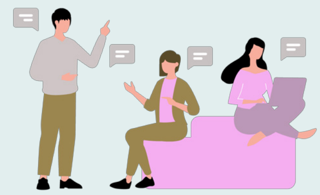
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

7ª época ● Nº 3 ● 24 de abril de 2025

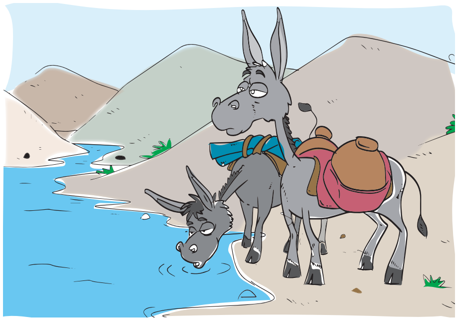


"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

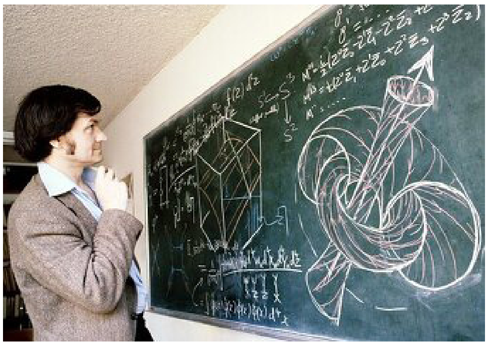
El camino a la realidad

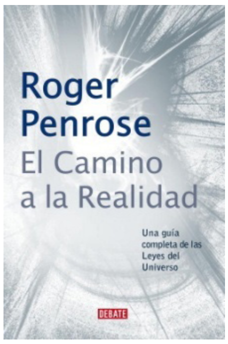


INTRODUCCIÓN A ROGER PENROSE

Roger Penrose es un físico matemático británico y profesor emérito de matemáticas de la Universidad de Oxford. Es reconocido por su trabajo en física matemática, en particular por sus contribuciones a la teoría de la relatividad general y a la cosmología.

Nació el 8 de agosto de 1931 en Colchester, Reino Unido. Estudió en el *University College* de Londres (1955), así como en el *University College School Junior Branch* y el *St John's College*. Fue galardonado con el premio Nobel de Física (2020, compartido con Reinhard Genzel y Andrea Ghez), la Medalla Copley y la Medalla Real, entre otros reconocimientos.





Roger Penrose en el aula y portada española de su libro *El camino a la realidad*.

Penrose publicó *El camino a la realidad* en 2004. Esta obra, editada en castellano por la editorial española Debate, es una guía general y completa de las leyes de la física y del universo que se extiende a lo largo de 1.448 páginas. Constituye uno de los mejores libros de divulgación de las últimas décadas, cuyo objetivo está claramente definido en el prefacio.

Durante este año, y cuando el tema lo amerite, comentaremos en las *Leñitas geométricas* los aspectos centrales de este libro.

El objetivo del trabajo de Penrose consiste en transmitir una idea de lo que es ciertamente uno de los viajes de descubrimiento más importantes y apasionantes en que se ha embarcado la humanidad. Se trata de la búsqueda de los principios subyacentes que rigen el comportamiento de nuestro universo. Este viaje lleva ya más de dos mil quinientos años, de modo que no debe sorprendernos que se hayan realizado progresos sorprendentes.

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer y Roger Penrose.

No obstante, la aventura se presentó muy difícil, por lo que casi siempre el conocimiento llega lentamente. Esta dificultad intrínseca nos ha conducido con frecuencia por caminos falsos e hizo que aprendiésemos a ser muy prudentes. Pero ya en el siglo XX reveló nuevas y extraordinarias ideas, algunas tan impresionantes que muchos científicos actuales han expresado su sensación de estar cerca de una comprensión básica de todos los principios subyacentes de la física.

A nuestro parecer, Roger Penrose expone sus descripciones y opiniones desde un punto de vista modesto, aun cuando asegura esperar cambios mucho mayores en el futuro. Realiza una fuerte contribución a la enseñanza al no desistir de presentar el contexto matemático completo y señala que su conocimiento no se puede transmitir razonablemente sin cierta cantidad de notación matemática y la exploración de genuinos conceptos matemáticos.

El conocimiento que tenemos de los principios que realmente subyacen en el comportamiento del mundo físico depende, de hecho, de una valoración matemática; lo cual para muchos es motivo de desesperación, porque quizá se han formado en la idea de carecer de capacidad matemática, aun para acceder a sus más elementales nociones. Es clara la dificultad y se nos plantea también como desafío a los profesores. La inteligencia artificial nos reta doblemente.

Como profesores, debemos estar confiados en la transmisión del conocimiento y pensar que una buena proporción de nuestros estudiantes, si ellos están bien motivados, va alcanzando la madurez necesaria y la capacidad para enfrentar una línea de símbolos, involucrándose personalmente y bajo el empuje de nuestra acción, dependiendo ello, en gran medida, de la sencillez con que presentemos el material escolar.

CÓMO "SIMPLIFICAR" LA MATEMÁTICA, SEGÚN PENROSE

Nuestro autor aborda el uso de las fórmulas, en el contexto de su libro, a través del siguiente relato.

"Una de las amigas de juventud de mi madre era una de esas personas que no podían entender las fracciones. Ella misma me lo contó en cierta ocasión, una vez que se había retirado de una carrera exitosa de bailarina. Yo aún era joven y todavía no me había lanzado plenamente a mi actividad como matemático, pero se me reconocía como alguien que disfrutaba trabajando en este tema. 'Es todo eso de la simplificación —me decía— nunca le cogí el tranquillo a la simplificación'. Era una mujer elegante y muy inteligente, y en mi opinión, no hay ninguna duda de que las cualidades mentales que se necesitan para comprender la sofisticada coreografía, que es fundamental para el *ballet*, no son en modo alguno inferiores a las que deben ejercitarse con un problema matemático.

La coreografía de un *ballet* también expresa complejidad.

Así, sobreestimando ampliamente mi capacidad expositiva, intenté, como otros lo habían hecho antes, explicarle la simplicidad y la naturaleza lógica del procedimiento de 'simplificación'.

Creo que mis esfuerzos fueron tan infructuosos como lo habían sido los de los otros que lo habían intentado. (Dicho sea de paso, su padre había sido un eminente geólogo y miembro de la *Royal Society*, de modo que ella debía de haber tenido una formación adecuada para la comprensión de cuestiones científicas. Quizá aquí podría haber intervenido un factor del tipo 'rostro severo'. No lo sé.) Pero reflexionando sobre ello, me pregunto ahora si ella, y muchas personas como ella, no tenían un complejo inhibidor más racional, uno que yo ni siquiera había advertido con toda mi verborrea matemática. Hay, en realidad, una cuestión profunda con la que uno tropieza una y otra vez en matemática y en física matemática, y que encuentra por primera vez en la noción aparentemente inocente de cancelación de un factor común en el numerador y el denominador de una fracción numérica ordinaria.

Aquellos para quienes la acción de simplificar se ha convertido en algo automático, debido a la familiaridad repetida con tales operaciones, pueden ser insensibles a una dificultad que en realidad acecha tras este procedimiento aparentemente sencillo. Quizá muchos de los que encuentran misteriosa la simplificación están viendo cierto punto con más profundidad que aquellos de nosotros que pasamos de largo de forma displicente, pareciendo ignorarlo. ¿De qué punto se trata? Concierne a la forma misma en que los matemáticos pueden ofrecer una existencia a sus entidades matemáticas y a cómo pueden relacionarse tales entidades con la realidad física.

Recuerdo que cuando estaba en la escuela, más o menos a los once años, me quedé muy sorprendido cuando el maestro preguntó a la clase qué es realmente una fracción (tal como 3/8, pongamos por caso). Hubo varias sugerencias, como dividir un pastel en porciones y cosas así, pero fueron rechazadas por el profesor sobre la base (válida) de que estas se referían simplemente a situaciones físicas imprecisas a las que tenía que aplicarse la noción matemática precisa de una fracción; pero no nos decían cuál es dicha noción matemática precisa. Siguieron otras sugerencias, tales como 3/8 es 'algo con un 3 arriba y un 8 abajo y con una línea horizontal en medio', ¡y me quedé sorprendido al descubrir que el profesor parecía tomar estas sugerencias en serio!

No recuerdo muy bien cómo se resolvió finalmente la cuestión, pero con la intuición adquirida de muchas experiencias posteriores como estudiante de licenciatura en matemáticas, podría conjeturar que mi maestro de escuela estaba haciendo un valiente intento por decirnos la definición de una fracción en términos de la ubicua noción matemática de *clase de equivalencia*.

¿Qué es, precisamente, una fracción?

¿Cuál es esta noción? ¿Cómo puede aplicarse en el caso de una fracción y decirnos qué es realmente una fracción? Empecemos con el 'algo con un 3 arriba y un 8 abajo' de mi compañero de clase. Básicamente, esto nos sugiere que una fracción está especificada por un par ordenado de números enteros; en este caso, los números 3 y 8. Pero es evidente que no podemos considerar que la fracción *es* dicho par ordenado porque, por ejemplo, la fracción 6/16 es el mismo número que la fracción 3/8, mientras que el par (6, 16) no es ciertamente el mismo que el par (3, 8). Esta es precisamente una cuestión de simplificación; en efecto, podemos escribir 6/16 como $\frac{3\times 2}{8\times 2}$ y luego cancelar el 2 de arriba con el 2 de abajo, para obtener 3/8. ¿Por qué se nos permite hacer esto y con ello 'igualar', en cierto sentido, el par (6, 16) con el par (3, 8)? La respuesta matemática –que muy bien puede sonar como un 'escaqueo'– tiene la regla de simplificación incorporada en la definición de una fracción: se considera que un par de números enteros ($a \times n$, $b \times n$) representa la misma fracción que el par (a, b) siempre que n sea un número entero distinto de cero (y donde tampoco admitimos que b sea cero).

Pero esto tampoco nos dice qué es una fracción; simplemente dice algo sobre la forma en que representamos las fracciones. ¿Qué es, entonces, una fracción? Según la noción de *clase de equivalencia* de los matemáticos, la fracción 3/8, por ejemplo, es simplemente la colección infinita de todos los pares

$$(3, 8), (-3, -8), (6, 16), (-6, -16), (9, 24), (-9, -24), (12, 32), \ldots,$$

donde cada par puede obtenerse de cada uno de los otros pares de la lista por aplicación repetida de la regla de simplificación anterior. Esto se denomina una *clase de equivalencia* porque realmente es una clase de entidades (que, en este caso concreto, son pares de números enteros), cada uno de cuyos miembros se considera equivalente, en un sentido específico, a cada uno de los demás miembros.

También necesitamos definiciones que nos digan cómo sumar, restar y multiplicar estas colecciones infinitas de pares de números enteros, donde son válidas las reglas normales del álgebra, y cómo identificar los propios números enteros como tipos particulares de fracción.

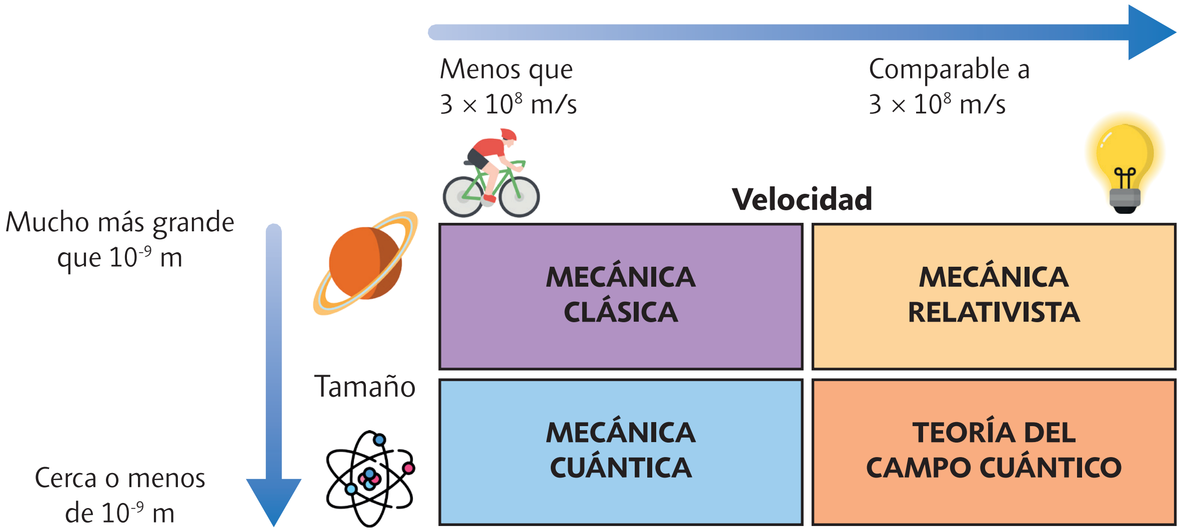
Esta definición cubre todo lo que necesitamos matemáticamente de las fracciones (tal como que 1/2 es un número que sumado a sí mismo da el número 1, etc.), y la operación de simplificación está, como hemos visto, incorporada en la definición. Pero todo parece muy formal y podemos preguntarnos si realmente recoge la noción intuitiva de lo que es una fracción. Aunque este ubicuo procedimiento de las clases de equivalencia, de la que el ejemplo anterior es un caso particular, es muy potente como pura herramienta matemática para establecer la consistencia y la existencia matemática, puede proporcionarnos entidades con una apariencia demasiado pesada. ¡Difícilmente nos transmite la noción intuitiva de lo que es 3/8, por ejemplo! No es extraño que la amiga de mi madre estuviera confundida.

En mis descripciones de nociones matemáticas trataré de evitar, hasta donde pueda, el tipo de pedantería matemática que nos lleva a definir una fracción en términos de una 'clase infinita de pares', incluso si, por supuesto, tiene su valor en rigor y precisión matemáticos. En mis descripciones me interesaré más en transmitir la idea –y la belleza y la magia– inherente a muchas nociones matemáticas importantes. La idea de una fracción tal como 3/8 consiste simplemente en que es cierto tipo de entidad que tiene la propiedad de que cuando se suma a sí misma 8 veces da 3. La magia está en que la idea de una fracción funciona pese al hecho de que en el mundo físico no experimentamos directamente cosas que estén cuantificadas exactamente por fracciones: las porciones de pastel solo conducen a aproximaciones. (Esto es muy diferente del caso de los números naturales, tales como 1, 2, 3, que cuantifican de forma precisa muchas entidades de nuestra experiencia directa.) Una forma de ver que las fracciones tienen un sentido consistente es utilizar la 'definición' en términos de colecciones infinitas de pares de enteros, como se ha indicado antes. Pero esto no significa que 3/8 sea realmente una colección semejante. Es mejor pensar en 3/8 como una entidad con un tipo de existencia propia, y que la colección infinita de pares es simplemente una forma de llegar a entender la consistencia de este tipo de entidad. A medida que nos familiarizamos, empezamos a creer que podemos captar con facilidad una noción tal como 3/8 como algo que tiene su propio tipo de existencia, y la idea de una 'colección infinita de pares' es simplemente un artificio pedante, un artificio que enseguida se retira de nuestra imaginación una vez que lo hemos captado.

Buena parte de las matemáticas es así. Para los matemáticos (al menos para la mayoría de ellos, por lo que puedo entender), las matemáticas no son solo una actividad cultural que hemos creado nosotros mismos, sino que tiene vida propia, y buena parte de ellas está en sorprendente armonía con el universo físico. No podemos tener una comprensión profunda de las leyes que rigen en el mundo físico sin entrar en el mundo de la matemática. En particular, la noción anterior de una clase de equivalencia es relevante no solo para una gran cantidad de matemáticas importantes (aunque confusas), sino también para una gran cantidad de física importante (y confusa), tal como la teoría de la relatividad general de Einstein y los principios de las 'teorías gauge', que describen las fuerzas de la naturaleza según la moderna física de partículas.

En física, una *teoría de campo gauge* es un tipo de teoría cuántica de campos que se basa en el hecho de que la interacción entre fermiones puede ser vista como el resultado de introducir ciertas transformaciones 'locales' pertenecientes al grupo de simetría interna en el que se base la teoría gauge.

Un *fermión* es uno de los dos tipos básicos de partículas elementales que existen en la naturaleza (el otro tipo es el *bosón*). Los fermiones se caracterizan por tener espín semientero (1/2, 3/2, ...) y, por tanto, estar sujetos al principio de exclusión de Pauli. En física de partículas, un fermión es una partícula que sigue la estadística de Fermi-Dirac.



Esquema sobre el tema.

En la física moderna, uno no puede evitar el enfrentarse a las sutilezas de muchas matemáticas sofisticadas. Por esta razón, he dedicado los dieciséis primeros capítulos de esta exposición a la descripción de ideas matemáticas.

¿Qué consejo puedo dar para hacer frente a esto? Este material tiene cuatro niveles diferentes de lectura. Quizá esté usted en un extremo de la escala, que sencillamente se da la vuelta cuando se le presenta una fórmula matemática (y algunos de estos lectores pueden muy bien tener dificultades para entender las fracciones). Si es así, creo que todavía puede aprender mucho de estas páginas saltándose simplemente todas las fórmulas y leyendo solo las palabras.

Supongo que esto será muy parecido a la forma en que yo solía hojear las revistas de ajedrez que estaban desperdigadas por mi casa cuando era niño.

En todo caso, las consideraciones físicas –y, en última instancia, las observacionales– han proporcionado el criterio primordial de aceptación. En muchas de las ideas modernas para avanzar de manera fundamental en nuestra comprensión de las leyes del universo, no se dispone de criterios físicos adecuados –*i.e.*, datos experimentales, o siquiera la posibilidad de investigación experimental–. Por ello, podemos cuestionarnos si los desiderata matemáticos accesibles son suficientes para permitirnos estimar las probabilidades de éxito de estas ideas. El tema es delicado, y trataré de plantear cuestiones que, en mi opinión, no han sido suficientemente discutidas en otros lugares.

Aunque en algunos pasajes presentaré opiniones que pueden considerarse controvertidas, me he preocupado por aclarar al lector cuándo estoy tomando realmente tales libertades. En consecuencia, este material puede utilizarse como una guía genuina para las ideas (y las preguntas) fundamentales de la física moderna. Puede utilizarse en las aulas como una honesta introducción a la física moderna, tal como se entiende ahora, cuando nos movemos en los primeros años del tercer milenio".

EL ÁTICA ANTES DE HERÓDOTO Y PLUTARCO

Existe un relato sobre el comienzo del viaje que haremos de la mano de Roger Penrose, con un interesante esfuerzo de imaginación. Dice así: "Am-tep, un artista de habilidades consumadas, era el maestro artesano del rey.

Maestro herrero de la Antigüedad.

Esa noche estaba durmiendo en el sofá de su taller, cansado después de una tarde de trabajo generosamente productivo; pero no podía conciliar el sueño, quizá por una tensión intangible que se respiraba en el aire. En realidad, ni siquiera estaba seguro de estar dormido cuando sucedió. De repente, había amanecido, aunque él tenía la sensación de que todavía debía ser de noche.

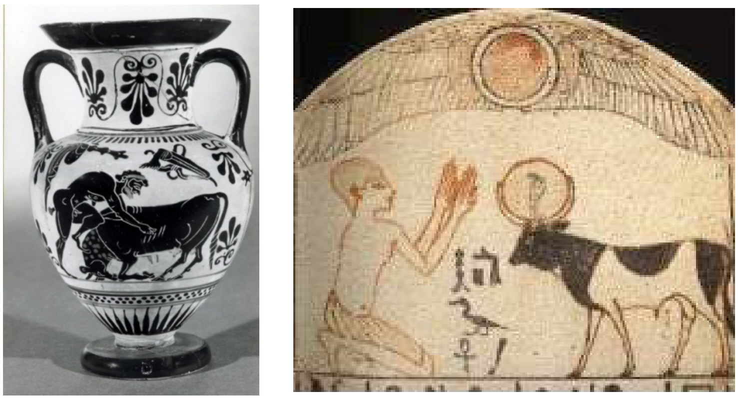
Se levantó con brusquedad. Algo muy extraño estaba sucediendo. La luz del alba no podía venir del norte; sin embargo, una luz roja resplandecía alarmantemente en su amplia ventana que daba al norte sobre el mar. Se acercó a la ventana y miró al exterior con estupor e incredulidad. ¡Nunca antes había salido el Sol por el norte! Aturdido como estaba, necesitó algún tiempo para darse cuenta de que eso no podía ser el Sol. Era un rayo de luz distante, de un intenso rojo vivo, proyectado verticalmente desde las aguas hacia el cielo.

Fenómenos naturales extremos que pueden expresar la ira divina.

Mientras permanecía allí, sobre el haz apareció una nube más oscura que daba al conjunto la apariencia de una sombrilla gigantesca y lejana, de un brillo maligno, con un bastón llameante y lleno de humo. La capucha de la sombrilla empezó a ensancharse y oscurecerse: parecía un demonio del mundo subterráneo. La noche se había aclarado, pero ahora las estrellas desaparecían una tras otra, engullidas por el avance de esa monstruosa criatura del infierno.

Aunque su reacción natural debería haber sido de terror, él permaneció inmóvil, paralizado durante varios minutos ante la perfecta simetría y la impresionante belleza de la escena. Pero entonces la terrible nube empezó a desviarse ligeramente hacia el este, empujada por el viento. Quizá eso le alivió algo y el hechizo se rompió momentáneamente. Pero de inmediato volvió a sentir aprensión cuando le pareció experimentar un extraño frenesí en el suelo, acompañado de un ruido sordo, inquietante, de una naturaleza completamente desconocida para él. Empezó a preguntarse qué podía haber provocado tanta furia. Nunca antes había sido testigo de la ira divina de una magnitud semejante.

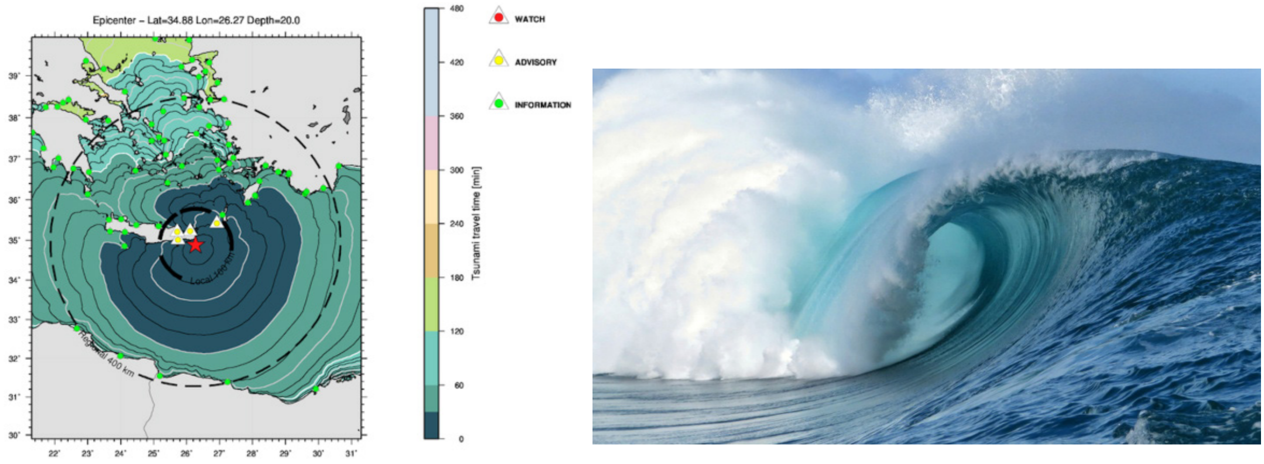
Su primera reacción fue culparse a sí mismo por el diseño de la copa sacrificial que acababa de terminar: eso le había tenido preocupado.



Vasijas antiguas representando el dios toro.

¿Quizá su representación del dios-toro no había sido suficientemente terrorífica? ¿Se habría ofendido el dios? Pero pronto comprendió lo absurdo de su idea. La furia de la que había sido testigo no podía ser el resultado de una acción tan trivial como la suya, y seguramente no iba dirigida contra él en particular. Pero sabía que habría problemas en el Gran Palacio. El rey sacerdote se apresuraría a tratar de apaciguar a ese dios demonio. Habría sacrificios. Las tradicionales ofrendas de frutos o incluso animales no serían suficientes para aplacar una ira de esa magnitud. Los sacrificios serían humanos.

De repente, y para su sorpresa, se vio lanzado hacia el fondo de la habitación por un golpe de aire seguido de un viento violento. El ruido era tan atronador que por un momento le dejó sordo. Muchos de sus vasos de arcilla bellamente ornamentados fueron barridos de las estanterías y se hicieron añicos contra la pared trasera. Tendido en el suelo en el apartado rincón al que había sido lanzado por el golpe de aire, empezó a recobrar el sentido y vio que la habitación estaba en completo desorden. Quedó horrorizado al ver que una de sus grandes urnas favoritas estaba destrozada y ya no existían los preciosos diseños que tan primorosamente había trabajado.



Representaciones de perturbaciones.

Am-tep se levantó tambaleándose y al cabo de un rato se acercó de nuevo a la ventana, esta vez con gran agitación, para contemplar de nuevo aquella lejana y terrible escena en medio del mar. Entonces creyó ver una perturbación que se dirigía hacia él, iluminada por ese horno lejano. Parecía una enorme depresión que se movía con rapidez hacia la costa, seguida por un muro de agua que semejaba un acantilado. De nuevo quedó paralizado, observando cómo la ola que se aproximaba alcanzaba proporciones gigantescas. Finalmente, la perturbación llegó a la costa y la parte del mar que había inmediatamente ante él se vació, dejando numerosos barcos encallados en la playa recién formada. Luego la ola acantilado entró en la zona vaciada y la golpeó con terrible violencia. Todos los barcos quedaron hechos pedazos, y muchas casas próximas fueron destruidas en un instante. Aunque el agua alcanzó una gran altura en el espacio que había delante de él, su propia casa se salvó de la destrucción gracias a que estaba situada en un terreno elevado y a gran distancia del mar.

Destrucciones ocasionadas por terremotos (izquierda) u olas gigantes o tsunamis (derecha).

El Gran Palacio también se salvó. Pero Am-tep temía que lo peor estaba por llegar, y tenía razón –aunque no podía imaginar hasta qué punto–. Sabía, no obstante, que ahora no bastaría con ningún sacrificio humano ordinario de un esclavo. Sería necesario algo más para aplacar la ira tempestuosa de ese dios terriblemente enfurecido. Pensó en sus hijos e hijas, y en su nieto recién nacido. Ni siquiera ellos estarían a salvo.

Am-tep estaba en lo cierto al temer nuevos sacrificios humanos. Pronto fueron apresados una joven y un joven de buena cuna, y llevados a un templo cercano, a gran altura en la falda de una montaña. Se estaba procediendo al correspondiente ritual cuando sobrevino otra catástrofe. El suelo tembló con una violencia devastadora y el techo del templo se vino abajo, matando al instante a todos los sacerdotes y a sus presuntas víctimas sacrificiales. Allí, atrapados en mitad del ritual, ¡yacerían enterrados durante tres mil quinientos años!

La devastación fue espantosa, pero no absoluta. Muchas de las islas donde vivían Am-tep y su pueblo sobrevivieron al terrible terremoto, aunque el Gran Palacio quedó destruido casi por completo. Se reconstruyeron muchas cosas en el curso de los años. Incluso el palacio, construido sobre las ruinas del antiguo, iba a recuperar mucho de su esplendor original. Pese a todo, Am-tep se había jurado abandonar la isla. Su mundo había cambiado irremisiblemente.

En el mundo que él conoció se habían dado mil años de paz, prosperidad y cultura, durante los cuales había reinado la diosa tierra. Había florecido un arte maravilloso. Existía un gran comercio con las islas vecinas. El magnífico Gran Palacio era un enorme y lujoso laberinto, prácticamente una ciudad en sí mismo, adornado con soberbios frescos de animales y plantas. Había agua corriente, un excelente sistema de alcantarillado y cisternas. La guerra era casi desconocida y las defensas innecesarias. Pero ahora Am-tep tenía la sensación de que la diosa tierra había sido derrocada por un ser con valores completamente diferentes.

Pasaron algunos años antes de que Am-tep, acompañado de su familia superviviente, dejase definitivamente la isla en un barco reconstruido por su hijo más joven, que era un hábil carpintero y marino. El nieto de Am-tep había crecido y se había convertido en un muchacho despierto, interesado en todo lo que le rodeaba. El viaje duró varios días, pero el tiempo era sumamente apacible. Una noche clara, Am-tep estaba explicando a su nieto las figuras que formaban las estrellas cuando le asaltó una extraña idea: las figuras que formaban las estrellas no habían sufrido la más mínima alteración con respecto a las que eran antes de la catástrofe de la emergencia del terrible demonio.

Am-tep conocía muy bien esas figuras, pues tenía la visión profunda de un artista. Si sus vasijas habían quedado destrozadas y su gran urna se había hecho añicos, pensaba él, ¿no deberían aquellas minúsculas candelas en el cielo haber sido apartadas, aunque fuera ligeramente, de sus posiciones por la violencia de aquella noche? La Luna también había mantenido su cara, igual que antes, y su ruta a través del cielo lleno de estrellas no había cambiado un ápice, hasta donde Am-tep podía afirmar. Durante muchas lunas posteriores a la catástrofe, los cielos habían parecido en efecto diferentes. Hubo oscuridad y nubes extrañas, y la Luna y el Sol habían mostrado a veces colores inusuales. Pero ahora que eso había pasado, sus movimientos parecían ser exactamente los mismos que habían sido antes. Y, de igual forma, las minúsculas estrellas no se habían movido en absoluto.

Si los cielos, que tienen una estatura mucho mayor que la de ese terrible demonio, habían mostrado tan poco interés por la catástrofe, pensó Am-tep, ¿por qué las fuerzas que controlaban al propio demonio habían de mostrar interés por lo que estaba haciendo el pequeño pueblo de la isla, con sus ridículos rituales y sacrificios humanos? Se sintió avergonzado por las absurdas ideas que había tenido entonces, cuando pensó que el demonio podría estar interesado en las sencillas figuras de sus vasijas.

Pero Am-tep seguía turbado por la pregunta: ¿por qué? ¿Qué profundas fuerzas controlan la norma del mundo, y por qué a veces estallan de formas violentas y aparentemente incomprensibles? Compartía estas preguntas con su nieto, pero no había respuestas.

Pasó un siglo, y luego un milenio, y aún no había respuestas.

Amphos el artesano había vivido toda su vida en el mismo pueblo que su padre, y que el padre de su padre antes de este, y el padre del padre de su padre aun antes de eso. Se ganaba la vida haciendo brazaletes de oro bellamente decorados, pendientes, copas ceremoniales y otros finos productos fruto de sus habilidades artísticas. Ese trabajo había sido la ocupación de la familia durante cuarenta generaciones: una línea ininterrumpida desde que Am-tep se hubiera establecido allí mil cien años antes.

Pero no eran solo las habilidades artísticas las que se habían transmitido de una generación a otra. Las preguntas de Am-tep preocupaban a Amphos como habían preocupado al propio Am-tep en una época anterior. La gran historia de la catástrofe que destruyó a una vieja y pacífica civilización se había transmitido de padres a hijos. La percepción que tuvo Am-tep del desastre también había sobrevivido con sus sucesores. Amphos, asimismo, comprendía que los cielos tenían una magnitud y estatura tan enormes que estarían completamente desinteresados por aquel terrible suceso. En cualquier caso, el suceso había tenido un efecto catastrófico sobre la pequeña población con sus ciudades y sus sacrificios humanos y sus insignificantes rituales religiosos. Por comparación, el propio suceso debía haber sido el resultado de fuerzas enormes completamente indiferentes a tales acciones triviales de los seres humanos. Pero la naturaleza de dichas fuerzas era tan desconocida en la época de Amphos como lo era para Am-tep.

Amphos había estudiado la estructura de las plantas, los insectos y otros pequeños animales, así como de las rocas cristalinas. Su habilidad para la observación también le había sido útil para sus dibujos decorativos. Se interesó por la agricultura y quedó fascinado por el crecimiento del trigo y otras plantas a partir del grano. Pero nada de esto le decía "¿por qué?", y se sentía insatisfecho. Creía que había una razón subyacente en las pautas de la naturaleza, pero no estaba preparado para descubrir dichas razones.

Diferentes constelaciones.

Una noche clara, Amphos levantó la vista al cielo y, a partir de las pautas de las estrellas, trató de construir las figuras de aquellos héroes y heroínas que formaban las constelaciones en el cielo. Para su humilde ojo de artista, los parecidos de aquellas formas eran muy pobres. Él mismo podría haber dispuesto las estrellas de forma mucho más convincente. ¿Por qué los dioses no han dispuesto las estrellas de una forma más adecuada?, se preguntaba. Tal como estaban, las disposiciones se parecían más a granos diseminados, sembrados al azar por un granjero, que a un diseño deliberado de un dios. Entonces, le asaltó una extraña idea: no busques razones en las pautas concretas de las estrellas, o en otras disposiciones desordenadas de objetos; busca en su lugar un orden universal más profundo en el comportamiento de los objetos.

Amphos razonaba que, después de todo, no encontramos orden en las figuras que forman las semillas dispersas cuando caen al suelo, sino en la forma milagrosa en que cada una de ellas puede desarrollarse hasta formar una planta viva, con una soberbia estructura, y cada una de ellas similar en los detalles a las demás. Nosotros no trataríamos de buscar significado en las disposiciones de las semillas dispersas en el suelo; pese a todo, debe de haber un significado en el misterio oculto de las fuerzas internas que controlan el crecimiento de cada semilla individual, de tal modo que cada una sigue esencialmente el mismo curso maravilloso. En realidad, las leyes de la naturaleza deben de tener una soberbia precisión para que esto sea posible.

Amphos se convenció de que, sin precisión en las leyes subyacentes, no podría haber orden en el mundo, mientras que se percibe mucho orden en el comportamiento de las cosas. Más aún, debe haber precisión en nuestros modos de pensar acerca de estas cuestiones si no queremos extraviarnos sin remedio.

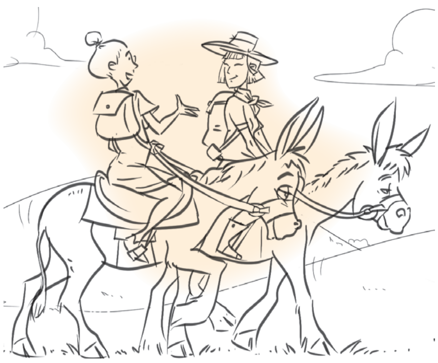
Sucedió que Amphos tuvo noticias de un sabio que vivía en otro lugar de la tierra, y cuyas creencias parecían estar en armonía con las suyas. Según este sabio, uno no podía basarse en las enseñanzas y tradiciones del pasado. Para estar seguro de las propias creencias, era necesario llegar a conclusiones precisas mediante el uso de una razón indiscutible. Esta precisión tenía que ser de naturaleza matemática, dependiente en definitiva de la noción de número y su aplicación a las formas geométricas. En consecuencia, debían ser número y geometría, y no mito y superstición, los que gobernaran el comportamiento del mundo.

Igual que había hecho Am-tep once siglos antes, Amphos se hizo a la mar. Encontró su camino a la ciudad de Crotona, donde el sabio y su fraternidad de 571 hombres sabios y 28 mujeres sabias estudiaban en busca de la verdad. Al cabo de un tiempo, Amphos fue aceptado en la fraternidad. El nombre del sabio era Pitágoras".

Pitágoras y su lugar en el mundo.

II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

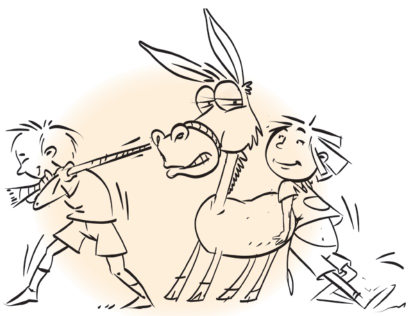
¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Las raíces de la ciencia

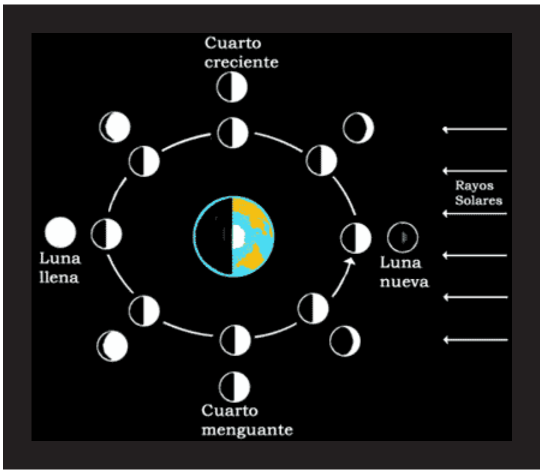
LA BÚSQUEDA DE LAS FUERZAS QUE CONFIGURAN EL MUNDO

"¿Qué leyes rigen nuestro universo? ¿Cómo las conoceremos? ¿Cómo puede servirnos este conocimiento para comprender el mundo y con ello orientar sus acciones en nuestro provecho?



Desde los albores de la humanidad, los hombres se han sentido profundamente intrigados por preguntas como estas. Al principio trataron de dar sentido a las fuerzas que controlan el mundo aferrándose al tipo de conocimiento que les era posible a partir de sus propias vidas. Imaginaban que cualquier cosa o quienquiera que fuera lo que controlaba su entorno lo haría de la misma forma en que ellos se esforzaban para controlar las cosas: originalmente habían creído que su destino estaba bajo la influencia de seres que actuaban de acuerdo con sus propios y variados impulsos humanos. Tales fuerzas impulsoras podían ser el orgullo, el amor, la ambición, la rabia, el miedo, la venganza, la pasión, el castigo, la lealtad o el arte. Por consiguiente, el curso de los fenómenos naturales –como el Sol, la lluvia, las tormentas, el hambre, la enfermedad o la pestilencia– se entendía como el capricho de dioses o diosas motivados por tales impulsos humanos. Y lo único que se podía hacer para influir en estos acontecimientos era apaciguar a las figuras divinas.

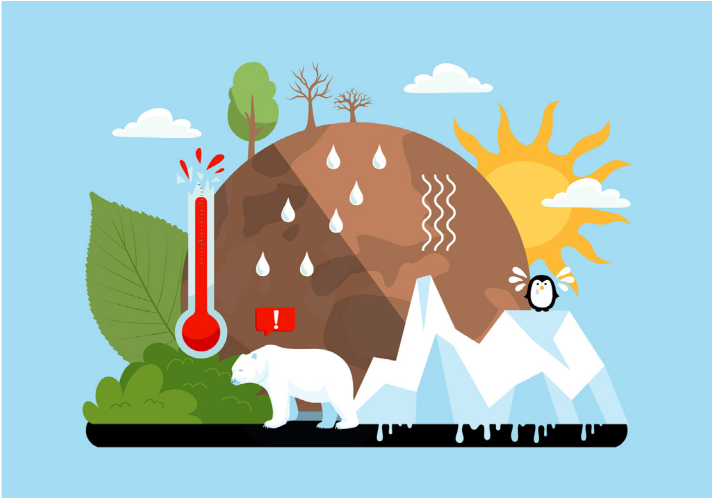
Pero poco a poco se empezó a establecer la fiabilidad de otro tipo de pautas. La precisión del movimiento del Sol en el cielo y su evidente relación con la alternancia del día y la noche ofrecía el ejemplo más obvio; pero también la posición del Sol respecto de las estrellas del orbe celeste aparecía estrechamente asociada al cambio y a la implacable regularidad de las estaciones, y a la clara influencia en el clima que la acompañaba y, en consecuencia, en la vegetación y el comportamiento animal.



Recorrido de la Luna alrededor de la Tierra.

También el movimiento de la Luna parecía firmemente regulado, y sus fases determinadas por su relación geométrica con el Sol. Se advirtió que en aquellos lugares de la Tierra en los que los océanos abiertos se encuentran con la tierra, las mareas tenían una regularidad rígidamente gobernada por la posición (y la fase) de la Luna. Por último, incluso los muchos más complicados movimientos aparentes de los planetas empezaron a ceder sus secretos, revelando una regularidad y una inmensa precisión subyacente. Si los cielos estaban realmente controlados por los caprichos de los dioses, entonces estos mismos dioses parecían estar bajo el hechizo de leyes matemáticas exactas.

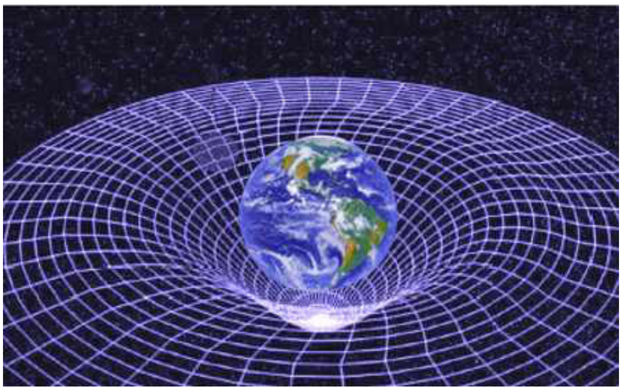
Del mismo modo, las leyes que controlaban algunos fenómenos terrestres –tales como los cambios diarios y anuales de temperatura, el flujo y reflujo de los océanos, y el crecimiento de las plantas– que, al menos en ese aspecto, se veían influidos por los cielos, compartían esa misma regularidad matemática que parecía guiar a los dioses. Pero este tipo de relación entre el comportamiento de los cuerpos celestes y los terrestres iba a ser a veces exagerado o mal entendido, e iba a cobrar una importancia desmesurada, que llevaría a las connotaciones ocultas y místicas de la astrología.



Fenómenos climáticos.

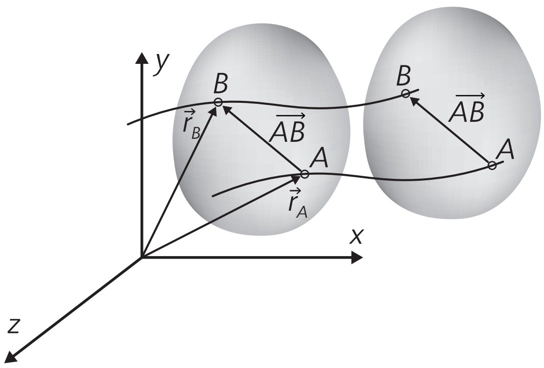
Pasaron muchos siglos antes de que el rigor del conocimiento científico hiciera posible desenredar las verdaderas influencias de los cielos de las puramente hipotéticas y místicas. Pese a todo, desde los tiempos más remotos había estado claro que aquellas influencias existían realmente y que, en consecuencia, las leyes matemáticas de los cielos debían tener relevancia también aquí en la Tierra.

De forma en apariencia independiente se percibieron otras regularidades en el comportamiento de los objetos terrestres. Una de ellas era la tendencia de todas las cosas en una vecindad a moverse en la misma dirección hacia abajo, bajo la influencia de lo que ahora llamamos *gravedad*.



Representación de un campo magnético.

Se observó que a veces la materia se transformaba de una forma en otra, tal como ocurría en la fusión del hielo o la disolución de la sal, aunque la cantidad total de materia nunca parecía cambiar, lo que refleja la ley que ahora conocemos como *conservación de la masa*.



Movimiento espacial rígido, con conservación de la forma.

Además, se advirtió que hay muchos cuerpos materiales con la importante propiedad de que conservan su forma, de donde surgió el concepto de movimiento espacial rígido; y se hizo posible comprender las relaciones espaciales en términos de una geometría precisa y bien definida: la geometría tridimensional que ahora denominamos *euclídea*. Más aún, la noción de "línea recta" en esta geometría resultó ser la misma que la que proporcionaban los rayos luminosos (o las líneas visuales). Sin duda, había una extraordinaria precisión y belleza en estas ideas, que despertaban una gran fascinación en los antiguos, igual que la despiertan hoy en nosotros.

Una asociación fantástica, hecha por los antiguos griegos, entre los cinco sólidos platónicos y los cuatro "elementos" (fuego, aire, agua y tierra), junto con el firmamento celeste representado por el dodecaedro.

Sin embargo, y en relación con nuestras vidas cotidianas, las implicaciones de esta precisión matemática para las acciones del mundo parecían con frecuencia poco excitantes y limitadas, pese al hecho de que la propia matemática parecía representar una verdad profunda. En consecuencia, en tiempos antiguos muchas personas iban a permitir que su imaginación se dejara llevar por su fascinación por el tema y les condujese mucho más allá de lo que era adecuado.

En astrología, por ejemplo, las figuras geométricas también solían generar connotaciones místicas y ocultas, como era el caso de las supuestas potencias mágicas de pentagramas y heptagramas. Y había una supuesta asociación completamente hipotética entre los sólidos platónicos y los estados elementales de la materia (véase la figura de arriba). Tardarían muchos siglos en llegar los conocimientos más profundos que tenemos en la actualidad, concernientes a las relaciones reales entre la masa, la gravedad, la geometría, el movimiento planetario y el comportamiento de la luz".

LA VERDAD MATEMÁTICA

"Los primeros pasos hacia una comprensión de las influencias reales que controlan la naturaleza requerían desenredar lo verdadero de lo puramente hipotético. Pero antes de que estuvieran en situación de hacer esto de forma fiable para su conocimiento de la naturaleza, los antiguos necesitaban algo más. Lo primero que tenían que hacer era descubrir la forma de desenredar lo verdadero de lo hipotético en matemáticas. Se necesitaba un procedimiento para decir si se puede confiar o no en la verdad de una afirmación matemática dada. Hasta que no quedara establecida de forma razonable esta cuestión preliminar, habría pocas esperanzas de abordar con seriedad aquellos problemas más difíciles relativos a las fuerzas que controlan el comportamiento del mundo y cualesquiera que pudieran ser sus relaciones con la verdad matemática. Esta comprensión de que la clave para entender la naturaleza reside en unas matemáticas incuestionables fue quizá el primer avance trascendental en la ciencia.

Aunque ya desde los tiempos antiguos de Egipto y Babilonia se habían supuesto todo tipo de verdades matemáticas, solo cuando los filósofos griegos Tales (*c*. 625-547 a. C.) y Pitágoras de Samos (*c*. 572- 497 a. C.) empezaron a introducir la idea de demostración matemática se colocó la primera piedra fundacional firme del conocimiento matemático –y, por consiguiente, de la propia ciencia–. Por desgracia, no se conoce casi nada fiable sobre Pitágoras, su vida, sus seguidores o su trabajo, aparte de su existencia misma y el reconocimiento por parte de Pitágoras mismo del papel de las razones simples en la armonía musical".

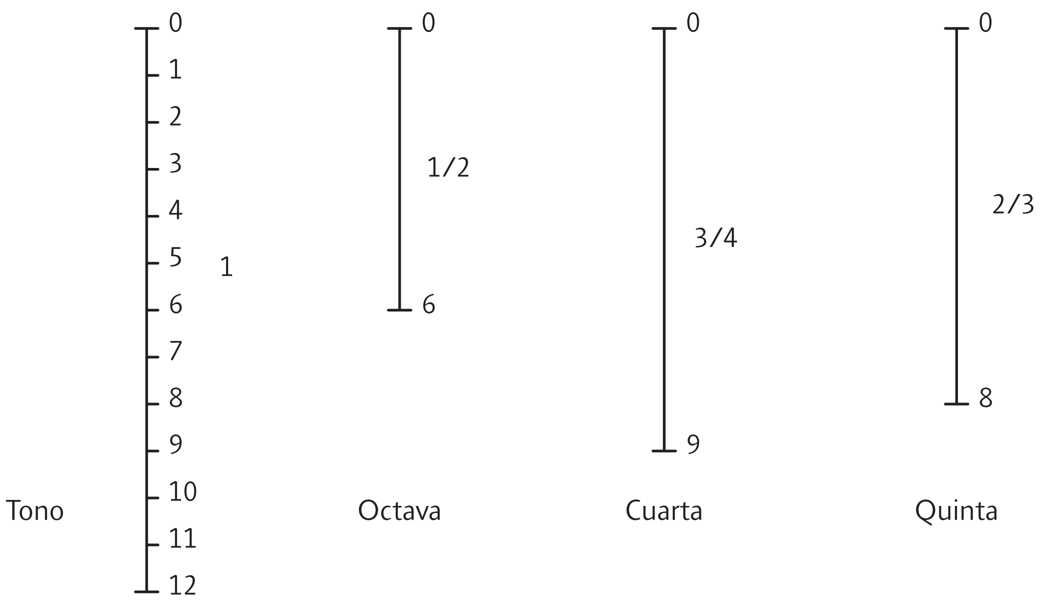
Armonía científica de los pitagóricos

Con Miguel de Guzmán vimos que la armonía está en el corazón mismo del pitagorismo. La música era el método de elevación y purificación del alma y, al mismo tiempo, objeto de contemplación intelectual que revelaba, con sus congruencias expresables mediante relaciones numéricas, la armonía más profunda del cosmos. La capacidad cuasimágica de la música es un elemento heredado por el pitagorismo de las corrientes órficas más primitivas. El análisis científico de los sonidos armónicos es en cambio un rasgo muy específicamente pitagórico, que casi con toda seguridad se remonta al mismo Pitágoras. Existen varias versiones sobre el modo concreto como Pitágoras llegó a desentrañar las relaciones numéricas entre los sonidos consonantes, es decir, aquellos cuya producción simultánea origina una sensación agradable en nuestro oído: el tono, la octava, la quinta y la cuarta.

Nicómaco de Gerasa, Gaudencio y Boecio hablan de la observación de Pitágoras de los diferentes sonidos producidos en el yunque del herrero por martillos de diferentes pesos. Un martillo cuyo peso era como 6 producía el tono, otro con peso 12 producía la octava, otro con peso 9, la quinta y otro de peso 8, la cuarta. Pitágoras volvió a casa, colgó tales pesos de cuatro cuerdas iguales y observó que se producían los sonidos consonantes correspondientes.

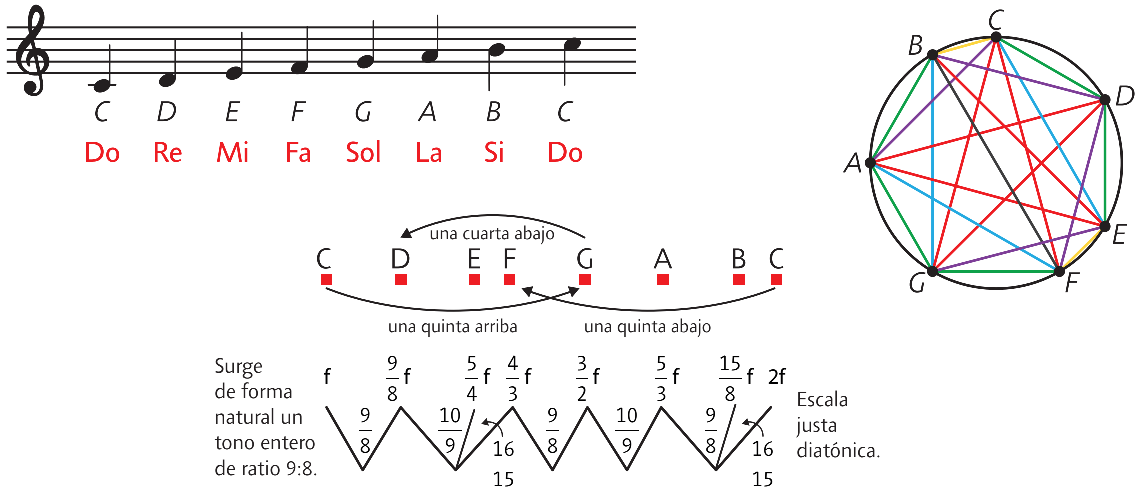
Este es el ejemplo típico de una de esas historias cuya falsedad podría haber comprobado un historiador con sentido crítico sin más que tratar de repetir la experiencia. La frecuencia del sonido producido por una cuerda vibrante no está en proporción con la tensión, sino con la raíz cuadrada de la tensión. Diógenes Laercio propone a Pitágoras mismo como inventor del monocorde, no un instrumento musical, sino más bien un aparato científico para verificar la teoría musical utilizado por los pitagóricos. Gaudencio explica en forma detallada el experimento más verosímil con el que Pitágoras comprobó y cuantificó su intuición genial de la conexión de la armonía musical con los números.

Pitágoras tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental, el tono. Hizo señales en la cuerda, que la dividían en doce partes iguales.



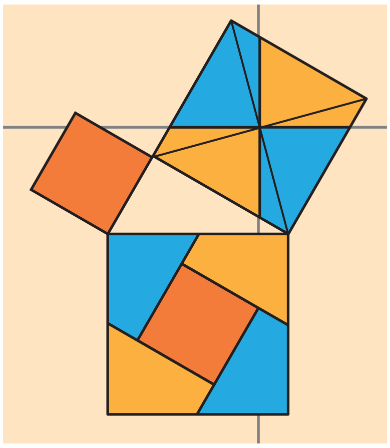
Pisó la cuerda en el 6 y entonces observó que se producía la octava. Pisó luego en el 9 y resultaba la cuarta. Al pisar el 8 se obtenía la quinta. ¡Las fracciones 1/2, 3/4, 2/3 correspondían a la octava, la cuarta y la quinta! Los sonidos producidos al pisar en otros puntos resultaban discordes o, cuanto menos, no tan acordes como los anteriores. ¡Los números 1,2,3,4, la Tetraktys, determinaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes! Pese a todo, muchas cosas de gran importancia se atribuyen habitualmente a los pitagóricos. En consecuencia, utilizaremos el término *pitagórico* solo como una etiqueta, sin ninguna pretensión de exactitud histórica.

Quizá fuera Tales el primero en introducir esta idea de demostración, pero parece que fueron los pitagóricos quienes hicieron por primera vez un uso importante de la misma para establecer cosas que, de otro modo, no eran obvias. Parece que Pitágoras también tuvo una fuerte intuición de la importancia del número, y de los conceptos aritméticos, en el gobierno de las acciones del mundo físico. Se dice que un factor importante en esta comprensión fue el darse cuenta de que las armonías más bellas producidas por liras o flautas correspondían a las razones más simples entre las longitudes de las cuerdas vibrantes o los tubos. También se dice que él introdujo la *escala pitagórica*, cuyas razones numéricas sabemos ahora que son las frecuencias que determinan los intervalos principales en los que se basa esencialmente la música occidental.



Conformación de una escala diatónica.

Esta es la *escala diatónica* pura en la que las frecuencias (inversamente proporcionales a las longitudes de los elementos vibrantes) están en las razones 24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48, que presentan muchos casos de razones simples, que subyacen a las armonías que resultan agradables al oído. Las "teclas blancas" de un piano moderno están afinadas (siguiendo un compromiso entre la pureza pitagórica de la armonía y la facilidad de los cambios de clave) como aproximaciones a estas razones pitagóricas, según la escala uniformemente temperada, con frecuencias relativas $1 : \alpha^2 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^7 : \alpha^9 : \alpha^{11} : \alpha^{12}$, donde $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946\ldots$ (Nota: α^5 significa la quinta potencia de α, *i. e.* $\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha$. La cantidad $\sqrt[12]{2}$ es la raíz duodécima de 2, que es el número cuya duodécima potencia es 2, *i. e.* $2^{1/12}$, de modo que $\alpha^{12} = 2$. Recordemos la idea del logaritmo complejo).



Teorema de Pitágoras.

El famoso teorema de Pitágoras, que afirma que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mostró, quizá más que cualquier otra cosa, que existe una relación precisa entre la aritmética de los números y la geometría del espacio físico (la veremos en detalle más adelante).

Pitágoras tuvo un número considerable de seguidores –los pitagóricos– establecidos en la ciudad de Crotona, en lo que hoy es el sur de Italia, pero su influencia en el mundo exterior se vio dificultada por el hecho de que todos los miembros de la fraternidad pitagórica hacían un juramento de secreto. Por ello, casi todas sus conclusiones detalladas se han perdido. De todas formas, algunas de estas conclusiones se filtraron, con consecuencias desafortunadas para los "topos", que, al menos en una ocasión, ¡sufrieron el castigo de morir ahogados!

A la larga, la influencia de los pitagóricos sobre el progreso del pensamiento humano ha sido enorme. Por primera vez, con demostración matemática, era posible hacer afirmaciones significativas de un carácter incuestionable, de modo que seguirían siendo tan verdaderas hoy como en la época en que se hicieron, con independencia de cuánto haya progresado nuestro conocimiento del mundo desde entonces. Empezaba a revelarse la naturaleza verdaderamente intemporal de la matemática.

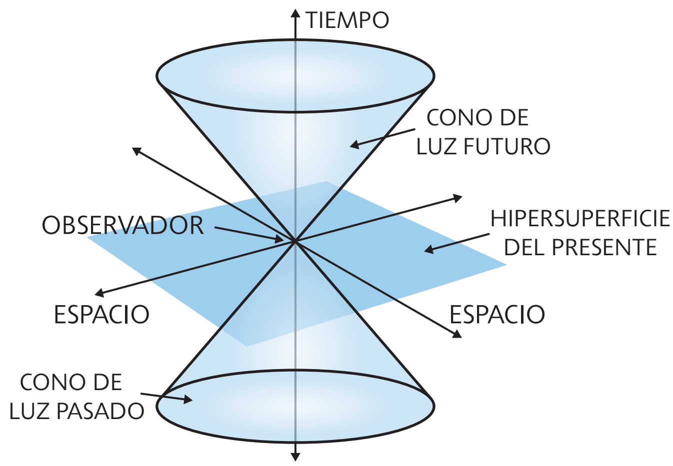
Pero, ¿qué es una demostración matemática? En matemáticas, una demostración es un argumento impecable, basado solo en los métodos del razonamiento puramente lógico, que permite inferir la validez de una afirmación matemática dada a partir de la validez preestablecida de otras afirmaciones matemáticas, o de ciertas afirmaciones concretas primitivas –los axiomas– cuya validez se considera evidente. Una vez que tal afirmación matemática ha quedado establecida de esta forma, se conoce como un teorema.

Muchos de los teoremas que interesaban a los pitagóricos eran de naturaleza geométrica; otros eran solo afirmaciones sobre números. Aquellos que concernían puramente a los números tienen hoy una validez inequívoca, igual que la tenían en los tiempos de Pitágoras.

¿Qué ocurre con los teoremas geométricos que los pitagóricos habían obtenido utilizando sus procedimientos de demostración matemática? También estos tienen hoy una clara validez, pero ahora surge una cuestión que complica las cosas. Se trata de una cuestión cuya naturaleza es más obvia para nosotros desde nuestro punto de vista moderno que lo era en el tiempo de Pitágoras. Los antiguos solo conocían un tipo de geometría, a saber, la que ahora llamamos geometría euclídea, pero ahora conocemos otros muchos tipos. Así pues, al considerar los teoremas geométricos de la época griega antigua es importante especificar que la noción de geometría a la que nos referimos es en realidad la geometría de Euclides. (Seré más explícito sobre estas cuestiones cuando demos un ejemplo importante de geometría no euclídea.)

La geometría euclídea es una estructura definida, con sus propios axiomas específicos (incluidas algunas afirmaciones menos seguras conocidas como postulados), que proporciona una excelente aproximación a un aspecto concreto del mundo físico. Este era el aspecto de realidad, muy familiar para los antiguos griegos, que remitía a las leyes que gobiernan la geometría de los objetos rígidos y sus relaciones con otros objetos rígidos cuando se movían en el espacio tridimensional.

Algunas de estas propiedades eran tan familiares y autoconsistentes que tendían a ser consideradas como verdades matemáticas “evidentes” y se tomaban como axiomas (o postulados). Ya vimos en las *Leñitas geométricas* de la tercera temporada el “universo tetradimensional” de Hermann Minkowski, donde desarrollamos el concepto de espacio seudoeuclideo. Se trata de un modelo matemático que describe el espacio y el tiempo en la teoría especial de la relatividad tal como se vio en el espacio tiempo de la física moderna o y en los campos clásicos de Maxwell y Einstein en la relatividad general –e incluso el espacio-tiempo “minkowskiano” de la relatividad especial–, proporciona geometrías para el universo físico que son diferentes, e incluso más precisas que la geometría de Euclides, pese al hecho de que la euclídea de los antiguos era ya notablemente precisa. Así pues, a la hora de considerar afirmaciones geométricas debemos tener cuidado respecto de si confiamos en los “axiomas” como si fueran, en cualquier sentido, realmente verdaderos.



uUn esquema sobre el tema.

Pero ¿qué significa “verdadero” en este contexto? La dificultad fue apreciada por el gran filósofo griego Platón, que vivió en Atenas desde c. 429 hasta 347 a. C., aproximadamente un siglo y medio después de Pitágoras. Platón dejó claro que las proposiciones matemáticas –las cosas que podían considerarse como incuestionablemente verdaderas– no se refieren a objetos físicos reales (como los cuadrados, triángulos, círculos, esferas y cubos aproximados que podrían construirse con marcas en la arena, o con piedra o madera), sino a ciertas entidades idealizadas. Él imaginaba que esas entidades ideales habitaban en un mundo diferente, distinto del mundo físico. Hoy día podríamos llamar a este mundo el mundo platónico de las formas matemáticas. Las estructuras físicas, tales como los cuadrados, los círculos o los triángulos recortados en papiro, o marcados en una superficie plana, o quizá los cubos, los tetraedros o las esferas esculpidas en mármol, podrían ajustarse estrechamente a estos ideales, pero solo de forma aproximada. Los cuadrados, cubos, círculos, esferas, triángulos, etc., matemáticos reales no serían parte del mundo físico, sino que serían habitantes del mundo platónico de las formas matemáticas idealizadas.

¿ES "REAL" EL MUNDO MATEMÁTICO DE PLATÓN?

"Esta era una idea extraordinaria para su época, y ha resultado ser una idea muy fecunda. Pero, ¿existe realmente el mundo matemático platónico, en cualquier sentido significativo? Muchas personas, incluidos los filósofos, podrían considerar que un 'mundo' semejante es una completa ficción, un mero producto de nuestra imaginación desbordante. Pese a todo, el punto de vista platónico es inmensamente valioso. Nos dice que debemos ser cuidadosos en distinguir las entidades matemáticas precisas de las aproximaciones que vemos a nuestro alrededor en el mundo de los objetos físicos. Más aún, nos proporciona el esquema con el que ha procedido la ciencia desde entonces. Los científicos propondrán modelos del mundo –o, mejor, de ciertos aspectos del mundo– y estos modelos pueden ser puestos a prueba frente a observaciones previas y frente a los resultados de experimentos cuidadosamente diseñados. Los modelos se juzgan apropiados si sobreviven a este examen riguroso y si, además, son estructuras con consistencia interna. Para nuestra discusión actual, el punto importante en estos modelos es que son básicamente modelos matemáticos puramente abstractos. En particular, la cuestión misma de la consistencia interna de un modelo científico requiere que el modelo esté determinado de forma precisa. La precisión requerida exige que el modelo sea matemático, pues de lo contrario no se puede estar seguro de que estas preguntas tengan respuestas bien definidas.

Si hay que atribuir algún tipo de 'existencia' al propio modelo, entonces dicha existencia está localizada dentro del mundo platónico de las formas matemáticas. Por supuesto, se podría adoptar un punto de vista opuesto: que el modelo va a tener existencia solo dentro de nuestras diversas mentes, antes que aceptar que el mundo de Platón sea en algún sentido absoluto y 'real'. Pese a todo, se gana algo importante al considerar que las estructuras matemáticas poseen una realidad por sí mismas. En efecto, nuestras mentes individuales son notoriamente imprecisas, poco fiables e inconsistentes en sus juicios. La precisión, fiabilidad y consistencia que requieren nuestras teorías científicas exige algo más allá de cualquiera de nuestras mentes individuales (poco dignas de confianza). En las matemáticas encontramos una solidez mucho mayor que la que puede localizarse en cualquier mente concreta. ¿No apunta esto a algo exterior a nosotros mismos, con una realidad que está más allá de lo que cada individuo puede alcanzar?

De todas formas, aún se podría adoptar el punto de vista alternativo según el cual el mundo matemático no tiene existencia independiente y consiste meramente en algunas ideas que han sido destiladas de nuestras diversas mentes, que se han mostrado totalmente dignas de confianza y en las que todos coinciden. Pero incluso este punto de vista parece dejarnos muy lejos de lo que se necesita. ¿Queremos decir 'en las que todos coinciden', por ejemplo, o 'en las que coinciden quienes están en su sano juicio', o 'en las que coinciden todos aquellos que tienen un doctorado en matemática (poco frecuente en la época de Platón) y que tienen derecho a aventurar una opinión autorizada'? Parece que aquí hay un peligro de circularidad; pues juzgar si alguien está o no 'en su sano juicio' requiere algún patrón externo. Lo mismo sucede con el significado de 'autorizada', a menos que se adoptara algún canon de naturaleza acientífica tal como la 'opinión de la mayoría' (y debería quedar claro que la opinión de la mayoría, por importante que pueda ser para un gobierno democrático, no debería ser utilizada en modo alguno como criterio de aceptabilidad científica). La propia matemática parece tener realmente una solidez que va mucho más allá de lo que cualquier matemático individual es capaz de percibir.

Aquellos que trabajan en esta disciplina, ya estén implicados activamente en la investigación matemática o bien utilicen resultados que han sido obtenidos por otros, sienten normalmente que son meros exploradores de un mundo que está mucho más allá de ellos mismos, un mundo que posee una objetividad que trasciende la mera opinión, ya sea dicha opinión la suya propia o la propuesta de otros, con independencia de cuán expertos pudieran ser esos otros.

Quizá pueda ayudar el que yo plantee de una forma diferente el caso de la existencia real del mundo platónico. Lo que entiendo por esta 'existencia' es tan solo la objetividad de la verdad matemática. La existencia platónica, tal como yo la veo, se refiere a la existencia de un canon externo objetivo que no depende de nuestras opiniones individuales ni de nuestra cultura concreta. Tal 'existencia' podría también referirse a objetos distintos de la matemática, tales como la moralidad o la estética, como analizaremos un poco más adelante, pero aquí estoy interesado solo en la objetividad matemática, que parece ser una cuestión mucho más clara.

Permítaseme ilustrar este punto considerando un ejemplo famoso de verdad matemática, y relacionarlo con la cuestión de la 'objetividad'. En 1637, Pierre de Fermat hizo su famosa afirmación conocida hoy día como el "Último teorema de Fermat" (que ninguna potencia *n*-ésima positiva de un número entero puede ser la suma de otras dos potencias *n*-ésimas positivas si *n* es un número entero mayor que 2), que él escribió en un margen de su copia de la *Arithmetica*, libro escrito en el siglo III por el matemático griego Diofanto. En este margen, Fermat anotó también: 'He encontrado una demostración de esto verdaderamente maravillosa, que no cabe en este estrecho margen'.

Recuérdese que la potencia *n*-ésima de un número es dicho número multiplicado por sí mismo *n* veces. Así, la tercera potencia de 5 es 125, y se escribe $5^3 = 125$; la cuarta potencia de 3 es 81, escrito $3^4 = 81$; etcétera.

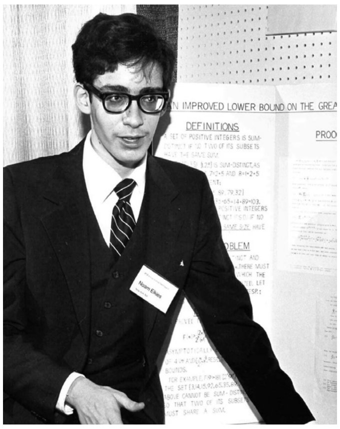
La afirmación matemática de Fermat quedó sin confirmar durante más de trescientos cincuenta años, pese a que aunó los esfuerzos de muchos matemáticos destacados. Finalmente, Andrew Wiles publicó una demostración en 1995 (que se basaba en el trabajo previo de otros matemáticos), y esta demostración ha sido ahora aceptada como un argumento válido por la comunidad matemática.

Ahora bien, ¿aceptamos el punto de vista de que la afirmación de Fermat fue siempre verdadera, mucho antes de que este la hiciera en realidad, o es su validez una cuestión puramente cultural, dependiente de cuáles pudieran ser los cánones subjetivos de la comunidad de matemáticos humanos? Supongamos que la validez de la afirmación de Fermat es, de hecho, una cuestión subjetiva. Entonces, no sería un absurdo que un matemático X hubiera dado con un contraejemplo real y concreto de la afirmación de Fermat, siempre que X lo hubiera hecho antes de 1995.

De hecho, mientras Wiles estaba tratando de corregir una 'laguna' en su demostración del último teorema de Fermat que se había hecho evidente tras su presentación inicial en Cambridge en junio de 1993, se extendió por la comunidad matemática el rumor de que el matemático Noam Elkies había encontrado un contraejemplo de la afirmación de Fermat. Previamente, en 1988, Elkies había hallado un contraejemplo de la conjetura de Euler –que no hay soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 2^4$–, demostrando con ello que era falsa. No era inverosímil, por consiguiente, que él hubiera demostrado que la afirmación también fuera falsa. Sin embargo, el correo electrónico que inició el rumor tenía fecha de 1 de abril y se descubrió que era una broma de Henri Darmon".

Biografía

¿Quién es Noam Elkies y qué relación tiene con nuestra olimpiada?
Es un oro perfecto de la 22 IMO (Olimpíada Matemática Internacional) 1981



Noam David Elkies (nacido el 25 de agosto de 1966 en Nueva York) es profesor de matemáticas en la Universidad de Harvard. A los 26 años se convirtió en el profesor más joven en recibir la titularidad en Harvard. También es pianista, maestro nacional de ajedrez y compositor de ajedrez.

Vida temprana y educación. Su padre era ingeniero y su madre, profesora de piano. Asistió a la escuela secundaria Stuyvesant en la ciudad de Nueva York durante tres años antes de graduarse en 1982, a los 15 años. En 1981, Elkies, niño prodigio a los 14 años, fue galardonado con una medalla de oro en la 22ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, recibiendo una puntuación perfecta de 42, uno de los más jóvenes en lograrlo. Siguió sus *cursus* en la Universidad de Columbia, donde ganó la Competencia Putnam de Matemáticas a los 16 años y cuatro meses, lo que lo convirtió en uno de los Becarios Putnam más jóvenes de la historia, siéndolo dos veces más durante sus años de licenciatura. Se graduó como el mejor alumno de su clase en 1985. Luego obtuvo su doctorado, en 1987, bajo la supervisión de Benedict Gross y Barry Mazur en la Universidad de Harvard. De 1987 a 1990 fue miembro junior de la Sociedad de Becarios de Harvard.

Trabajo en matemáticas. En 1987, Elkies demostró que una curva elíptica sobre los números racionales es supersingular en infinitos números primos. En 1988 encontró un contraejemplo a la conjetura de la suma de potencias de Euler para cuartas potencias. Su trabajo en estos y otros problemas le valió el reconocimiento y un puesto como profesor asociado en Harvard en 1990. En 1993, fue nombrado profesor titular, a la edad de 26 años. Esto lo convirtió en el profesor titular más joven en la historia de Harvard. Él y Arthur Oliver Lonsdale Atkin ampliaron el algoritmo de Schoof para crear el algoritmo Schoof-Elkies-Atkin (SEA).

Elkies también estudia las conexiones entre la música y la matemática; es miembro del consejo asesor del *Journal of Mathematics and Music*. Ha descubierto muchos patrones nuevos en "El juego de la vida" de John Horton Conway y ha estudiado la matemática de los patrones de naturaleza muerta en esa regla de autómata celular. Es uno de los principales investigadores de la Colaboración Simons sobre geometría aritmética, teoría de números y computación, una gran red de trabajo entre varias universidades que involucra a las universidades de Boston, Brown, Dartmouth, Harvard y el MIT. Elkies es el descubridor (o codescubridor) de muchas curvas elípticas actuales y pasadas que ostentan récords, incluidas la curva con el límite inferior más alto conocido (≥28) en su rango y la curva con el rango exacto más alto conocido (= 20). En agosto de 2024 publicó en una lista de correos Litserv sobre teoría de números que él y Zev Klagsbrun habían encontrado una curva elíptica de rango al menos 29 mediante métodos similares a los utilizados para encontrar el ejemplo de rango 28.

Premios y honores. En 1994, Elkies fue un orador invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos en Zúrich. En 2004, recibió un premio Lester R. Ford y el premio Levi L. Conant. En 2017 fue elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias.

Continúa: "¿Es 'real' el mundo matemático de Platón"

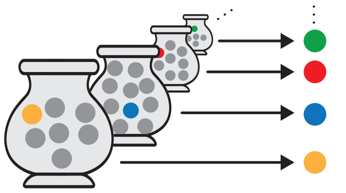
"Volvamos al último teorema de Fermat y a la demostración de Wiles. En el caso mencionado, la comunidad matemática tendría que aceptar la corrección del contraejemplo de X. A partir de entonces, cualquier esfuerzo por parte de Wiles por demostrar la afirmación de Fermat tendría que ser infructuoso, por la sencilla razón de que X había obtenido su argumento primero y en vista de ello, ¡la afirmación de Fermat sería ahora falsa!

Más aún, podríamos plantear la pregunta adicional acerca de si, de acuerdo con la corrección del contraejemplo que iba a dar X, el propio Fermat habría estado necesariamente equivocado al creer en la validez de su 'demostración verdaderamente maravillosa', en el instante en que escribió su nota en el margen. En el punto de vista subjetivo de la verdad matemática hubiera podido darse el caso de que Fermat tuviera una demostración válida (que habría sido aceptada como tal por sus pares en la época, si él la hubiera revelado), ¡y que fue el secretismo de Fermat el que abrió la posibilidad de que X obtuviese más tarde un contraejemplo! Creo que prácticamente todos los matemáticos, con independencia de las actitudes que profesen hacia el 'platonismo', considerarán que tales posibilidades son notoriamente absurdas.

Por supuesto, aún podría darse el caso de que el argumento de Wiles contenga un error y que la afirmación de Fermat fuera en realidad falsa. O que pudiera haber un error fundamental en el argumento de Wiles, pero que la afirmación de Fermat sea en cualquier caso verdadera. O podría ser que el argumento de Wiles sea correcto en sus líneas esenciales, aunque contenga 'pasos no rigurosos' que no superarían el canon de algunas reglas futuras de aceptabilidad matemática. Pero estas cuestiones no abordan el punto que estoy señalando aquí. La cuestión es la objetividad de la propia afirmación de Fermat, y no si la demostración (o la negación) particular de la misma que hiciera alguien podría resultar decisiva para la comunidad matemática de cualquier época concreta.

Habría que mencionar que, desde el punto de vista de la lógica matemática, la afirmación de Fermat es en realidad un enunciado matemático de un tipo particularmente simple, cuya objetividad es especialmente evidente. Solo una pequeñísima minoría de matemáticos consideraría que la verdad de tales afirmaciones es de algún modo 'subjetiva' –aunque podría haber cierta subjetividad acerca de los tipos de argumentos que se considerarían convincentes–. Me doy cuenta de que, en cierto sentido, estoy cayendo en mi propia trampa al hacer una afirmación semejante. No se trata en realidad de si los matemáticos que toman un punto de vista en extremo subjetivo constituyen una pequeñísima minoría o no (y la verdad es que no he realizado una encuesta fiable entre los matemáticos sobre este punto); de lo que se trata es de si una posición tan extrema debe tomarse realmente en serio.

Sin embargo, hay otros tipos de afirmaciones matemáticas cuya verdad podría considerarse plausiblemente como una "cuestión de opinión". Tal vez la más conocida de dichas afirmaciones sea el *axioma de elección*.

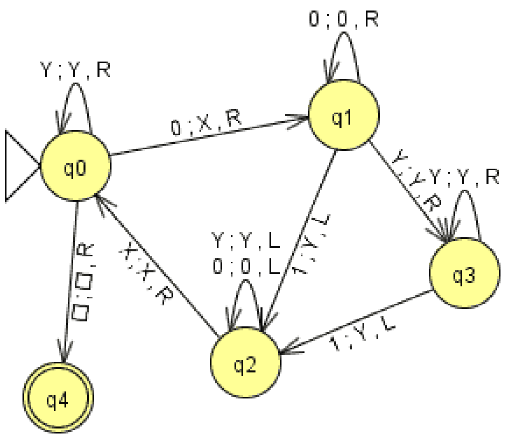


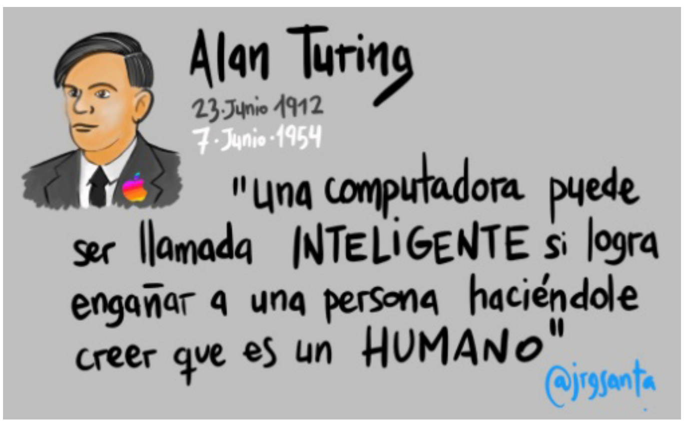
Axioma de elección.

En teoría de conjuntos, el axioma de elección es un axioma que postula que, para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos.

De manera informal, afirma que, dada una colección de 'cajas' con objetos dentro de ellas, es posible elegir un objeto de cada caja. Que este procedimiento puede llevarse a cabo es trivialmente cierto, siempre que dicha familia sea finita, o cuando existe una regla bien determinada que permite 'elegir' un único elemento de cada conjunto de ella. Sin embargo, el axioma es indispensable en el caso más general de una familia infinita arbitraria. Fue formulado en 1904 por Ernst Zermelo para demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado. Aunque originalmente fue controvertido, hoy en día es usado sin reservas por la mayoría de los matemáticos. No obstante, especialmente en la teoría de conjuntos, hay corrientes de opinión que rechazan el axioma o que investigan consecuencias de otros axiomas inconsistentes con él.

No es importante, por el momento, que sepamos qué es el axioma de elección. Aquí lo citamos solo como ejemplo. Probablemente, la mayoría de los matemáticos piensan que el axioma de elección es 'obviamente verdadero', mientras que otros pueden considerarlo una afirmación algo cuestionable que incluso podría ser falsa (y yo mismo me inclino, en cierta medida, hacia este segundo punto de vista). Otros aún podrían tomarlo como una afirmación cuya 'verdad' es una mera cuestión de opinión o, más bien, como algo que puede tomarse de un modo o de otro, dependiendo de a qué sistemas de axiomas y reglas de inferencia (un 'sistema formal', lo analizamos al ver la máquina de Turing y el teorema de Gödel) se adhiera uno.





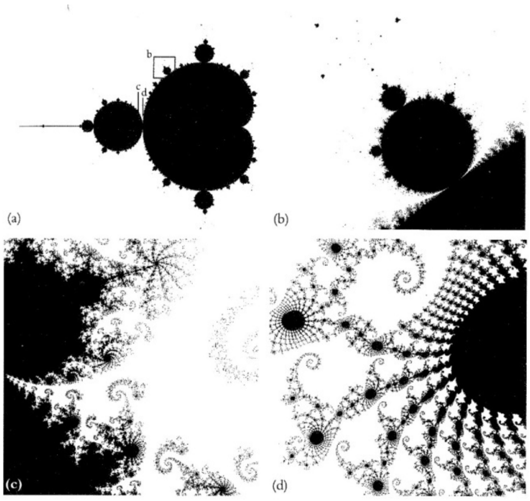
Esquema de la máquina de Turing.

La máquina de Turing es un modelo matemático que simula una computadora idealizada. Los matemáticos que defienden este último punto de vista (pero aceptan la objetividad de la verdad de enunciados matemáticos particularmente nítidos, como la afirmación de Fermat que hemos mencionado antes) serían platonistas relativamente débiles. Aquellos que se adhieren a la objetividad con respecto a la verdad del axioma de elección serían platonistas más fuertes.

El axioma de elección tiene cierta relevancia para la matemática subyacente en el comportamiento del mundo físico, pese al hecho de que no se aborda mucho en la teoría física. Por el momento será mejor que no nos preocupemos demasiado por esta cuestión. Si el axioma de elección puede ser dilucidado en un sentido u otro mediante alguna forma apropiada de razonamiento matemático incuestionable, entonces su verdad es en realidad una cuestión totalmente objetiva, y o bien el axioma pertenece al mundo platónico o bien lo hace su negación, en el sentido en que estoy interpretando este 'mundo platónico'. Si, por el contrario, el axioma de elección es una simple cuestión de opinión o de decisión arbitraria, entonces el mundo platónico de las formas matemáticas absolutas no contiene axioma de elección ni su negación (aunque podría contener afirmaciones de la forma 'tal y cual se sigue del axioma de elección', o 'el axioma de elección es un teorema de acuerdo con las reglas de tal y cual sistema matemático').

Los enunciados matemáticos que pueden pertenecer al mundo de Platón son precisamente aquellos que son objetivamente verdaderos. De hecho, yo consideraría que la objetividad matemática es realmente el objeto del platonismo matemático. Decir que una afirmación matemática tiene una existencia platónica es sencillamente decir que es verdadera en un sentido objetivo. Un comentario similar es aplicable a las nociones matemáticas –tales como el concepto del número 7, por ejemplo, o la regla para la multiplicación de números enteros, o la idea de que cierto conjunto contiene infinitos elementos–, todas las cuales tienen una existencia platónica porque son nociones objetivas. En mi opinión, la existencia platónica es simplemente una cuestión de objetividad y, en consecuencia, no debería verse como algo 'místico' o 'acientífico', pese a que así la consideran algunos.

No obstante, como sucede con el axioma de elección, las preguntas acerca de si debe considerarse o no que cierta propuesta concreta de una entidad matemática tiene una existencia objetiva pueden ser delicadas y a veces muy técnicas. Pese a ello, ciertamente no necesitamos ser matemáticos para apreciar la solidez general de muchos conceptos matemáticos. En la figura de abajo hemos representado varias porciones pequeñas de esa famosa entidad matemática conocida como el *conjunto de Mandelbrot*.

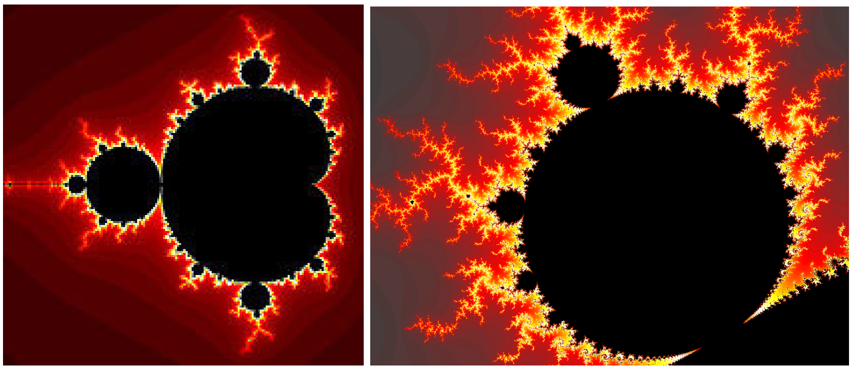


(a) El conjunto de Mandelbrot. (b), (c) y (d) Algunos detalles que ilustran ampliaciones de las regiones correspondientemente marcadas en la figura, aumentadas por factores lineales respectivos 11,6, 168,9 y 1.042.

El conjunto tiene una estructura extraordinariamente complicada, pero no se debe a ningún diseño humano. Lo realmente notable es que esta estructura está definida por una regla matemática particularmente simple. Llegaremos a ella explícitamente más adelante, pues nos distraeríamos de nuestros propósitos actuales si tratase ahora de ofrecer esta regla en detalle.

El punto que deseo señalar es que nadie, ni siquiera el propio Mandelbrot cuando vio por primera vez los increíbles tropiezos en los detalles finos del conjunto, tuvo ninguna preconcepción real de la asombrosa riqueza del conjunto. El conjunto de Mandelbrot no fue invención de ninguna mente humana: sencillamente, está ahí de manera objetiva, en la propia matemática. Si tiene significado atribuir una existencia real al conjunto de Mandelbrot, entonces dicha existencia no está dentro de nuestras mentes, pues nadie puede abarcar por completo la inacabable variedad y la ilimitada complejidad del conjunto.

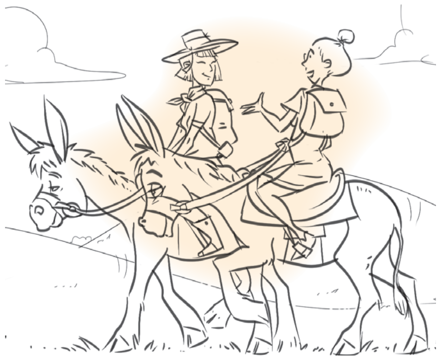
Y su existencia tampoco puede residir dentro de la multitud de representaciones gráficas impresas por un computador que empiezan a captar algo de su increíble sofisticación y detalle, pues, en el mejor de los casos, tales representaciones gráficas recogen tan solo una sombra de una aproximación al propio conjunto. Pese a todo, tiene una solidez que está más allá de cualquier duda, pues la misma estructura se revela –en todos sus detalles perceptibles, con finura cada vez mayor cuanto más de cerca se examina– independientemente del matemático o computador que la examine. Su existencia solo puede estar dentro del mundo platónico de las formas matemáticas. El conjunto de Mandelbrot es un fractal que se obtiene al iterar una función en el plano complejo, tal como lo desarrollamos en las *Leñitas Geométricas* de temporadas anteriores. Es un conjunto de valores de c para los que la órbita del punto crítico permanece acotada.



Conjunto o fractal de Mandelbrot, con un detalle a la derecha.

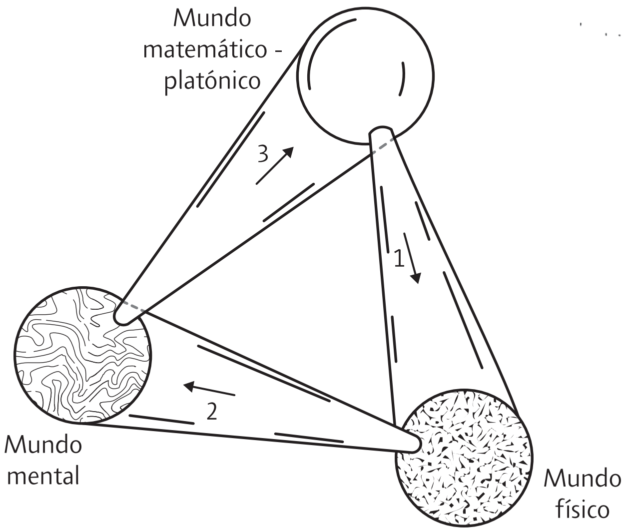
Soy consciente de que aún habrá muchos lectores que encuentren difícil atribuir cualquier tipo de existencia real a las estructuras matemáticas. Rogaría que amplíen su idea de lo que la palabra 'existencia' puede significar. Las formas matemáticas del mundo de Platón no tienen evidentemente el mismo tipo de existencia que los objetos físicos ordinarios tales como las mesas y las sillas. No tienen localización espacial; no existen en el tiempo. Hay que pensar en las nociones matemáticas objetivas como entidades intemporales, y no debe considerarse que nacieron en el instante en que fueron humanamente percibidas por primera vez. Las espirales concretas del conjunto de Mandelbrot que se muestran en las partes c) o d) de a) en la primera imagen fractal no alcanzaron su existencia en el instante en que se vieron por primera vez en la pantalla o la impresora de una computadora.

Ni surgieron cuando la idea general que hay tras el conjunto de Mandelbrot fue propuesta por primera vez por un ser humano –no por Mandelbrot, tal como sucedió, sino por R. Brooks y J. P. Matelski, en 1981, o quizá antes–. Pues ciertamente ni Brooks ni Matelski, ni siquiera al principio el propio Mandelbrot, tenían ninguna concepción real de los diseños detallados y complicados que vemos en las figuras. Dichos diseños ya 'existían' desde el principio de los tiempos, en el sentido potencial e intemporal con que necesariamente se iban a revelar en la forma exacta en que hoy los percibimos, con independencia de qué momento o qué lugar eligiera cualquier ser perceptivo para examinarlos".



Tres mundos y tres profundos misterios

"Así pues, la existencia matemática es diferente no solo de la existencia física, sino también de una existencia que es atribuida por nuestras percepciones mentales. Pese a todo, hay una conexión misteriosa y profunda con cada una de esas otras dos formas de existencia: la física y la mental.



Primera figura de análisis. Tres "mundos" –el matemático-platónico, el físico y el mental– y los tres profundos misterios en las conexiones entre ellos.

La figura anterior muestra de manera esquemática estas tres formas de existencia –la física, la mental y la matemático-platónica– como entidades que pertenecen a tres 'mundos' separados, representados esquemáticamente como esferas. También están indicadas las misteriosas conexiones entre los mundos, y al dibujar el diagrama hemos impuesto algunas creencias, o prejuicios, acerca de tales misterios.

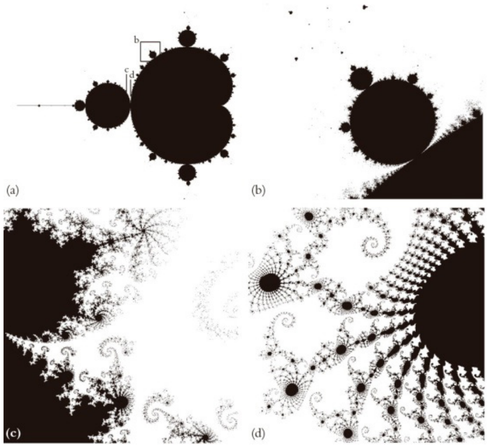
Con respecto al primero de esos misterios –que relaciona el mundo matemático-platónico con el mundo físico–, puede advertirse que estamos admitiendo que solo una pequeña parte del conjunto de la matemática tiene que tener relevancia para el funcionamiento del mundo físico. Sucede ciertamente que la gran mayoría de las actividades actuales de los matemáticos puros no tienen una conexión obvia con la física, ni con ninguna otra ciencia, aunque con frecuencia nos veamos sorprendidos por aplicaciones importantes e inesperadas. Análogamente, en relación con el segundo misterio, por el que la mentalidad entra en asociación con ciertas estructuras físicas (más concretamente, los cerebros humanos vivos, sanos y despiertos), no estamos insistiendo en que la mayoría de las estructuras físicas tengan que inducir mentalidad. Aunque el cerebro de un gato puede evocar realmente cualidades mentales, no estoy exigiendo lo mismo de una piedra. Por último, respecto al tercer misterio, ¡consideramos evidente que solo una pequeña fracción de nuestra actividad mental tiene que estar interesada en la verdad matemática absoluta!

Es más probable que estemos interesados en las múltiples irritaciones, placeres, preocupaciones, emociones y sensaciones por el estilo que llenan nuestras vidas cotidianas. Estos tres hechos están representados en el pequeño tamaño de la base de la conexión de cada mundo con el siguiente, tomando los mundos del diagrama en el sentido de las agujas del reloj. Sin embargo, es en el hecho de englobar cada mundo entero dentro del ámbito de su conexión con el mundo que le precede donde estoy mostrando mis propios prejuicios.

Así pues, según la primera figura de análisis, todo el mundo físico se representa gobernado de acuerdo con leyes matemáticas. Veremos luego que hay una evidencia muy fuerte (aunque incompleta) que apoya esta opinión. Desde este punto de vista, todo lo que hay en el universo físico está realmente gobernado en todos sus detalles por principios matemáticos, quizá por ecuaciones, tales como las que trataremos en adelante, o quizá por algunas nociones matemáticas futuras fundamentalmente diferentes de aquellas que hoy etiquetamos con el término *ecuaciones*. Si esto es así, entonces incluso nuestras propias acciones físicas estarían enteramente sujetas a semejante control matemático último, donde 'control' podría admitir todavía cierto comportamiento aleatorio gobernado por principios probabilistas estrictos.

Muchas personas se sienten incómodas con este tipo de ideas, y debo confesar que a mí también me producen cierta desazón. De todas formas, mis prejuicios personales están realmente a favor de un punto de vista de este carácter general, puesto que es difícil ver cómo podría trazarse una línea que separe las acciones físicas bajo control matemático de aquellas que pudieran estar más allá de él. A mi modo de ver, la desazón que muchos puedan compartir conmigo acerca de esta cuestión surge en parte de una noción muy limitada de lo que pudiera entrañar el 'control matemático'. Es también parte de nuestro *objetivo para la enseñanza y el aprendizaje* para revelar a los jóvenes algo de la extraordinaria riqueza, del poder y la belleza que pueden brotar una vez que se ha dado con las nociones matemáticas concretas.

Ya en el conjunto de Mandelbrot, tal como se ilustra en las figuras siguientes, que ya analizamos,

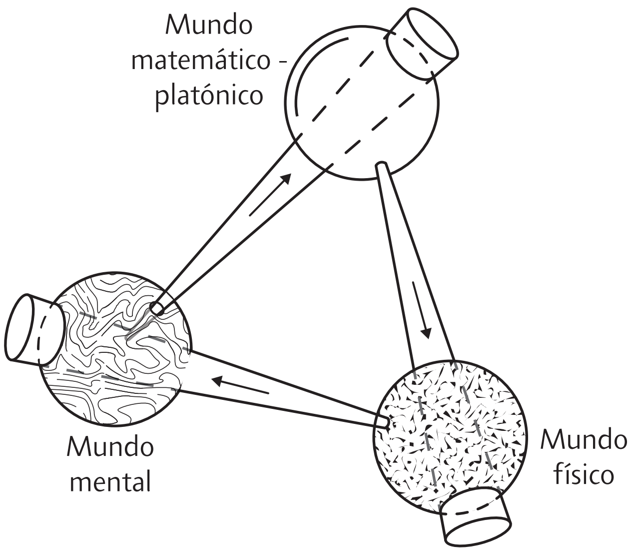


podemos empezar a vislumbrar el alcance y la belleza inherentes a tales objetos. Pero incluso estas estructuras fractales habitan en un rincón muy limitado del conjunto de la matemática, donde el camino está gobernado por un control computacional estricto. Más allá de este rincón, hay una increíble riqueza potencial. ¿Cómo me siento realmente al considerar la posibilidad de que todas mis acciones, y las de mis amigos y estudiantes, estén gobernadas, en última instancia, por principios matemáticos de este tipo? Puedo aceptarlo. De hecho, preferiríamos que estas acciones estuviesen controladas por algo que residiera en algún aspecto semejante del fabuloso mundo matemático de Platón a que estuvieran sujetas al tipo de motivos primarios simples, tales como la búsqueda del placer, la codicia personal o la violencia agresiva, que muchos argumentarán que son las consecuencias de una posición estrictamente científica.

Pese a todo, imagino que muchos seguirán teniendo dificultades para aceptar que tales acciones en el universo puedan estar totalmente atadas a leyes matemáticas. Igualmente, muchos podrán poner objeciones a otros dos de mis prejuicios que están implícitos en la primera figura de análisis de los tres mundos. Podrían pensar, por ejemplo, que estamos adoptando una actitud científica demasiado fría al dibujar un diagrama de una forma que implica que toda mentalidad tiene sus raíces en la fisicidad. Esto es en realidad un prejuicio, pues, aunque es cierto que no tenemos evidencia científica razonable de la existencia de 'mentes' que no tengan una base física, no podemos estar completamente seguros de ello. Más aún, muchas personas con convicciones religiosas defenderán con vehemencia la posibilidad de mentes independientes de lo físico y podrían apelar a lo que ellos consideran evidencia poderosa de un tipo diferente de la que se revela por la ciencia ordinaria.

Otro de mis prejuicios se refleja en el hecho de que en la primera figura de análisis he representado todo el mundo platónico dentro del ámbito de la mentalidad. Con esto pretendo indicar que, al menos en principio, no hay verdades matemáticas que estén más allá del alcance de la razón. Naturalmente, hay enunciados matemáticos (incluso simples sumas aritméticas) que son tan enormemente complicados que nadie podría tener la fuerza mental para llevar a cabo el razonamiento necesario. Sin embargo, tales objetos estarían potencialmente dentro del alcance de la mentalidad (humana), y serían compatibles con el significado de la primera figura de análisis, tal y como hemos pretendido representar. En cualquier caso, uno debe considerar que podría haber otros enunciados matemáticos que están incluso fuera del alcance potencial de la razón, y estos violarían la pretensión que hay tras esa figura. Esta cuestión será considerada más extensamente cuando examinemos la relación con el famoso teorema de la incompletitud de Gödel. Quizá se da aquí la ironía de que un antiplatónico hecho y derecho, que crea que las matemáticas están 'todas en la mente', también debe creer –así parece– que no hay enunciados matemáticos verdaderos que estén en principio más allá de la razón. Por ejemplo, si el último teorema de Fermat hubiera sido inaccesible (en principio) a la razón, entonces esta visión antiplatónica no admitiría la validez de su verdad ni de su falsedad, ya que tal validez solamente viene del acto mental de percibir una demostración o una refutación.

En la segunda figura de análisis diagramada abajo, y como concesión a aquellos que no comparten todos mis prejuicios personales sobre estas cuestiones, he vuelto a dibujar las conexiones entre los tres mundos para admitir las tres posibles violaciones de mis prejuicios. En consecuencia, ahora se tiene en cuenta la posibilidad de acción física más allá del alcance del control matemático. El diagrama admite también la creencia de que pudiera haber mentalidad que no estuviera enraizada en estructuras físicas. Finalmente, permite la existencia de enunciados matemáticos verdaderos cuya verdad es en principio inaccesible mediante la razón y la intuición.



Segunda figura de análisis. Un nuevo dibujo de la figura anterior en el que se admiten violaciones de tres de los prejuicios del autor.

Esta imagen ampliada presenta otros misterios potenciales que van incluso más allá de aquellos que he admitido en mi imagen favorita del mundo, como se representa en la primera figura de análisis. En mi opinión, el punto de vista científico más firmemente organizado de la primera figura tiene suficientes misterios. Estos misterios no desaparecen al pasar al esquema más relajado de la segunda figura, pues sigue siendo un profundo enigma por qué tendrían que aplicarse las leyes matemáticas al mundo físico con tan extraordinaria precisión. Vislumbraremos algo de la extraordinaria exactitud de las teorías físicas básicas en los campos clásicos de Maxwell y Einstein, teoría cuántica de los campos y el Big Bang y su legado termodinámico.

Además, no es solo la precisión, sino también la sofisticación sutil y la belleza matemática de estas acertadas teorías lo que es profundamente misterioso. Asimismo, hay un profundo e indudable misterio en cómo puede llegar a suceder que la materia física adecuadamente organizada –y aquí me refiero en concreto a cerebros humanos (o animales) vivos– pueda evocar de algún modo la cualidad mental del conocimiento consciente. Por último, hay también un misterio en cómo percibimos la verdad matemática. No se trata solamente de que nuestros cerebros estén programados para 'calcular' de manera fiable. Hay algo mucho más profundo que eso en las intuiciones que incluso los más humildes de entre nosotros tenemos cuando apreciamos, por ejemplo, los significados reales de los términos 'cero', 'uno', 'dos', 'tres', 'cuatro', etcétera.

Algunas de las cuestiones que surgen en conexión con este tercer misterio serán objeto de nuestro interés: los cardinales de Cantor en la física, la máquina de Turing y el teorema de Gödel, en relación con la noción de demostración matemática. Pero el impulso principal que tenemos se vincula con el primero de estos misterios: la notable relación entre la matemática y el comportamiento real del mundo físico. No se puede alcanzar una apreciación adecuada del extraordinario poder de la ciencia moderna sin poseer al menos cierta familiaridad con estas ideas matemáticas. Sin duda, muchos pueden asustarse ante la perspectiva de tener que entender semejante matemática para llegar a esta apreciación. Pese a todo, somos optimistas, y creo que quizá se darán cuenta de que estas cosas no son tan terribles, ni mucho menos con un profesorado que sepa conducirlo. Más aún, esperamos poder persuadir de que, pese a lo que hayan podido creer previamente, ¡las matemáticas pueden ser divertidas!

Aquí no me interesaré especialmente por el segundo de los misterios mostrados en ambas figuras de análisis, a saber, la cuestión de cómo la mentalidad –más en concreto, el conocimiento consciente– puede darse en asociación con estructuras físicas apropiadas. Tendremos ocupación más que suficiente en la exploración del universo físico y sus leyes matemáticas asociadas. Por otra parte, las cuestiones relativas a la mentalidad son intensamente controvertidas y si nos concentráramos en ellas, nos distraerían del objetivo.

Sin embargo, quizá no esté de más hacer algún comentario. En mi opinión, se trata de que haya pocas posibilidades de que podamos tener una profunda comprensión de la naturaleza de la mente sin que antes aprendamos mucho más sobre las bases mismas de la realidad física. Como quedará claro en las discusiones que presentaremos en adelante, creo que se requieren revoluciones importantes en nuestra comprensión física. Hasta que no se hayan producido tales revoluciones, es muy optimista esperar que puedan hacerse demasiados progresos reales en la comprensión de la naturaleza real de los procesos mentales".

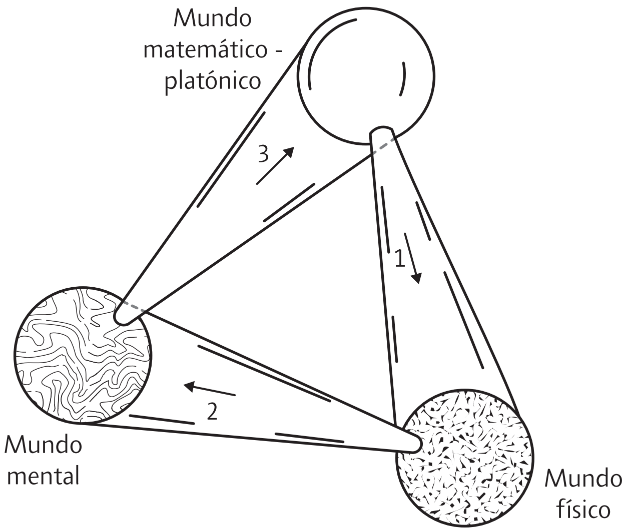
Lo bueno, lo verdadero y lo bello

"En relación con esto, hay otra serie de cuestiones planteadas por las dos figuras de análisis. He tomado la noción de Platón de un 'mundo de formas ideales' solo en el sentido limitado de formas matemáticas. La matemática se interesa crucialmente en el ideal concreto de verdad. El propio Platón habría insistido en que hay otros dos ideales fundamentales y absolutos, a saber, los de lo *bello* y lo *bueno*. No me niego, ni mucho menos, a admitir la existencia de tales ideales y a permitir que se amplíe el mundo platónico para contener absolutos de esta naturaleza.

De hecho, más adelante encontraremos algunas notables interrelaciones entre verdad y belleza que iluminan y confunden a la vez las cuestiones del descubrimiento y la aceptación de las grandes teorías físicas del siglo XX. Más aún, aparte del indudable (aunque a menudo ambiguo) papel de la belleza en las matemáticas subyacentes en las acciones del mundo físico, los criterios estéticos son fundamentales para el desarrollo de ideas matemáticas por sí mismas, al aportar tanto el impulso hacia el descubrimiento como una poderosa guía a la verdad. Incluso, conjeturaría que un elemento importante en la convicción común que tienen los matemáticos de que un mundo platónico externo tiene una existencia independiente de nosotros mismos procede de la extraordinaria e inesperada belleza oculta que tan a menudo revelan las ideas mismas.

De relevancia menos obvia aquí –pero de evidente importancia en un contexto más amplio– es la cuestión de un ideal absoluto de moralidad: ¿qué es bueno y qué es malo, y cómo perciben nuestras mentes dichos valores? La moralidad tiene una profunda conexión con el mundo mental, puesto que está íntimamente relacionada con los valores asignados por seres conscientes y, lo que es más importante, con la presencia misma de la propia consciencia. Es difícil ver qué podría significar la moralidad en ausencia de seres conscientes. A medida que progresan la ciencia y la tecnología, se hace cada vez más relevante una comprensión de las circunstancias físicas bajo las que se manifiesta la mentalidad. Creo que en la cultura tecnológica de hoy día es más importante que nunca que las cuestiones científicas no se separen de sus implicaciones morales. Pero estas cuestiones nos alejarían demasiado del alcance inmediato de nuestro objetivo. Necesitamos abordar la cuestión de separar lo verdadero de lo falso antes de que podamos intentar de forma adecuada una aplicación de tal comprensión a separar el bien del mal.

Por último, hay otro misterio concerniente a la primera figura de análisis (que reproducimos nuevamente a continuación) que he dejado para el final.



Primera figura de análisis de los tres mundos.

He dibujado deliberadamente la figura para ilustrar una paradoja. ¿Cómo es posible que, de acuerdo con mis prejuicios, cada mundo parezca englobar al siguiente en su totalidad? No creo que esto sea una razón para abandonar mis prejuicios, sino meramente para demostrar la presencia de un misterio aún más profundo que trasciende a aquellos que he señalado antes. Quizás haya un sentido en el que los tres mundos no sean en absoluto independientes, sino que simplemente reflejen, individualmente, aspectos de una verdad más profunda sobre el mundo como un todo de la que tenemos muy poca idea en el momento presente. Tenemos un largo camino que recorrer antes de que tales cuestiones puedan ser iluminadas adecuadamente.

Me he permitido alejarme demasiado de las cuestiones centrales que nos interesarán. El objetivo principal de este apartado ha sido el de acentuar la importancia capital que tienen las matemáticas en la ciencia, tanto antigua como moderna. Echaremos luego una ojeada al mundo de Platón, al menos a una parte relativamente pequeña pero importante de dicho mundo, de especial relevancia para la naturaleza de la realidad física".

No lejos del tema *Una opinión interesante publicada en el diario La Nación*

No me digan que la IA compone música

Por Héctor M. Guyot

Días pasados, uno de los periodistas de investigación más destacados del país me contaba la forma en que la inteligencia artificial lo está ayudando en su trabajo. Aplicada sobre un vasto universo de datos que había reunido transpirando la camiseta, la IA le permitía, sobre la base de distintos requerimientos, combinaciones de esos datos de lo más variadas, muchas de las cuales abrían perspectivas reveladoras en términos periodísticos. La confirmación de hipótesis que antes le habrían llevado días de intenso trabajo llegaba ahora en cuestión de segundos. Imaginé la inteligencia artificial como una suerte de prótesis potentísima de nuestra capacidad analítica. La mente es limitada. Puede procesar una determinada cantidad de datos. La IA rompe esos límites y nos permite trazar con esos datos configuraciones antes inimaginables.

↓

Me pareció maravilloso. Pero enseguida un segundo pensamiento me infundió un soplo de pavor. La IA trabaja de acuerdo con una lógica basada en la estadística a partir de la información contenida en la nube. Para ella, todo es dato y es dato lo que devuelve. Así actúan incluso los *chatbots*, aunque sus respuestas adopten una forma coloquial. La IA puede entonces ofrecer un gran servicio en actividades que requieren del costado analítico de la mente humana. En este aspecto, incluso podrían extender el poder de esa mente hasta límites insospechados. ¿Qué tiene de malo eso? Nada, salvo que nos haga olvidar el otro costado de nuestra mente, que implica una forma de ver y pensar el mundo diferente, acaso opuestas. Creo que hay allí un riesgo: los algoritmos y su lógica se han convertido en un factor omnipresente pero invisible en nuestra vida diaria, y avanzan a paso redoblado sobre ese otro hemisferio de nuestra mente hoy un poco relegado, aquel inclinado a la imaginación, a la narración, a la contemplación, aquel que nos lleva a mirar por encima o por detrás de los datos para encontrar sentido.

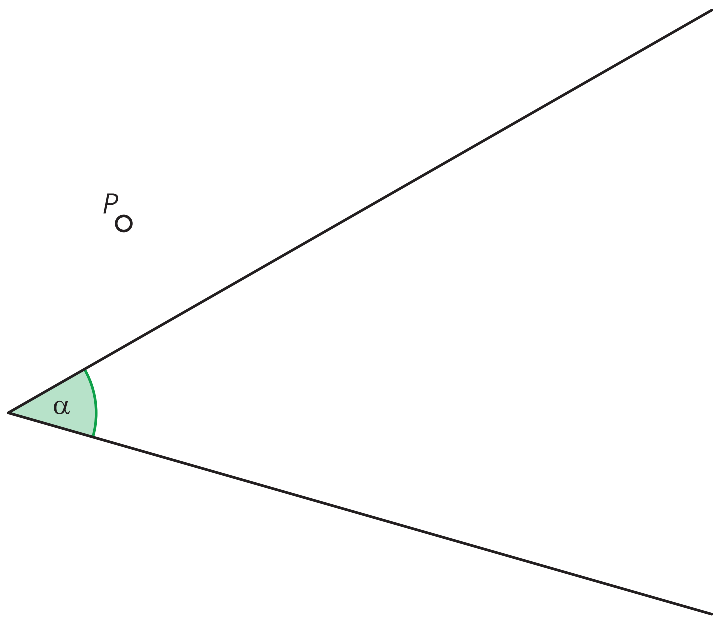
La discusión sobre la IA se ha puesto álgida, quizá porque nos devuelve a las preguntas esenciales. ¿Qué somos? En *Helgoland*, un libro interesantísimo sobre física cuántica, Carlo Rovelli sostiene que el yo, la conciencia, no es una entidad separada de nuestro cuerpo físico. "¿Quién es el 'yo' que experimenta la sensación de sentir, sino el conjunto integrado de nuestros procesos mentales?", escribe. Es decir, no hay una mente o una conciencia separadas de la función cerebral. Al diablo con la metafísica. Desde esta perspectiva, la distancia entre nuestra mente y la mente digital se acorta. Podríamos pensar en una continuidad entre nuestro sistema cerebral y la red neuronal de los algoritmos. En lo personal, sin embargo, creo que hay algo que está más allá de la función cerebral. No sé lo que es, pero hace que la vida sea un misterio. Siempre creí en el poder de la metáfora, es decir, el recurso de nombrar esto para denotar aquello liberándonos de los límites de la literalidad. Los datos son literales, unívocos, pero no agotan la realidad, que resulta insondable. De allí la metáfora.

Lo otro, lo que no es dato, el misterio que somos, es inaccesible para la mente analítica. Acaso también lo sea para la otra, pero al menos es en ella donde reside la conciencia de un posible más allá, y es ella la que sale en su búsqueda a través de la introspección, la contemplación o el arte. Es ella también la que enhebra los hechos en una secuencia para darles la consistencia de una historia, porque es en la creación narrativa donde construimos sentido. Todo esto es intransferible a la mente colmena del orden digital. De tan íntimo, es inefable. Es patrimonio humano. Pero, en una era de pantallas que fragmenta la realidad y endiosa la eficiencia, este patrimonio es vulnerable al afán colonizador de la lógica analítica, cuya hegemonía rompería un necesario equilibrio.

Además, la interpretación del mundo y de lo que somos es resultado de nuestro diálogo personal con la experiencia. Y la vida digital, al evaporar la consistencia de lo real, nos roba la experiencia de a poco. La lógica analítica discrimina, separa. La actitud contemplativa, en cambio, es un acceso a aquella dimensión profunda del ser en la que nos podemos encontrar. Acaso la conflictividad y la polarización crecientes tengan alguna relación con el traslado de la vida a las pantallas. Recuerdo ahora una historia narrada en un libro de un swami indio sobre uno de los primeros encuentros interreligiosos, hace más de cien años. Los religiosos de distintos credos que hacían vida contemplativa, como los monjes, se entendieron muy bien. Los unía la experiencia mística. A los sacerdotes, miembros a una estructura jerárquica, les costó mucho más. Los separaba el dogma.

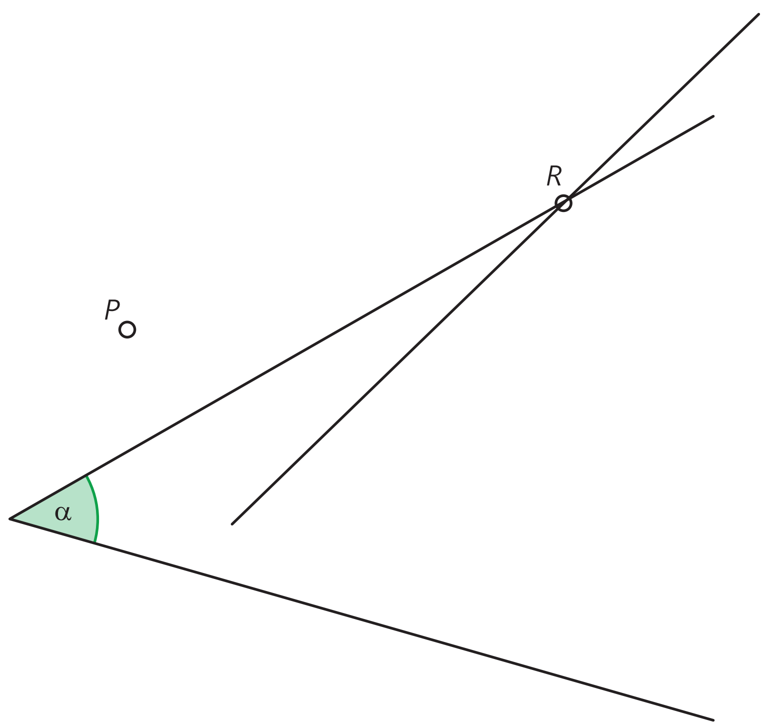
Todo tiene dos caras. La tecnología, también. Bienvenida la ayuda que pueda aportar la IA en distintas actividades humanas. Por ejemplo, la investigación periodística. Pero no me digan que puede componer música o escribir un cuento. Y menos todavía permitan que el tsunami de datos ahogue al costado menos "eficiente" del cerebro, aquel que habilita la introspección y la contemplación. Sería renunciar al sentido.

Hallar los puntos Q y R en los lados del ángulo α tales que PQR sea un triángulo equilátero.

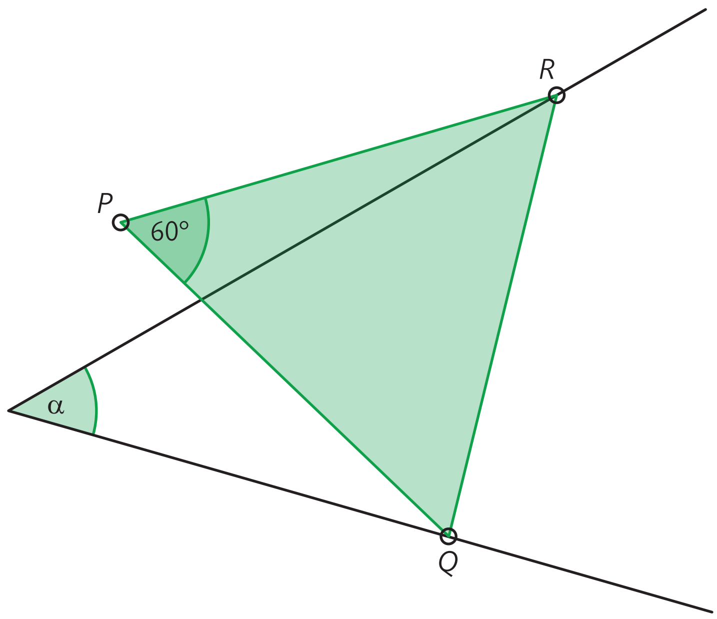


Solución

Si rotamos el lado inferior del ángulo α 60° alrededor del punto P en sentido antihorario:

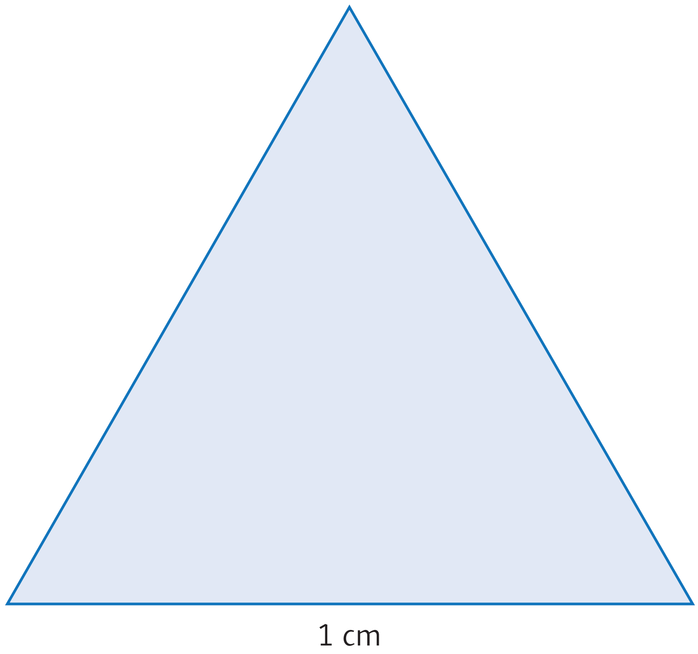


este corta el lado superior del ángulo α en el punto R. Ahora, rotando R alrededor de P 60° en sentido horario, se obtiene el punto Q sobre el lado inferior del ángulo.



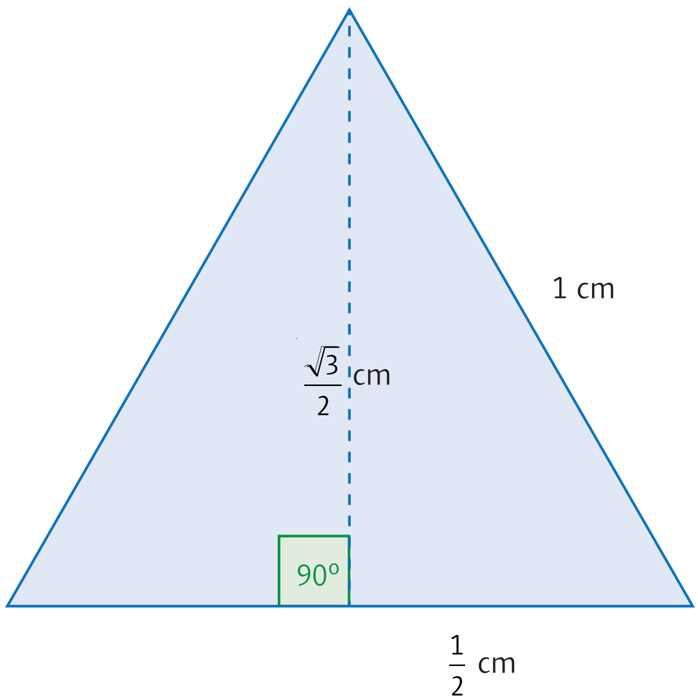
El triángulo PQR es equilátero. Se deja a cargo del lector la justificación de esta afirmación.

Usando un triángulo equilátero de cartón de 1 cm de lado, dibujar triángulos equiláteros de 2 cm de lado y de $\sqrt{3}$ cm de lado.

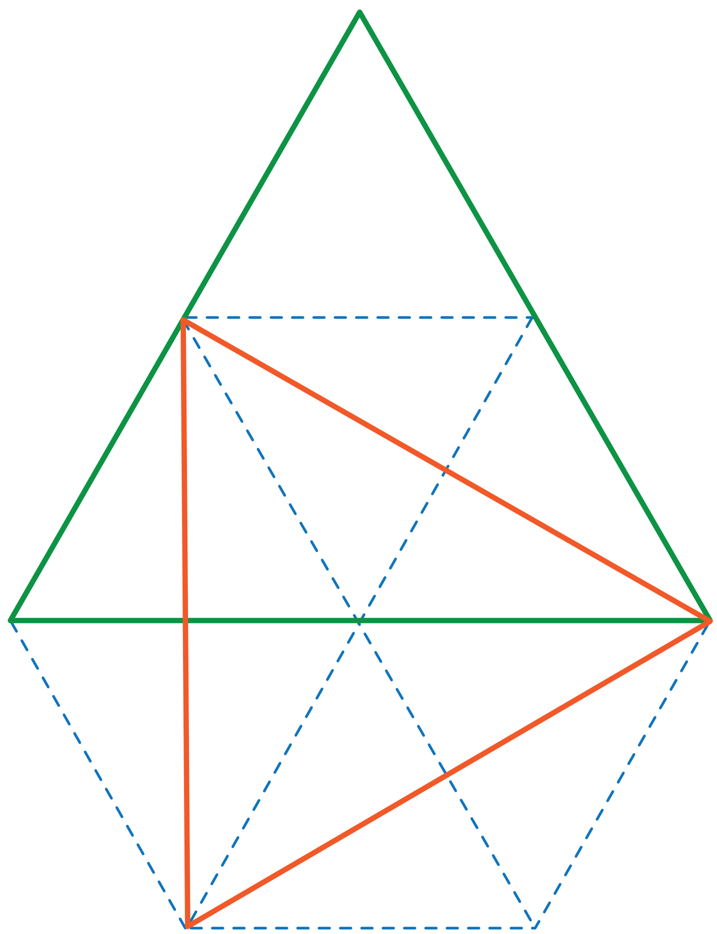


Solución

Usando el *teorema de Pitágoras*, podemos ver que la altura del triángulo mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.



Se dibujan siete triángulos de 1 cm de lado, unidos como muestra la figura:



El triángulo de contorno rojo tiene lados de $\sqrt{3}$ cm y el triángulo de contorno verde tiene lados de 2 cm.