátero *ABD*, extendiendo los lados *DA* y *DB* hasta *E* y *F*, respectivamente. Con *B* como centro describe la circunferencia que pasa por *C* y que corta a *BF* en *G*; entonces, con *D* como centro, traza la circunferencia que pasa por *G*, la cual corta a *DE* en *H*.



Se ve fácilmente, entonces, que *AH* es el segmento buscado. Por último, en la proposición 3 Euclides utiliza la proposición 2 para demostrar que, dados dos segmentos rectilíneos distintos cualesquiera, se puede cortar del mayor un segmento igual al menor.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

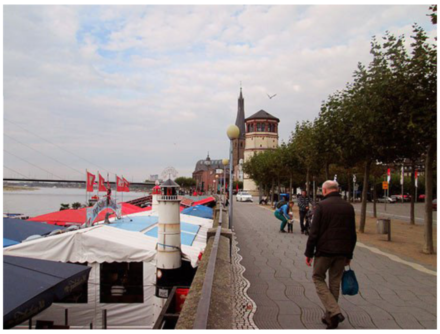
¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?



Biografía

¿Quién fue Felix Christian Klein para la enseñanza de la matemática?

Felix Christian Klein nació el 25 de abril de 1849 en Düsseldorf, Prusia (hoy Alemania), y falleció el 22 de junio de 1925, en Gotinga (Alemania). Fue un matemático alemán cuya síntesis de la geometría como el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes bajo un grupo dado de transformaciones, conocida como el Programa de Erlanger, influyó profundamente en el desarrollo matemático y en la educación.



Félix Klein. Una vista de Düsseldorf.

Felix Klein es más conocido por su trabajo en geometría no euclidiana, su estudio de las conexiones entre la geometría y la teoría de grupos, y por sus resultados en la teoría de funciones. Nació el 25/4/1849 y se deleitaba en señalar en cada uno de sus cumpleaños que su fecha día (5^2), mes (2^2) y año ($2^2 \cdot 3^2$) era el cuadrado de un primo.

El padre de Klein era secretario del jefe del gobierno. Hay una pintoresca descripción del nacimiento de Felix en su obituario en las Actas de la *Royal Society*:
"**En el espacio exterior, el cañón retumbaba sobre las barricadas que los insurgentes renanos habían alzado contra sus odiados gobernantes prusianos. En el interior, aunque todos estaban preparados para la huida, nadie pensaba en ello; aquella noche nació un hijo del severo secretario prusiano. Ese hijo fue Felix Klein**". La revolución contra los prusianos, que dio lugar a un nacimiento tan dramático para Felix Klein, fue completamente aplastada en el verano de 1849.

Klein asistió al *Gymnasium* de Düsseldorf. Después de graduarse, ingresó en la Universidad de Bonn y estudió allí matemática y física durante el ciclo 1865-1866. Comenzó su carrera con la intención de convertirse en físico. Mientras aún estudiaba en la Universidad de Bonn, fue nombrado asistente de laboratorio de Julius Plücker en 1866.

Julius Plücker

Nacido en Elberfeld (Alemania) en 1801 y fallecido en Bonn (Alemania) en 1868, Plücker era un matemático y físico que estudió los fenómenos producidos por descargas eléctricas en gases enrarecidos y destacó la fluorescencia causada por los rayos catódicos. Llevó a cabo una profunda renovación de la geometría proyectiva desde un enfoque algebraico y mediante una generalización del concepto de coordenada.

Derivó las ecuaciones de Plücker. Formuló una nueva geometría del espacio basada en la consideración de una línea como elemento espacial.

Plücker tenía una cátedra de matemática y física experimental en Bonn, pero cuando Klein se convirtió en su asistente, sus intereses personales ya estaban muy arraigados en la geometría. Klein se doctoró supervisado por Plücker en la Universidad de Bonn en 1868, con una disertación "*Sobre la transformación de la ecuación general de segundo grado entre coordenadas lineales a una forma canónica*", sobre la geometría lineal y sus aplicaciones a la mecánica. En su tesis, Klein clasificó los complejos lineales de segundo grado utilizando la teoría de divisores elementales de Weierstrass.

Sin embargo, durante el año en que Klein recibió su doctorado Plücker murió dejando sin corregir su trabajo principal sobre los fundamentos de la geometría lineal. Klein era la persona obvia para completar la segunda parte de la "Nueva geometría del espacio de Plücker" y este trabajo lo llevó a familiarizarse con Alfred Clebsch.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch

Nacido el 19 de enero de 1833 en Königsberg y fallecido el 7 de noviembre de 1872 en Gotinga (Alemania), Clebsch fue un matemático alemán que hizo importantes contribuciones en geometría algebraica y teoría de invariantes. Estudió en la Universidad de Königsberg y comenzó su carrera docente en la Universidad Humboldt de Berlín y la Universidad de Karlsruhe. Sus colaboraciones con Paul Gordan en la Universidad de Gießen llevaron a la introducción de los coeficientes de Clebsch-Gordan para armónicos esféricos, que actualmente son ampliamente utilizados en mecánica cuántica. Junto con Carl Neumann en la Universidad de Gotinga, fundó en 1868 la revista de investigación matemática *Mathematische Annalen*. En 1883, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant tradujo el trabajo de Clebsch sobre elasticidad al idioma francés, publicándolo bajo el título de *Théorie de l'élasticité des corps solides*.

Clebsch se había mudado a Gotinga en 1868 y durante 1869 Felix Klein realizó visitas a Berlín, París y Gotinga. En julio de 1870, estaba en París cuando Bismarck, el canciller prusiano, publicó un mensaje provocador destinado a enfurecer al gobierno francés. Francia declaró la guerra a Prusia el 19 de julio y Klein sintió que ya no podía permanecer en París y regresó. Luego, durante un corto período, hizo el servicio militar como asistente médico antes de ser designado profesor en Gotinga, a principios de 1871.

Luego, en 1872, fue nombrado profesor en Erlangen, en Baviera, en el sur de Alemania. Fue fuertemente apoyado por Clebsch, quien le atribuyó mucha probabilidad de convertirse en el matemático más importante de su época, haciendo que Klein ocupara una cátedra desde la notable edad de 23 años.

Sin embargo, no construyó una escuela en Erlangen, donde solo había unos pocos estudiantes, por lo que se alegró cuando le ofrecieron una cátedra en la Escuela Técnica de Múnich en 1875. Allí, él y su colega Alexander von Brill impartieron cursos avanzados a un gran número de excelentes estudiantes y el gran talento de Klein para la enseñanza se expresó plenamente. Entre los estudiantes a los que enseñó mientras estaba en Múnich estaban Adolf Hurwitz, Walter von Dyck, Karl Rohn, Carl Runge, Max Planck, Luigi Bianchi y Gregorio Ricci-Curbastro.

También en 1875, Klein se casó con Anne Hegel, la nieta del filósofo Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Grace Chisholm Young recuerda "[...] los días soleados en que el alto y apuesto joven profesor cortejó y conquistó a la encantadora nieta del filósofo Hegel".

Tras cinco años en la Escuela Técnica de Múnich, Klein fue nombrado catedrático de geometría en Leipzig. Allí tuvo como compañeros a numerosos profesores jóvenes y talentosos, entre ellos von Dyck, Rohn, Eduard Study y Friedrich Engel. Los años que Klein pasó en Leipzig entre 1880 y 1886 cambiaron radicalmente su vida en muchos sentidos. Como escribe David E. Rowe: "Leipzig parecía un puesto avanzado magnífico para construir el tipo de escuela que ahora tenía en mente: **[...] una que aprovecharía en gran medida las abundantes riquezas que ofrecía el enfoque geométrico de Riemann a la teoría de funciones. Pero los acontecimientos imprevistos y su salud siempre delicada conspiraron contra este plan [...] [en él había] dos almas [...] una anhelaba la vida tranquila del erudito; la otra, la vida activa de editor, profesor y organizador científico. [...] Fue durante el otoño de 1882 cuando el primero de estos dos mundos se derrumbó sobre él [...] su salud se derrumbó por completo y durante los años 1883-1884 estuvo acosado por la depresión**".

En 1886, cuando Klein había terminado su carrera como investigador matemático, aceptó una cátedra en la Universidad de Gotinga. Enseñó allí hasta que se jubiló en 1913, pero a partir de entonces buscó restablecer Gotinga como el principal centro de investigación matemática del mundo. Su propio papel como líder de una escuela de geometría en Leipzig nunca fue transferido a Gotinga, donde impartió una amplia variedad de cursos, principalmente sobre la interfaz entre las matemáticas y la física, como la mecánica y la teoría del potencial.

Klein estableció en Gotinga un centro de investigación que serviría como modelo para las mejores casas de investigación matemática en todo el mundo. Introdujo reuniones de debate semanales, una sala de lectura matemática con una biblioteca especializada. En 1895 trajo a David Hilbert desde Königsberg para que se uniera a su equipo de investigación.

La fama de la revista *Mathematische Annalen* se basa en las habilidades matemáticas y de gestión de Klein. La revista fue fundada originalmente por Clebsch, pero fue recién bajo la dirección de Klein cuando primero rivalizó y luego superó en importancia a la *Revista de Crelle*. En cierto sentido, estas revistas representaban a los equipos rivales de la escuela de matemática de Berlín que dirigía la *Revista de Crelle* y a los seguidores de Clebsch, que apoyaban a los *Mathematische Annalen*. Klein creó un pequeño equipo de editores que se reunían regularmente y tomaban decisiones democráticas. La revista se especializó en análisis complejo, geometría algebraica y teoría de invariantes. También proporcionó un importante medio para el análisis real y la nueva área de la teoría de grupos.

Klein se jubiló debido a problemas de salud en 1913. Sin embargo, continuó enseñando matemáticas en su casa durante los años de la Primera Guerra Mundial. Es un poco difícil entender la importancia de las contribuciones de Klein a la geometría. Esto no se debe a que nos resulten extrañas hoy, sino todo lo contrario: se han convertido en una parte tan importante de nuestro pensamiento matemático actual que nos resulta difícil darnos cuenta de la novedad de sus hallazgos y también del hecho de que estos no fueron aceptados universalmente por todos sus contemporáneos.

Los primeros descubrimientos matemáticos importantes de Klein se realizaron en 1870, en colaboración con Marius Sophus Lie.

Marius Sophus Lie

Marius Sophus Lie fue un matemático noruego (17 de diciembre de 1842-18 de febrero de 1899) que creó en gran parte la teoría de la simetría continua y la aplicó al estudio de la geometría y las ecuaciones diferenciales. La herramienta principal de Lie, y uno de sus logros más grandes, fue el descubrimiento de que los grupos continuos de transformación (ahora llamados *grupos de Lie*) podían ser entendidos mejor "linealizándolos", y estudiando los correspondientes campos vectoriales generadores (los así llamados *generadores infinitesimales*). Los generadores obedecen a una versión linealizada de la ley del grupo llamada el *corchete* o *conmutador*, y tienen la estructura de lo que hoy se denomina en su memoria un *álgebra de Lie*. El grupo de Lie más complicado, denominado E8, es un objeto de 248 dimensiones que describe una estructura de 57 dimensiones que fue conceptualizada y diseñada por un equipo de 18 matemáticos durante cuatro años de trabajo, culminando esta realización a principios de 2007.

Los grupos de Lie y las álgebras de Lie llevan su nombre. Con Klein descubrieron las propiedades fundamentales de las líneas asintóticas en la superficie de Kummer. Siguieron colaborando y trabajaron en una investigación de las curvas W, curvas invariantes bajo un grupo de transformaciones proyectivas. De hecho, Lie desempeñó un papel importante en el desarrollo de Klein introduciéndolo al concepto de grupo, que resultó ser una herramienta importante en su trabajo posterior. Es justo añadir que Camille Jordan también jugó un papel relevante en las adquisiciones de Klein respecto de los grupos.

En 1871, durante su estancia en Gotinga, Klein hizo importantes descubrimientos en materia de geometría. Publicó dos artículos sobre la llamada *geometría no euclidiana*, en los que demostró que era posible considerar la geometría euclidiana y la geometría no euclidiana como casos especiales de una superficie proyectiva con una sección cónica específica adjunta. Esto tenía el notable corolario de que la geometría no euclidiana era consistente si, y solo si, la geometría euclidiana era consistente. El hecho de que la geometría no euclidiana fuera todavía en ese momento un tema controvertido ahora desapareció. Su estatus fue puesto en un pie de igualdad con la geometría euclidiana. Arthur Cayley nunca aceptó las ideas de Klein, creyendo que sus argumentos eran circulares.

La síntesis de la geometría de Klein como el estudio de las propiedades de un espacio que son invariantes de un grupo dado de transformaciones, conocida como el *Programa de Erlanger* (1872), influyó profundamente en el desarrollo matemático. Este texto fue escrito con motivo del discurso inaugural de Klein cuando fue nombrado profesor en Erlangen en 1872, aunque en realidad no fue el discurso que pronunció en esa ocasión. El Programa de Erlanger proporcionó un enfoque unificado de la geometría que ahora es la visión estándar aceptada.

Las transformaciones juegan un papel importante en la matemática moderna y Klein mostró de qué modo las propiedades esenciales de una geometría dada podían representarse mediante el grupo de transformaciones que preservan esas propiedades. De esta manera, el Programa de Erlanger definió la geometría como para que incluyera tanto la geometría euclidiana como la geometría no euclidiana.

Sin embargo, el propio Klein vio su trabajo sobre la teoría de funciones como su principal contribución a la matemática. Como escriben Werner Burau y B. Schoenberg:

"Klein consideraba que su trabajo en teoría de funciones era la cumbre de su trabajo en matemática. Debió algunos de sus mayores éxitos a su desarrollo de las ideas de Riemann y a la íntima alianza que forjó entre este último y la concepción de la teoría de invariantes, de la teoría de números y el álgebra, de la teoría de grupos, y de la geometría multidimensional y la teoría de ecuaciones diferenciales, especialmente en sus propios campos, las funciones modulares elípticas y las funciones automórficas".

Al considerar la acción del grupo modular en el plano complejo, Klein demostró que la región fundamental se desplaza para teselar el plano. En 1879, estudió la acción del PSL (2, 7), pensada como una imagen del grupo modular, y obtuvo una representación explícita de una superficie de Riemann. Escribió en 1882 la "Teoría de funciones algebraicas y sus integrantes de Riemann" que trata la teoría de funciones de una manera geométrica conectando la teoría del potencial y las aplicaciones conformes. También utilizó ideas físicas en este trabajo, especialmente las de dinámica de fluidos.

Klein consideró ecuaciones de grado mayor que 4 y estaba particularmente interesado en usar métodos trascendentales para resolver la ecuación general de quinto grado. Después de desarrollar métodos debidos a Charles Hermite y Leopold Kronecker, produciendo resultados similares a los de Francesco Brioschi, pasó a resolver completamente el problema usando el grupo del icosaedro. Este trabajo lo llevó a considerar funciones modulares elípticas que estudió en una serie de artículos.

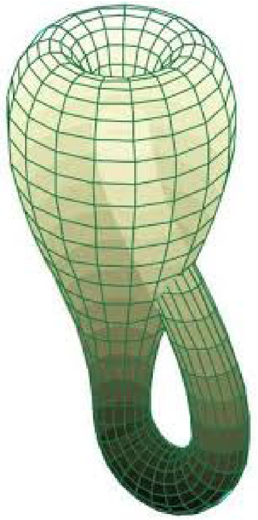
Desarrolló una teoría de funciones automórficas, conectando resultados algebraicos y geométricos en su importante libro de 1884 sobre el icosaedro. Sin embargo, Henri Poincaré comenzó a publicar un esquema de su teoría de funciones automórficas en 1881 y, como se vio, esto llevó a una competencia entre los dos:

"**Klein inició una correspondencia con Poincaré y pronto surgió una rivalidad amistosa, ya que ambos buscaban formular y demostrar un gran teorema de uniformización que sirviera como piedra angular de esta teoría. Trabajando bajo gran presión, Klein logró formular dicho teorema y esbozar una estrategia para probarlo**".

Sin embargo, fue durante este trabajo que su salud se derrumbó, como se mencionó anteriormente. Con Robert Fricke, que llegó a Leipzig en 1884, Klein escribió un importante clásico de cuatro volúmenes sobre funciones modulares automórficas y elípticas, que fue produciendo durante los siguientes 20 años.

También deberíamos mencionar la *botella de Klein*, una superficie cerrada de un solo lado que lleva su nombre. Una botella de Klein no se puede construir en el espacio euclidiano. Se representa mejor como un cilindro que se enrolla sobre sí mismo para unirse con su otro extremo. Sin embargo, esta no es una superficie continua en el espacio tridimensional, ya que la superficie no puede atravesarse a sí misma sin una discontinuidad. Es posible construir una botella de Klein en el espacio no euclidiano.

En la década de 1890, Klein se interesó en la física matemática, aunque a lo largo de su carrera demostró que nunca se alejó de esta área en actitud. En función de este interés, escribió un trabajo importante sobre el giroscopio con Arnold Sommerfeld.



Representación de la botella de Klein.

Más tarde en su carrera, Klein se interesó por la enseñanza a nivel escolar. W. Burau y B. Schoenberg escriben: "**A partir de 1900, comenzó a interesarse vivamente por la enseñanza de las matemáticas en niveles inferiores a los universitarios, al tiempo que continuaba con sus funciones académicas. Fue un defensor de la modernización de la enseñanza de las matemáticas en Alemania y en 1905 desempeñó un papel decisivo en la formulación de los 'Borradores para un plan de estudio del bachillerato'. El cambio esencial recomendado fue la introducción en las escuelas secundarias de los rudimentos del cálculo diferencial e integral y del concepto de función**".

Klein fue elegido presidente de la Comisión Internacional de Enseñanza de las Matemáticas en el Congreso Internacional de Matemáticas de Roma de 1908. Bajo su dirección, la rama alemana de la Comisión publicó muchos volúmenes sobre la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles en Alemania.

Otro proyecto en el que trabajó a finales de siglo fue la *Enciclopedia de la Ciencia Matemática*. Participó activamente en este proyecto, editando con K. Müller la sección de cuatro volúmenes sobre mecánica.

Grace Chisholm Young afirma, sobre los esfuerzos de Klein en favor de las mujeres en matemáticas:

"**Cuando en [1893] él y otros lograron abrir las puertas de la Universidad de Gotinga a las mujeres, creo que fue un verdadero placer para él que la primera mujer en obtener el título de D. Phil. lo hiciera bajo sus auspicios, y que fuera una chica de Girton que se había sentado a los pies de su reverenciado amigo Cayley**".

Klein fue elegido miembro de la *Royal Society* en 1885 y recibió la medalla Copley de la Sociedad en 1912. La *London Mathematical Society* le otorgó su Medalla de Morgan en 1893. Chisholm Young relata:

"**Su mente estaba llena de ideas y reflexiones brillantes, pero es cierto que su obra carecía de los aspectos severos que exige la exactitud matemática. Fue en el contacto personal donde esto se corrigió, al menos en lo que se refería a sus alumnos. Su máxima favorita era: 'Nunca seas aburrido'**".

Richard Courant

Richard Courant (8 de enero de 1888, Lublinitz, Alemania (ahora Lubliniec, Polonia)-27 de enero de 1972, Nueva Rochelle, Nueva York, EE. UU.) fue un matemático aplicado conocido por fundar el Instituto que lleva su nombre en Nueva York.

Richard Courant.

Ubicación de Lubliniec en Polonia.

Sus padres eran Siegmund Courant y Martha Freund. Era una familia judía en la que había tensiones, en particular entre Siegmund y su hermano mayor Jakob. Richard era el hijo primogénito de Siegmund y Martha. Poco después del nacimiento de su segundo hijo, Siegmund vendió su participación en el negocio familiar en Lublinitz y compró un negocio en Glatz. Un tercer hijo nació el año en que se mudaron a Glatz, cuando Richard tenía tres años.

Seis años después, su familia se mudó nuevamente, esta vez a Breslau. Su padre Siegmund se encontraba en problemas, ya que había acordado comprar otro negocio antes de que su hermano Jakob lo convenciera de romper el contrato y mudarse a Breslau. Allí, Siegmund trabajaba para una compañía de seguros, y Richard ingresó al *König-Wilhelm Gymnasium*. Disponiendo de escasa instrucción previa, Richard inició su educación con dificultades, siendo incluso "menos que satisfactorio" en aritmética.

A los catorce años, no obstante, empezó a dar clases particulares en pos de ganar el dinero suficiente para mantenerse. Poco después, la familia fue golpeada por la tragedia cuando Jakob, que se encontraba atrapado en graves dificultades comerciales, se suicidó. Otros miembros de la familia culparon a Siegmund y Martha por el acontecimiento. Poco después, Siegmund se declaró en quiebra y los dos años siguientes debieron ser de extrema dificultad para Richard que, a la vez que asistía a la escuela, seguía manteniéndose dando clases particulares. En 1904, sus padres dejaron Breslau y se mudaron a Berlín. Para entonces, Richard ya lograba asegurar su propio sustento, incluso teniendo que alquilar una vivienda en Breslau.

Aunque todavía no había aprobado los exámenes necesarios para entrar en la universidad, Richard dejó la escuela en 1905 y asistió a clases de matemáticas y física en la Universidad de Breslau. En 1906 rindió los exámenes de ingreso a la universidad y continuó estudiando, esta vez oficialmente. Aunque su intención original era cursar física, su enseñanza le resultó menos grata a Courant que la de la matemática. Entre sus profesores de matemáticas se encontraban Adolf Kneser, Georg Landsberg y Jakob Rosanes, pero él seguía pensando que sus cursos carecían de interés.

En Breslau, Courant había estudiado con dos compañeros, Otto Toeplitz y Ernst Hellinger, de varios años mayores que él y con una formación más avanzada. Ambos estaban ahora estudiando en Gotinga y le escribieron contándole lo emocionante que era estar allí, en particular debido a la presencia de Hilbert. En la primavera de 1907, Courant dejó Breslau, pasó un semestre en Zúrich y luego comenzó sus estudios en Gotinga, el 1 de noviembre 1907. Allí comenzó a asistir a los cursos de Hilbert y Minkowski y también se le permitió presenciar el seminario conjunto de los dos matemáticos sobre física matemática. Asimismo, concurrió a conferencias sobre física y filosofía. Alfréd Haar era el asistente de Hilbert en ese momento, pero luego de finalizar su trabajo de doctorado, en 1908, dejó que Richard ocupara ese cargo. Constance Reid afirma que:

"**Durante los cuatro semestres en que Courant trabajó como asistente de Hilbert, este se dedicó casi exclusivamente a temas de análisis, se dedicó al análisis como si fuera su elemento natural. Todo su trabajo matemático futuro se realizaría en temas que Hilbert le había enseñado durante sus días de estudiante**".

Courant obtuvo su doctorado en Gotinga en 1910, bajo la supervisión de Hilbert. Su tesis se tituló *Sobre la aplicación del principio de Dirichlet a los problemas de mapeo conforme*. A finales de 1910 comenzó su año de servicio militar obligatorio. En esa época recibió dos propuestas simultáneas para preparar su habilitación: una de Kurt Hensel, en Marburgo, y otra de Hilbert, en Gotinga. Aceptó la oferta de Hilbert, pero una vez que dejó el servicio militar tuvo algunos problemas financieros, ya que enviaba una asignación regular a sus padres en Berlín. Nuevamente tuvo que dar clases particulares para mejorar sus finanzas.

Para su tesis de habilitación, Courant volvió a trabajar en el principio de Dirichlet. Aceptada la tesis, dio su conferencia inaugural sobre pruebas de existencia en matemática el 23 de febrero de 1912. Luego se convirtió en profesor de matemáticas en Gotinga, hasta el comienzo de la Primera Guerra Mundial, pero este no fue un período particularmente productivo para él en términos matemáticos. Se había casado con Nelly Neumann durante el verano de 1912, una amiga de sus días en Breslau que también era matemática.

Cuando estalló la guerra, Courant fue reclutado en el ejército. Antes de entrar en acción, enfermó gravemente de fiebre tifoidea. Regresó luego a su unidad y participó de combates en los que murieron la mitad de sus compañeros. Hizo una sugerencia de diseño para un sistema telegráfico que utilizaría la tierra como conductor y se le permitió regresar a Gotinga para discutir la idea con colegas. Obtuvo que esta se pusiera en práctica y se fabricó una caja para transmitir señales. Courant regresó a su unidad con su caja de comunicaciones.

El 27 de septiembre de 1915 fue herido y se benefició de una licencia. Poco después se divorció de Nelly Neumann. Aunque regresó al frente, probablemente no sea una exageración decir que su equipo de comunicaciones le salvó la vida, ya que dedicó la mayor parte del tiempo a enseñar a los hombres a usarlo y evitó así lo peor de los combates. También encontró tiempo para continuar su investigación matemática. Cuando Springer lanzó la nueva revista *Mathematische Zeitschrift*, en enero de 1918, uno de los artículos de Courant, escrito mientras estaba en el ejército, apareció en el segundo número.

Después de la guerra, en diciembre de 1918, Richard Courant regresó a Gotinga. Se casó el 22 de enero de 1919 con Nerina Runge, la hija de Carl Runge, y un par de meses después comenzó a enseñar como profesor particular. Este fue un período de intensa actividad investigadora para él. En la primavera de 1920 aceptó la cátedra de matemáticas en Münster cuando Wilhelm Killing se retiró. Sin embargo, después de unos meses Hilbert y Klein organizaron su regreso a Gotinga para reemplazar a Erick Hecke, que se había ido a Hamburgo.

En 1922 Courant fundó el Instituto de Matemáticas de la universidad, pero en esa etapa era solo un concepto, carente de un edificio especial, el cual se construyó recién en 1927. En ese mismo año 1922 publicó un libro sobre la teoría de funciones, producto de un trabajo realizado conjuntamente con Adolf Hurwitz, aunque este había muerto en 1919. Basándose en las conferencias de Hurwitz, Courant agregó material propio. A algunas personas, como Oliver Kellogg, no les gustó el libro. Sin embargo, Kurt Otto Friedrichs, que era estudiante en ese momento, escribió: **"[...] la sección de Courant, el tercer capítulo. Cuando lo conseguí, empecé a leerlo una mañana, lo leí mañana y noche sin parar. Fue el libro de matemáticas más impresionante que he leído**".

Otras obras matemáticas importantes que Courant publicó en esa época fueron trabajos sobre valores propios, en particular pruebas de existencia. En 1924, junto con Hilbert, publicó un importante texto, *Métodos de la física matemática*. Nuevamente, Courant fue el único autor y la contribución de Hilbert se concretó bajo la forma de notas de clases. Las inclinaciones de Hilbert se habían alejado de la física matemática en ese momento y solo manifestó un interés pasajero en que su colega escribiera el texto. En 1925, con Friedrichs como asistente, Courant comenzó a trabajar en un segundo volumen del manual Courant-Hilbert.

En 1928, el nuevo Instituto de Matemáticas iniciado el año anterior estaba casi terminado. Se inauguró formalmente el 2 de diciembre de 1929. Invitado a dar una conferencia en los Estados Unidos en 1932, Courant visitó allí las principales universidades.

Fue expulsado de Gotinga cuando Hitler y los nazis llegaron al poder, el 30 de enero de 1933. En marzo, Courant dejó la ciudad para sus vacaciones de primavera en Arosa, en Suiza. Friedrichs, además de aspirar también a unas vacaciones, esperaba completar el segundo volumen de Courant-Hilbert pues su trabajo, fuera de sus funciones en el Instituto de Matemáticas, consistía en ayudar a Courant con el libro.

Sin embargo, los acontecimientos políticos acabaron con sus planes y regresó a Gotinga a principios de abril, por consejo de los miembros del Instituto. El 7 de abril de 1933, la Ley del Servicio Civil proporcionó los medios para eliminar a los profesores judíos de las universidades y, por supuesto, también a los de ascendencia judía de otros roles. Todos los funcionarios públicos que no fueran de ascendencia aria (tener un abuelo de religión judía hacía que alguien no fuera ario) debían ser jubilados. No obstante, había una cláusula de exención que eximía a los no arios que habían luchado por Alemania durante la Primera Guerra Mundial. Ciertamente, Courant aplicaba a la cláusula de exención y esperaba que la exclusión no le afectara.

El 5 de mayo, recibió una carta oficial informándole de que estaba bajo licencia forzosa. Hermann Weyl fue nombrado director del Instituto de Matemáticas e hizo todo lo posible para que Courant fuera reincorporado. Mientras tanto, se intentó ofrecerle puestos en otros lugares, por ejemplo, en Estambul; consideró la propuesta, pero finalmente la rechazó.

Lo invitaron a Cambridge, Inglaterra, para una visita de un año, y solicitó una licencia (resulta extraño que tuviera que hacerlo, ya que estaba con licencia forzosa). Su licencia forzosa se cambió a licencia ordinaria y se fue a Inglaterra, antes de emigrar a Estados Unidos.

Los primeros meses en Nueva York fueron difíciles. En junio de 1935 le ofrecieron un puesto permanente, por el que estaba mal pagado. Además, no había matemáticos destacados en el cuerpo docente y los estudiantes le parecían estar muy mal preparados. Sin embargo, invitó a tantos matemáticos como pudo para que dieran clases allí. En 1936 le propusieron una cátedra en la Universidad de Nueva York y le dieron la tarea de construir un centro de posgrado de excelencia. Nuevamente pudo establecer una colaboración mayoritariamente exitosa con sus estudiantes, así como con las autoridades y los administradores de las instituciones educativas y financieras, para que el proyecto tuviera éxito, a pesar de las dificultades.

El centro de investigación de matemáticas aplicadas que Courant construyó en Nueva York estaba basado en el modelo de Gotinga. Se realizaron muchos nombramientos nuevos, como el de Friedrichs. Numerosos matemáticos que se vieron obligados a abandonar Alemania durante los años anteriores al comienzo de la Segunda Guerra Mundial recibieron su ayuda para conseguir puestos en los Estados Unidos.

En 1940-1941 trabajó con Herbert Robbins, un joven topólogo de Harvard, en un nuevo libro titulado *¿Qué es la matemática?* y que recoge las opiniones de Courant sobre la matemática. Su objetivo, como escribe en el prefacio, es que el lector transite: "**[...] en un camino recto desde los mismos elementos hasta los puntos estratégicos desde los cuales se puede observar la sustancia y la fuerza motriz de la matemática moderna**".

El libro tuvo mucho éxito, tanto en términos de venta como de críticas. Quizás una de las herramientas matemáticas más famosas de Courant de esa época fue su *Método de Elementos Finitos* (MEF). De hecho, este método apareció por primera vez en una prueba de existencia de una versión del teorema de aplicación de Riemann en el libro de Hurwitz-Courant de 1922.

La idea apareció nuevamente como nota a pie de página en la publicación de Courant-Hilbert *Métodos de física matemática*. En 1924, Courant aplicó por primera vez el método numérico y luego, en 1943, en la solución de un problema de torsión. Sin embargo, el nombre de *método de elementos finitos* no se debe a Courant, sino que recién aparece en la década de 1960.

Desde 1947 hasta su muerte Courant visitó Alemania casi todos los veranos, pero nunca pensó en volver allí, ya que parecía estar firmemente establecido en los Estados Unidos. De 1953 a 1958 fue director de su nuevo Instituto de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Nueva York, que en 1964 recibió el nombre de Instituto Courant. Es justo decir que este fue un logro mucho mayor para él que el Instituto de Matemáticas de Gotinga.

En Gotinga alcanzó un nivel lleno de matemáticos de talento excepcional. En Nueva York, después de experimentar la casi destrucción de su Instituto de Gotinga producto de las políticas raciales de los nazis, comenzó de cero. El hecho de que haya podido crear el Instituto Courant partiendo de la nada es un éxito realmente extraordinario. Sufrió un derrame cerebral el 19 de noviembre de 1971 y fue hospitalizado en Nueva Rochelle, donde murió dos meses después.

Richard Courant por Julio Rey Pastor

Retrato de Julio Rey Pastor.

Desde el Renacimiento la matemática ocupa un lugar privilegiado entre las demás ciencias, todas las cuales sirven de instrumento. La naturaleza está escrita en números y figuras geométricas, decía Galileo; y a medida que se ha profundizado nuestro conocimiento del cosmos, ha sido preciso crear entes ideales más complejos para interpretar los complicados fenómenos naturales.

Por este creciente interés que la matemática moderna tiene por todas las ciencias y técnicas y que, ante la imposibilidad de que sus cultivadores puedan seguir el largo aprendizaje de la matemática cada día más compleja y abstracta, abundan las publicaciones especiales para las diversas profesiones. Sin regatear mérito a estos esfuerzos de "facilitación", forzoso es reconocer que la mayoría son recetarios empíricos, nada satisfactorios para los más exigentes deseosos de saber el porqué de la eficacia de ciertas expresiones y el camino para llegar a ellas.

También está en boga un periodismo formado en libros de divulgación, en el que desfilan las modernas teorías matemáticas y físicas en visión caleidoscópica, densa en nombres técnicos y apellidos de sabios; literatura más adecuada para formar pedantes que para fomentar la cultura.

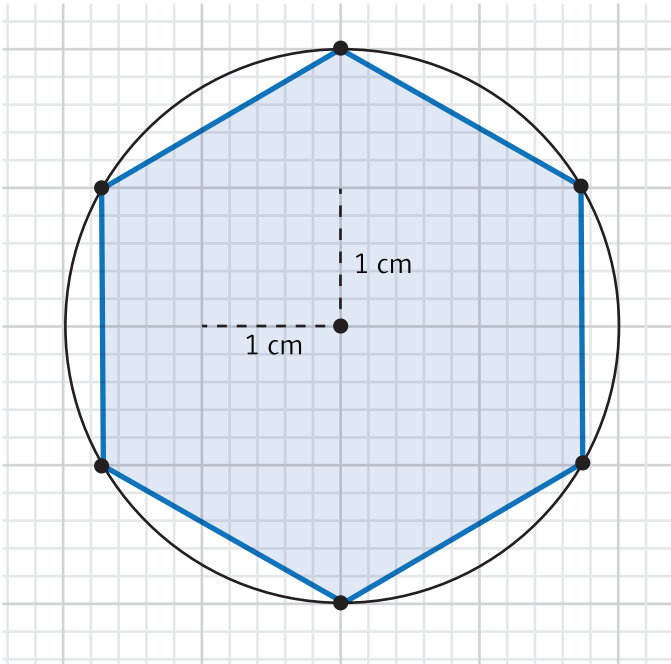
El profesor Courant, famoso por sus trabajos de investigación, especialmente en cálculo de variaciones y ecuaciones en derivadas parciales, es la figura más valiosa de la escuela de Gotinga y, además, heredero de su maestro Klein en el maravilloso arte de exponer clara y amenamente las teorías más difíciles. La crítica internacional a elevado al más alto rango su obra *Qué es la matemática*, fruto de varias décadas de esfuerzo clarificador, que se destaca muy por encima de las obras de divulgación.

Su desarrollo metódico de la matemática moderna, desde el nivel de enseñanza media hasta las más excelsas conquistas modernas con las más claras e intuitivas demostraciones, desarrollando metódicamente la aritmética y el algebra moderna, la geometría proyectiva, la preponderante topología y el cálculo infinitesimal, logra realizar un milagro, porque sabe destacar los nudos en los que residen toda la dificultad y toda la sustancia de la teoría.

En estos tiempos de estrecha especialización, parecería imposible encontrar en una sola mente el dominio de toda la matemática de su tiempo; sin embargo, su obra logró el milagro, el cual agranda y magnifica la diversidad de públicos a los que prestará un servicio incalculable, especialmente el profesorado. Como dice el propio Courant: "está escrito para principiantes y doctos, para estudiantes y maestros, para filósofos e ingenieros, para el aula y la biblioteca".

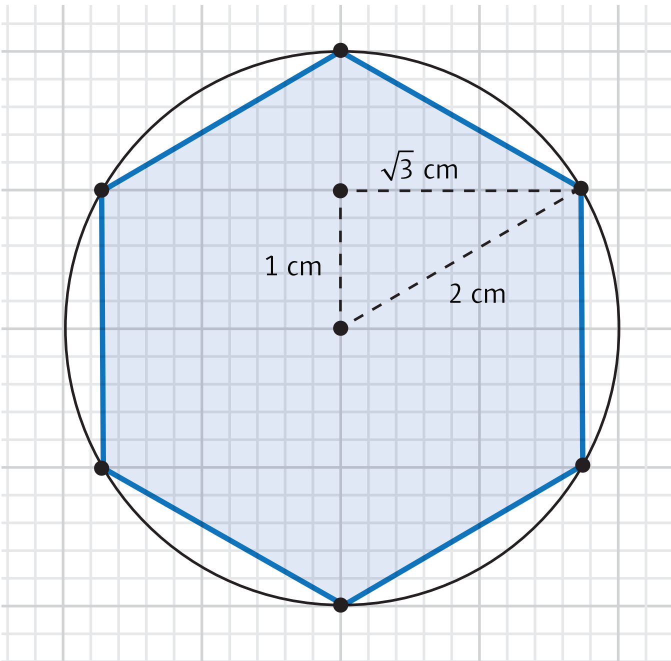
Pero si el propósito fue ambicioso, el prodigio se realizará ampliamente tan pronto se sigan las instrucciones que el propio autor antepone para su mejor lectura, fruto maduro del maestro máximo de su tiempo, secundado por eficaces colaboradores.

Hallar el perímetro del hexágono cuyos vértices están sobre la circunferencia y en líneas horizontales de la cuadrícula.

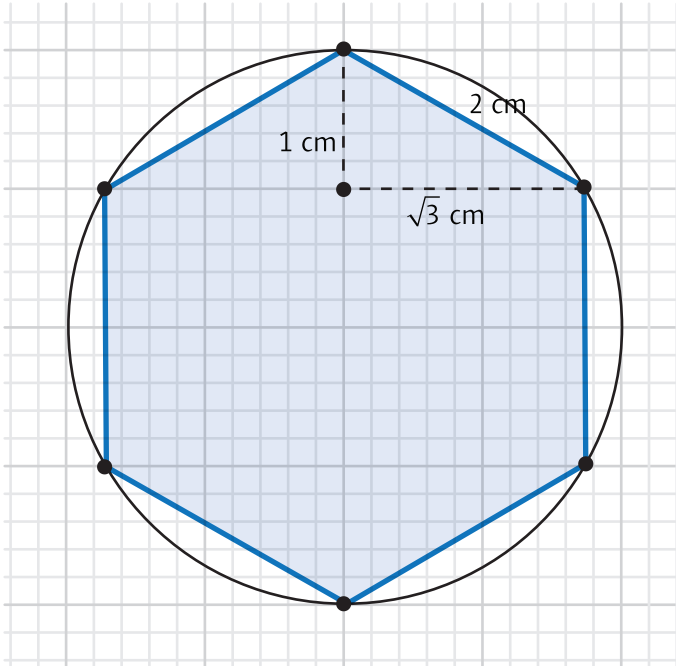


Solución

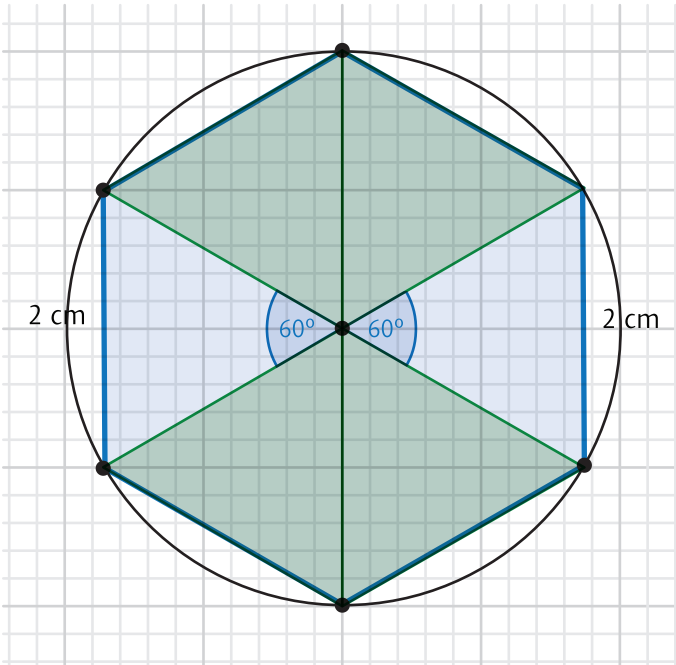
Teniendo en cuenta que el radio de la circunferencia es de 2 cm, por el *teorema de Pitágoras* encontramos una media cuerda de la circunferencia que mide $\sqrt{3}$ cm.



Nuevamente, usando el *teorema de Pitágoras*, encontramos un lado que mide 2 cm.

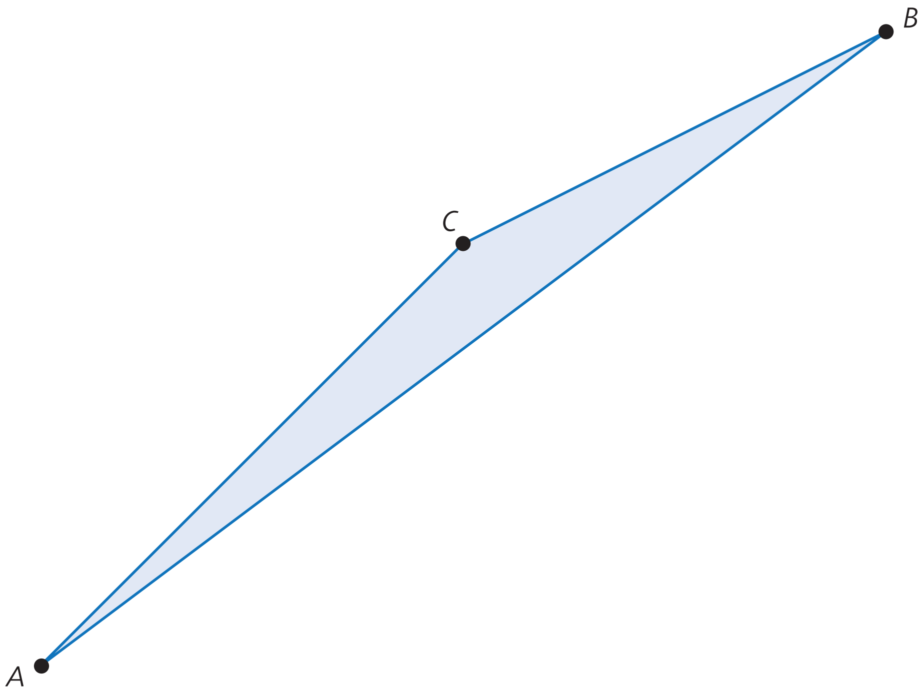


Del mismo modo se puede ver que cada lado oblicuo del hexágono mide 2 cm, es decir que los triángulos indicados en la siguiente figura son equiláteros.



El hexágono resulta ser regular y el perímetro es de 12 cm.

Usando solo un único recurso de GeoGebra, hallar los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo *ABC* que parten desde el circuncentro de *ABC*.



Solución

Como el circuncentro de *ABC* está en las mediatrices de los lados de *ABC*, los pies de las perpendiculares en los lados de *ABC* que parten desde el circuncentro son precisamente los puntos medios de los lados de *ABC*. Usando solo el recurso ***Medio*** o ***Centro***, marcamos los puntos medios de los lados de *ABC*.