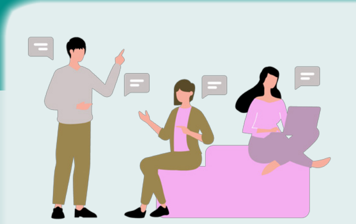
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

7ª época • Nº 2 • 10 de abril de 2025

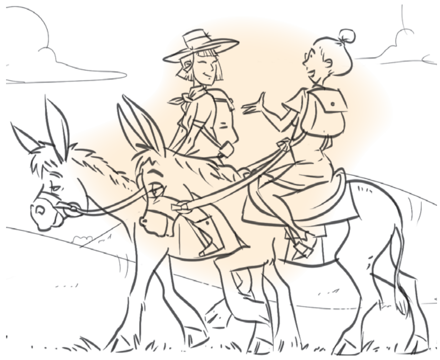


"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?

LA INFINITUD DEL SISTEMA DE NÚMEROS ENTEROS. INDUCCIÓN MATEMÁTICA



1. El principio de inducción matemática

La sucesión de enteros 1, 2, 3, 4, ..., no tiene fin, puesto que después de cada entero n hay uno siguiente, el $n + 1$. Expresaremos esta propiedad diciendo que la sucesión de enteros contiene infinitos enteros. La sucesión de enteros constituye el ejemplo más sencillo y natural del infinito matemático, el cual desempeña un papel dominante en la matemática. A lo largo de nuestra vida necesitaremos manejar colecciones o conjuntos que contienen una infinidad de objetos matemáticos; por ejemplo, el conjunto de todos los puntos de una recta o el conjunto de todos los triángulos de un plano.

La sucesión de enteros es el ejemplo más simple de conjunto infinito. El proceso de ir paso a paso, de n a $n + 1$, que engendra la sucesión infinita de los enteros forma también la base de uno de los tipos fundamentales de razonamiento matemático: *el principio de inducción completa*. La inducción empírica de las ciencias naturales procede de una serie particular de observaciones de un cierto fenómeno para establecer una proporción o ley general que debe regir todas las posibilidades del fenómeno.

El grado de certeza con que se establece esta ley depende del número de observaciones particulares y de confirmaciones del fenómeno. Este tipo de razonamiento inductivo es a menudo plenamente convincente; la predicción de que mañana el Sol hará su salida por el Oriente tiene toda la certeza posible; pero el carácter de esta proposición no es el mismo que el de un teorema probado con razonamientos estrictamente lógicos.

De modo completamente distinto se utiliza la *inducción completa* o matemática para establecer la certeza de un teorema matemático en una sucesión infinita de casos: el primero, el segundo, el tercero, y así de seguido, sin excepción.

Designemos con A una proposición que se refiera a un entero arbitrario n; por ejemplo, A puede ser la proposición: "La suma de los ángulos de un polígono convexo de $n + 2$ lados es n veces 180°". A' puede consistir en la afirmación: "Trazando n rectas en un plano, no se puede dividir este en más de 2^n partes.

Para probar uno de estos teoremas para cualquier entero n no es suficiente probarlo para los 10 o 100, ni aun para los 1 000 primeros valores de n. Este modo de proceder correspondería precisamente a la inducción empírica. En su lugar, debemos usar un método estrictamente matemático y no un razonamiento empírico, cuyo carácter indicaremos en lo que sigue, al probar los ejemplos especiales A y A'. En el caso A sabemos que

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins y Roger Penrose.

para $n = 1$ el polígono es un triángulo, y por geometría elemental se sabe que la suma de sus ángulos es 180°. Para un cuadrilátero, $n = 2$, se traza una diagonal que dividirá al cuadrilátero en dos triángulos.

Entonces se ve de modo inmediato que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de los dos triángulos, lo que da 180º + 180º = 2 · 180º. Procediendo análogamente para el pentágono, $n = 3$, se descompone en un triángulo y un cuadrilátero. Puesto que la suma de los ángulos del último es 2 · 180°, como acabamos de probar, y siendo la suma de los ángulos del triángulo 180°, obtenemos para el pentágono 3 · 180°. Ahora bien: resulta claro que podemos proceder indefinidamente en la misma forma, probando el teorema para $n = 4$; luego, para $n = 5$, y así sucesivamente.

Cada proposición se deduce de la precedente de la misma manera, de modo que el teorema general puede ser establecido para todo n.

Análogamente podemos probar A'; para $n = 1$ es evidente, ya que una recta divide al plano en dos partes. Añadamos una segunda recta. Cada una de las partes anteriores quedará dividida en dos nuevas partes, salvo que la nueva recta sea paralela a la primera. En ambos casos, para $n = 2$ no resultan más de $4 = 2^2$ partes.

Añadamos una tercera recta; cualquiera de las regiones anteriores quedará o bien dividida en dos partes o sin dividir. Así, la suma de partes no podrá ser mayor que $2 \cdot 2^2 = 2^3$. Sabiendo que esto es cierto, podemos probar el caso siguiente en la misma forma, y así indefinidamente.

La idea esencial de los argumentos precedentes consiste en establecer un teorema general A para todos los valores de n, probando seguidamente una sucesión de casos especiales A_1, A_2, … La posibilidad de hacerlo depende de dos hechos:

a) **Existe un método general para probar que si cualquier proposición A_r es cierta, la proposición siguiente, A_{r+1} será también cierta.**

b) **Se sabe que la primera proposición A_1 es cierta. Entonces, todas las proposiciones de la serie: A_1, A_2, A_3, …, deben ser ciertas; es un principio lógico que resulta tan fundamental para la matemática como lo son las reglas clásicas de la lógica aristotélica.**

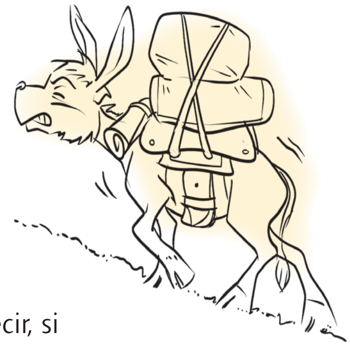
Por ello vamos a enunciarlo explícitamente, como sigue.

Supongamos que queremos establecer una sucesión infinita de proposiciones matemáticas que juntas constituyen una proposición general A_n. Supongamos: a) que por un razonamiento matemático se prueba que, si r es un entero cualquiera, de la verdad de la proposición A se sigue la verdad de la A_{r+1} y b), se sabe que la proposición A_n es cierta. Por lo tanto, todas las proposiciones de la sucesión son ciertas y queda probada A.

No debe haber duda en aceptar esto, del mismo modo que no la tenemos para aceptar las reglas elementales de la lógica ordinaria como un principio del razonamiento matemático, ya que se puede establecer la verdad de cualquiera de las proposiciones A_n partiendo de la aserción b) de que A_1 es cierta, y procediendo por uso repetido de la aserción a) para establecer sucesivamente la verdad de A_1, A_2, A_3, … y así hasta llegar a la proposición A_n. El principio de inducción matemática se basa en el hecho de que después de cada entero r hay un siguiente $r + 1$, y que todo entero n puede ser alcanzado mediante un número finito de pasos, a partir del 1.

Con frecuencia, el principio de inducción matemática se aplica sin mencionarlo explícitamente, o viene indicado simplemente por un "etc." o un "y así sucesivamente". Así sucede, en particular, en la enseñanza elemental. Pero el uso explícito del razonamiento inductivo es indispensable en demostraciones más sutiles. Damos a continuación algunos ejemplos de carácter sencillo, pero no trivial.

2. Progresiones aritméticas



Para todo valor de n, la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ de los n primeros enteros es igual a $n(n+1)$. Para probar este teorema por inducción matemática debemos demostrar que para cualquier n la proposición A_n:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (1)$$

es cierta.

a) Observemos que si r es un entero y si se sabe que la proposición A_r es cierta; es decir, si sabemos que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{1}{2}r \cdot (r+1),$$

sumándole el número $(r + 1)$ a los dos miembros de esta igualdad obtenemos la ecuación

$$1 + 2 + 3 + \ldots + r + (r+1) = \frac{1}{2}r(r+1) + (r+1)\ (r+1) = \frac{1}{2}(r+1)\ (r+2),$$

que es precisamente la proposición A_{r-1}.

b) La proposición A_1 es evidente, ya que $1 = \frac{1}{2} \cdot 2$ De donde, por el principio de inducción matemática, la proposición A_n es cierta para todo n, como se quería demostrar.

Corrientemente se suele probar escribiendo la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ de dos maneras:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

y

$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1.$$

Al sumar, se observa que cada par de números de la misma columna da como suma $n + 1$, y puesto que hay n columnas en total, se sigue

$$2S_n = n(n+1)$$

lo que prueba el resultado indicado.

De (1) se puede deducir de modo inmediato la fórmula de la suma de los $(n + 1)$ primeros términos de cualquier *progresión aritmética*,

$$P_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+nd) = \frac{1}{2}(n+1)(2a+nd) \qquad (2)$$

Puesto que

$$P_n = (n + 1)a + (1 + 2 + \ldots + n)d = (n + 1)a + \frac{1}{2}n(n + 1)d =$$

$$= \frac{2(n+1)a+n(n+1)d}{2} = \frac{1}{2}(n + 1)\,(2a + nd).$$

Para el caso $a = 0$ y $d = 1$, esta fórmula es la misma (1).

3. Progresiones geométricas

Se pueden estudiar las progresiones geométricas de modo análogo al precedente. Probaremos que para todo valor de n se tiene

$$G_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad (3)$$

(Suponemos $q \neq 1$, ya que de otro modo el último miembro de (3) no tendría significado.) La proposición es cierta para $n = 1$, ya que entonces

$$G_r = a + aq = \frac{a(1-q^2)}{1-q} = \frac{a(1+q)(1-q)}{1-q} = a(1+q).$$

Y si suponemos que se tiene

$$G_n = a + aq + \ldots + aq^r = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q}$$

resulta como consecuencia

$$G_{r+1} = (a + aq + \ldots + aq^r) + aq^{r+1} = G_r + aq^{r+1} = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q} + aq^{r+1} =$$

$$= a\frac{(1-q^{r+1}) + aq^{r+1}(1-q)}{1-q} = a\frac{1-q^{r+1}+q^{r+1}-q^{r+2}}{1-q} = a\frac{1-q^{r+2}}{1-q}.$$

Pero esto es precisamente la proposición (3) para el caso $n = r + 1$, lo que completa la demostración. En los libros elementales, la prueba habitual procede como sigue. Pongamos

$$G_n = a + aq + \ldots + aq^n,$$

y multipliquemos los dos miembros por q. Se obtiene

$$qG_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n+1}.$$

Restando entonces los miembros correspondientes de las dos igualdades, resulta

$$G_n - qG_n = a - aq^{n+1}.$$

$$(1 - q)G_n = a(1 - q^{n+1}),$$

$$G_n = a\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}.$$

4. Suma de los n primeros cuadrados

Otra interesante aplicación del principio de inducción se refiere a la suma de los n primeros cuadrados. Mediante ensayos directos se encuentra, al menos para valores pequeños de n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (4)$$

y se supone que esta fórmula pueda ser válida para todos los enteros n. Para probarlo, haremos uso de nuevo del principio de inducción. Comenzaremos por observar que si la proposición A_n, que en este caso coincide con la ecuación (4), es válida para el caso $n = r$, de modo que se tenga

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6},$$

sumando $(r + 1)$ a los dos miembros de esta igualdad se obtiene

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + r^2 + (r+1)^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} + (r+1)^2 =$$

$$= \frac{r(r+1)(2r+1)+6(r+1)^2}{6} = \frac{(r+1)[r(2r+1)+6(r+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(r+1)(2r^2+7r+6)}{6} = \frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6},$$

que es precisamente la proposición A_{r+1} en el caso presente, puesto que se obtiene sustituyendo n por $r + 1$ en (4). Para completar la demostración necesitamos únicamente observar que la proposición A_1, en este caso la ecuación

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

es evidente. Por tanto, la ecuación (4) es válida para cualquier n.

Fórmulas análogas pueden hallarse para potencias superiores de los enteros $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, donde k es un entero positivo cualquiera. Como ejercicio, podemos probar, mediante inducción matemática, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (5)$$

Debe observarse que, si bien el principio de inducción matemática es suficiente para probar la fórmula (5) una vez que se la conoce, la demostración no da indicación alguna sobre el modo en que dicha fórmula puede encontrarse; es decir, sobre el por qué debe suponerse la expresión $[n(n + 1)/2]^2$ como resultado para la suma de los n primeros cubos, en vez de la $[n(n + 1)/3]^2$ o $\frac{1}{2}(19n^2 - 41n + 24)/2$ o cualquiera de las infinitas expresiones análogas que pudieran ser consideradas.

El hecho de que la demostración de un teorema consista en la aplicación de ciertas reglas sencillas de lógica no disminuye el valor del elemento creador en matemáticas, el cual desempeña su papel en la elección de las posibilidades que deban ser tenidas en cuenta. La cuestión del origen de la hipótesis (5) pertenece a un dominio en el cual no pueden ser dadas reglas generales; ensayos, analogías e intuición constructiva tienen en esto un papel importante. Pero una vez formulada correctamente la hipótesis, el principio de inducción matemática es con frecuencia suficiente para dar la demostración. En tanto que una demostración no proporcione una indicación para el acto del descubrimiento, debe llamarse más propiamente una *comprobación*.

5. Una desigualdad importante

En otro capítulo haremos uso de la desigualdad

$$(1 + p)^n \geq 1 + np, \qquad (6)$$

que es válida para todo número $p > -1$ y todo entero positivo n. (Con objeto de dar mayor generalidad, anticipamos aquí el uso de números negativos no enteros admitiendo como p cualquier número mayor que -1. La demostración en el caso general es exactamente la misma que en el caso en que p es un entero positivo.) Usaremos de nuevo la inducción matemática.

a) Si es cierto que $(1 + p)^r \geq 1 + rp$, multiplicando los dos miembros de esta desigualdad por el número positivo $1 + p$ se obtiene

$$(1 + p)^{r+1} \geq 1 + rp + p + rp^2.$$

Si prescindimos del término positivo rp^2, se tendrá

$$(1 + p)^{r+1} \geq 1 + (r + 1)p$$

lo que prueba que la desigualdad (6) vale también para el entero siguiente $r + 1$.

b) Evidentemente, se tiene $(1 + p)^1 \geq 1 + p$. Esto completa la demostración de que (6) es cierta para todo n. La restricción de que $p > -1$ es esencial. Si es $p < -1$, $1 + p$ es negativo y el razonamiento empleado para a) deja de ser válido, puesto que, si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido. (Por ejemplo, si multiplicamos los dos miembros de la desigualdad $3 > 2$ por -1, obtendremos $-3 < -2$.)

6. El binomio de Newton

Con frecuencia es importante tener una expresión explícita para la n-ésima potencia de un binomio $(a + b)^n$.

Mediante cálculo explícito se obtiene:

para $n = 1$, $(a + b)^1 = a + b$;

para $n = 2$, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$;

para $n = 3$, $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

y así sucesivamente. ¿Cuál es la ley general de formación, implícita en la expresión "y así sucesivamente"? Examinemos el proceso mediante el cual calculamos $(a + b)^2$. Puesto que es $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, se obtiene el desarrollo de $(a + b)^2$ multiplicando primero cada término de la expresión $a + b$ por a y luego por b y sumando después. El mismo procedimiento se utilizó para calcular $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$.

Se puede continuar del mismo modo para calcular $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, y así indefinidamente. La expresión de $(a + b)^n$ se obtendría multiplicando cada uno de los términos de la expresión de $(a + b)^{n-1}$, calculada previamente, primero por a y luego por b, y sumando. Esto conduce al diagrama siguiente

Triángulo de pascal	**Potencia de una suma**
1	$(a + b)^0 = 1$
1 1	$(a + b)^1 = 1a + 1b$
1 2 1	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1 3 3 1	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
1 5 10 10 5 1	$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
…	…

el cual da inmediatamente la regla general para formar los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$. Para ello construimos un esquema triangular de números, partiendo de los coeficientes 1, 1 de $a + b$, y de tal modo que cada número del triángulo es la suma de los dos números inmediatos a él en la fila precedente. Esta disposición de los números es conocida con el nombre de *triángulo de Pascal*.

La fila n-esima de este esquema da los coeficientes de desarrollo de $(a + b)^n$ según las potencias decrecientes de a y crecientes de b, así $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Usando una anotación concisa mediante indices y subíndices se pueden representar los números de la n-esima fila del *triángulo de Pascal* por $C_0^n = 1,\ C_1^n, C_2^n, C_3^n, \ldots, C_{n-1}^n, C_n^n = 1$.

Entonces, la fórmula general para $(a + b)^n$ puede escribirse

$$(a+n)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n \qquad (7)$$

y de acuerdo con la ley de formación del triángulo de Pascal, se tiene

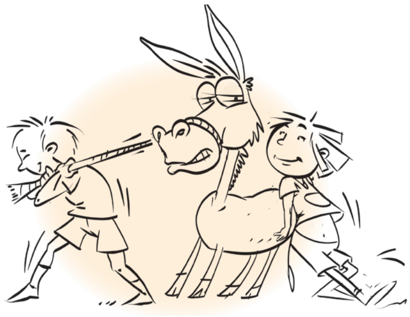
$$C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}. \qquad (8)$$

Como ejercicio, podemos utilizar esta relación, junto con el hecho de que $C_0^1 = C_1^1 = 1$, para probar, mediante inducción matemática, que

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad (9)$$

(Para todo entero positivo n, el símbolo $n!$ –léase *"factorial de n"*– designa el producto de los n primeros enteros: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$. Y resulta conveniente definir también $0!$ por la igualdad $0! = 1$; de este modo (9) es válido para $i = 0$ e $i = n$.

Esta fórmula explícita para los coeficientes del desarrollo binómico se conoce con el nombre de *teorema del binomio*.



Ejercicios de entrenamiento

Demuéstrese por inducción matemática:

1. $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 2}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}.$

2. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}.$

3. $1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}=\dfrac{1-(n+1)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2}.$

4. $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1+q^{2n})=\dfrac{1-nq^{2^{n+1}}}{1-q}.$

Hállese la suma de las siguientes progresiones geométricas:

5. $\dfrac{1}{(1+x^2)}+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(1+x^2)^n}.$

6. $1+\dfrac{x}{(1+x^2)}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}.$

7. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^n.$

Utilizando las fórmulas (4) y (5), pruébese:

8. $1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2=\dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$

9. $1^3+3^3+\ldots+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1).$

10. Demuéstrense los mismos resultados directamente por inducción matemática.

7. Algunas observaciones a propósito de la inducción matemática

El principio de inducción matemática puede modificarse un poco y adoptar la siguiente forma:

"Si una sucesión de proposiciones $A_s, A_{s+1}, A_{s+2}, \ldots$ donde s es un entero positivo, es tal que:

a) para todo valor de $r \geq s$, de la verdad de A_r se sigue la verdad de A_{r+1} y

b) se sabe que A_s es cierta;

entonces, todas las proposiciones $A_s, A_{s+1} \ldots$, son ciertas; es decir, A_n es cierta para todo $n \geq s$.

Se aplica aquí el mismo razonamiento utilizado para establecer la validez del principio ordinario de inducción matemática, con la única variante de sustituir la sucesión 1, 2, 3… por la sucesión análoga $s, s+1, s+2, \ldots$ Usando el principio en esta forma, se puede precisar más la desigualdad (6) eliminando la posibilidad del signo =. Se puede probar que: para todo $p \neq 0$ y $p > -1$ y para todo entero $n \geq 2$,

$$(1+p)^n > 1+np. \qquad (10)$$

Dejamos la demostración para hacerla después. Estrechamente ligado con el principio de inducción matemática está el llamado *principio del menor entero*, el cual establece que todo conjunto C, no vacío, de números enteros positivos contiene un entero menor que todos los demás.

Un conjunto vacío es aquel que no contiene elementos; por ejemplo, el conjunto de las circunferencias rectilíneas o el conjunto de los enteros n tales que $n > n$. Por razones obvias excluimos tales conjuntos de nuestro principio. El conjunto C puede ser finito, tal como el conjunto 1, 2, 3, 4, 5, o infinito, como el conjunto de todos los números pares 2, 4, 6, 8, 10, ... Cualquier conjunto C, no vacío, debe contener cuando menos un entero, por ejemplo, el n, y entonces el más pequeño de los enteros 1, 2, 3, ..., n que pertenezca a C será el menor de los enteros contenidos en C.

Para comprender bien el significado de este principio se debe observar que deja de ser cierto si se aplica a cualquier conjunto C de números que no sean enteros; por ejemplo, el conjunto de fracciones positivas 1, 1/2 1/3, ... $1/n$ no contiene una fracción menor que todas las demás, no contiene un mínimo.

Desde el punto de vista de la lógica es interesante observar que el principio del menor entero puede ser utilizado para demostrar el principio de inducción matemática como un teorema. Con tal objeto, consideremos cualquier sucesión de proposiciones A_1, A_2, A_3, … tales que:

a) Para todo entero positivo r, la verdad de A_{r+1} se sigue de la de A_r.

b) Se sabe que A_1 es cierta.

Probaremos que la hipótesis de que cualquier A sea falsa es absurda. Pues si alguna de las A fuese falsa, el conjunto C de todos los enteros positivos n para los cuales fuera falsa A_n sería un conjunto no vacío. Por el principio del menor entero, C contendría un entero p más pequeño que todos los demás, y p debería ser > 1 a causa de b). Por tanto, se tendría que A_p sería falsa mientras que A_{p-1} sería cierta; pero esto contradice a).

Una vez más, insistimos en que el principio de inducción matemática es completamente diferente de la inducción empírica de las ciencias naturales. La confirmación de una ley general en cualquier número finito de casos, por grande que sea dicho número, no suministra una demostración de la ley en el sentido matemático riguroso, y esto aunque no sea conocida excepción alguna. Tal ley quedará únicamente como una hipótesis plausible, sujeta siempre a modificaciones por los resultados de ulteriores experiencias.

En matemáticas, una ley o un teorema quedan probados únicamente cuando se demuestra que son una consecuencia lógicamente necesaria de ciertos supuestos admitidos como válidos. Existen varios ejemplos de proposiciones matemáticas que han sido comprobadas en todos los numerosos casos particulares estimados, pero que hasta la fecha no han sido demostradas en general. Se puede sospechar que un teorema es cierto en general si resulta cierto en un número de ejemplos; entonces cabe intentar probarlo mediante la inducción matemática. Si el intento tiene éxito, el teorema queda demostrado; si se fracasa, el teorema puede ser cierto o falso y algún día podrá, posiblemente por otros métodos, ser aprobado o rechazado.

Al usar el principio de inducción matemática, se debe estar seguro de que las condiciones a) y b) están efectivamente satisfechas. Descuidar esta precaución puede conducir a absurdos como el que sigue (invitamos al lector a que descubra el error en el razonamiento).

"Probaremos" que dos enteros positivos cualesquiera son iguales; por ejemplo, que 5 = 10. Comenzamos con una definición: si a y b son dos enteros positivos desiguales, definimos como máx. (a, b) aquel de los dos que sea mayor: si es $a = b$ pondremos máx. $(a, b) = a = b$.

Así, máx. (3, 5) = máx. (5, 3) = 5, mientras que máx. (4, 4) = 4 . Sea ahora A_n la proposición: "Si a y b son dos enteros positivos cualesquiera, tales que máx. $(a, b) = n$ se tiene $a = b$.

a) Supongamos que A_r es cierta. Sean a y b dos enteros positivos cualesquiera, tales que máx. $(a, b) = r + 1$. Consideremos los dos enteros

$$\alpha = a - 1$$

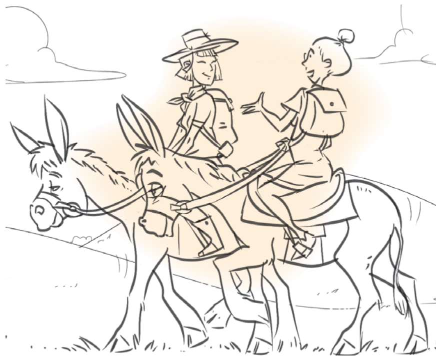
$$\beta = b - 1;$$

se tendrá entonces: máx. $(\alpha, \beta) = r$. De aquí resulta $\alpha = \beta$, puesto que suponíamos que A_r es cierta. De donde se sigue $a = b$; en consecuencia, A_{r+1} es cierta.

b) A_1 es evidentemente cierta, pues si es máx. $(a, b) = 1$ se tendrá, ya que suponemos a y b enteros positivos, que estos dos números deben ser iguales a 1. Por lo tanto, en virtud de la inducción matemática, A_n es cierta para todo n. Ahora, si a y b son dos enteros positivos cualesquiera, designemos máx. (a, b) por r. Puesto que hemos probado que A_n es cierta para todo n, se tendrá en particular que A_r es cierta. En consecuencia $a = b$.

II. Dialogando con los pofesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



LOS NÚMEROS PITAGÓRICOS Y EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

Una interesante cuestión de la teoría de números se halla relacionada con el teorema de Pitágoras. Los griegos sabían que un triángulo con lados 3, 4, 5, es un triángulo rectángulo. Se presentaba entonces la cuestión general: "¿Qué otros triángulos rectángulos tienen sus lados iguales a múltiplos enteros de la unidad de longitud?". El teorema de Pitágoras se expresa algébricamente por la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (1)$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c, la de la hipotenusa. El problema de hallar todos los triángulos rectángulos con lados de longitud entera es equivalente al de hallar las soluciones enteras de la ecuación (1). Una terna de dichos números se llama *terna de números pitagóricos*.

El problema de hallar todas las ternas de números pitagóricos puede resolverse fácilmente. Si a, b y c forman una terna pitagórica, de modo que $a^2 + b^2 = c^2$, pongamos para simplificar $\frac{a}{c} = x, \frac{b}{c} = y$, donde x e y son números racionales para los cuales se verifica $x^2 + y^2 = 1$. Entonces, se tiene $y^2 = (1 - x)(1 + x)$, o, lo que es lo mismo, $y/(1 + x) = (1 - x)/y$. El valor común de los dos miembros de esta ecuación es un número t que puede expresarse como cociente de dos números enteros u/v. Podemos escribir entonces: $y = t(1 + x)$ y $(1 - x) = ty$; es decir,

$$tx - y = -t, \quad x + ty = 1.$$

De este sistema de ecuaciones se deduce inmediatamente

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

y sustituyendo x, y, t por sus valores, se tiene

$$\frac{a}{c} = \frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

Por consiguiente,

$$a = (v^2 - u^2)r,$$

$$b = (2uv)r,$$

$$c = (u^2 + v^2)r, \qquad (2)$$

con un factor arbitrario de proporcionalidad r. Esto prueba que si (a, b, c) es una terna pitagórica, a, b, c son proporcionales a $v^2 - u^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$, respectivamente. Recíprocamente, es fácil ver que toda terna (a, b, c) definida mediante (2) es pitagórica, ya que de (2) se sigue

$$a^2 = (u^4 - 2u^2v^2 + v^4)r^2,$$

$$b^2 = (4u^2v^2 + v^4)r^2,$$

$$c^2 = (u^4 + 2u^2v^2 + v^4)r^2,$$

de forma que $a^2 + b^2 = c^2$.

El resultado anterior puede simplificarse aún: a partir de cualquier terna pitagórica (a, b, c) se pueden obtener otras ternas pitagóricas (sa, sb, sc) para todo valor entero de s; así, de (3, 4, 5) se obtienen las (6, 8, 10), (9, 12, 15), etc. Tales ternas no son esencialmente distintas, ya que corresponden a triángulos rectángulos semejantes. Definiremos como *primitiva* a toda terna pitagórica cuando los números a, b, c no tengan ningún factor común. Se puede probar que las fórmulas

$$a = v^2 - u^2,$$

$$b = 2uv,$$

$$c = u^2 + v^2,$$

dan para todo par de enteros positivos u, v con $u > v$ y tales que u y v no tengan factores comunes ni sean los dos impares, todas las ternas primitivas de números pitagóricos.

Ejercicio. Demuéstrese la última proposición.

Como ejemplos de ternas primitivas de números pitagóricos se tiene:

$u = 2$, $v = 1$:(3,4,5); $u = 3$, $v = 2$:(5,12,13); $u = 4$, $v = 3$:(7,24,25); ...; $u = 10$, $v = 7$:(51,140,149); etcétera.

Los resultados alcanzados para los números pitagóricos inducen de modo natural a plantear la cuestión de obtener enteros a, b, c para los que se verifique $a^2 + b^2 = c^2$ o $a^4 + b^4 = c^4$, o, en general, para un exponente entero positivo $n > 2$ dado, a determinar las soluciones enteras y positivas de la ecuación

$$a^n + b^n = c^n. \qquad (3)$$

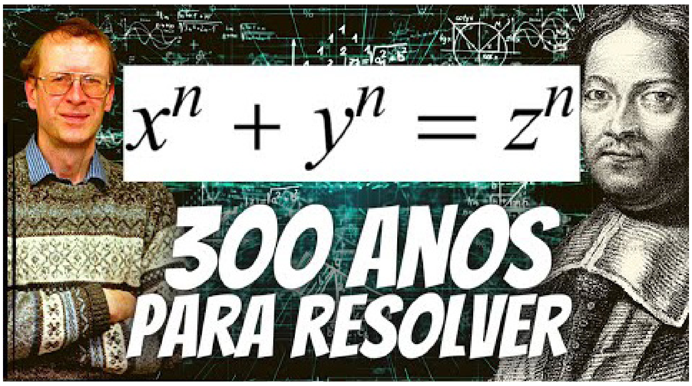
Fermat dio a esta cuestión una respuesta de modo un poco espectacular.

Estudiando la obra de Diofanto, el que más había contribuido entre los antiguos a la teoría de números, Fermat tenía la costumbre de escribir comentarios en los márgenes del libro. De esta forma enunció sin demostración muchos teoremas. Todos han sido probados posteriormente, con excepción de uno de ellos de especial importancia. Comentando la teoría de los números pitagóricos, Fermat escribió que la ecuación (3) no admite soluciones enteras para cualquier $n > 2$, pero que la elegante demostración que había encontrado era, por desgracia, demasiado larga para el margen de que disponía.

De esta proposición general no han podido ser demostradas ni su validez ni su falsedad, a pesar de los esfuerzos de muchos de los más grandes matemáticos posteriores a Fermat, durante muchos años. El teorema fue probado para varios valores de n; en particular para todo $n < 619$, pero no para todo n, sin haber podido encontrarse ningún contraejemplo.

Aunque el teorema en sí no es de gran importancia matemática, las tentativas hechas para demostrarlo dieron lugar a importantes investigaciones en la teoría de números. Este problema despertó también gran interés en círculos no matemáticos, debido en parte a un premio de 100 000 marcos ofrecido a la primera persona que diera una solución aceptada por la Real Academia de Gotinga. Hasta que la inflación que siguió en Alemania a la Primera Guerra Mundial quitó todo valor económico a dicho premio, gran número de soluciones incorrectas eran enviadas todos los años a la Academia.

Incluso matemáticos serios han creído a veces haber encontrado e incluso han publicado soluciones "correctas"; sin embargo, en todas ellas fue descubierto algún error. Con la devaluación del marco, el interés general fue desapareciendo, aunque de cuando en cuando la prensa anunciaba que el problema había sido resuelto por un genio hasta entonces desconocido.



En el año 1995, el matemático Andrew Wiles, en un artículo de 98 páginas publicado en *Annals of mathematics*, demostró una conjetura que engarza las formas modulares y las curvas elípticas. De este trabajo, combinado con ideas de Gerhard Frey y con el teorema de Ribet, se desprende la demostración del último teorema de Fermat.

EL ALGORITMO DE EUCLIDES

1. Teoría general

Es bien conocida la regla de división de un entero *a* por otro *b*, y sabemos que el proceso de división no termina hasta que se llega a un resto más pequeño que el divisor. Así, si $a = 648$ y $b = 7$ se obtiene un cociente $q = 92$ y un resto $r = 4$.

$$\begin{array}{r|l} 648 & \underline{7} \\ \underline{68} & 92 \\ 18 & \\ \underline{14} & \\ 4 & \end{array}$$

$$648 = 7 \times 92 + 4$$

Lo que se puede enunciar como un teorema general: **Si *a* es un entero cualquiera y *b* es un entero mayor que 0, se pueden encontrar siempre dos enteros *q* y *r* tales que**

$$\boldsymbol{a = b \times q + r} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{0 < r < b}$$

Para probar esta proposición sin utilizar la regla ordinaria de división de enteros, basta con fijarse en que cualquier entero a es o bien múltiplo de b, $a = bq$, o bien está comprendido entre dos múltiplos consecutivos de b, $bq < a < b(q + 1) = bq + b$.

En el primer caso se tiene (1) con $r = 0$, y en el segundo resulta, de la primera desigualdad anterior,

$$a - bq = r > 0,$$

mientras que la segunda desigualdad da

$$a - bq = r < b,$$

de modo que resulta $0 < r < b$, como se dice en (1).

De este sencillo hecho se deduce una gran variedad de consecuencias importantes; la primera de ellas es un método para hallar el máximo común divisor de dos enteros.

Sean a y b dos enteros cualesquiera, ninguno de los cuales sea 0, y consideremos el conjunto de todos los enteros positivos que dividen simultáneamente a a y b. Este conjunto es evidentemente finito, puesto que si, por ejemplo, es $a \neq 0$, ningún entero mayor que a puede ser divisor de a. En consecuencia, no puede haber más que un número finito de divisores comunes a a y b, y entre ellos habrá uno mayor que todos, d.

Este número entero d se llama *máximo común divisor de a* y *b*, y se escribe $d = (a, b)$. Así, para $a = 8$ y $b = 12$ se obtiene por ensayos directos $(8, 12) = 4$, mientras que para $a = 5$ y $b = 9$ resulta $(5, 9) = 1$. Si a y b fueran números grandes, por ejemplo, $a = 1\,804$ y $b = 328$, el método de ensayos sería muy laborioso e incierto.

Un método breve y seguro lo da el llamado *algoritmo de Euclides*. (Un algoritmo es un procedimiento sistemático de cálculo.) Está basado en el hecho de que de toda relación de la forma

$$a = b \times q + r \tag{2}$$

se sigue

$$(a, b) = (b, r); \tag{3}$$

puesto que todo número u que divida a a y b

$$a = su, \qquad b = tu,$$

divide también a r, ya que es $r = a - bq = su - qtu = (s - qt)u$; y recíprocamente, todo número v que divide a b y r,

$$b = s'v, \; r = t'v,$$

divide también a a, ya que es $a = bq + r = s'vq + t'v = (s'q + t')v$. Por consiguiente, todo divisor común de a y b es también divisor común de b y r, y recíprocamente.

Por tanto, siendo el conjunto de todos los divisores comunes a a y b idéntico al conjunto de todos los divisores comunes a b y r, el mayor de los divisores comunes a a y b debe ser igual al mayor de los divisores comunes a b y r, lo que demuestra (3). Veremos inmediatamente la utilidad de esta relación.

Volvamos a la cuestión de hallar el máximo común divisor de 1 804 y 328. Por división entera obtenemos

$$\begin{array}{r|l} 1\,804 & \underline{328} \\ \underline{1\,640} & 5 \\ 164 & \end{array}$$

de donde resulta

$$1\,804 = 5 \times 328 + 164.$$

De aquí se sigue, en virtud de (3),

$$(1\,804,\ 328) = (328,\ 164).$$

Se observa que el problema de hallar (1 804, 328) ha sido reducido a otro análogo que se refiere a números más pequeños. Continuemos el proceso; de

$$\begin{array}{r|l} 328 & \underline{164} \\ \underline{328} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

resulta $328 = 2 \times 164 + 0$, de modo que $(328, 164) = (164, 0) = 164$. En consecuencia, $(1\,804, 328) = (328, 164) = (164, 0) = 164$, que es el resultado buscado.

Este proceso para hallar el máximo común divisor de dos números está expuesto en forma geométrica en los *Elementos* de Euclides. Para enteros arbitrarios a y b, no simultáneamente nulos, dicho proceso puede ser descrito aritméticamente en los términos siguientes. Podemos suponer $b \neq 0$, puesto que $(a, 0) = a$. Entonces, por divisiones sucesivas escribiremos:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \,(0 < r_1 < b) \\ b &= r_1q_2 + r_2 \,(0 < r_2 < r_1) \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \,(0 < r_3 < r_2) \\ r_2 &= r_3q_4 + r_4 \,(0 < r_4 < r_3) \\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

mientras los restos r_1, r_2,r_3, … son distintos de 0. De las desigualdades que aparecen a la derecha en (4) resulta que los restos sucesivos forman una sucesión decreciente de números positivos:

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots > 0. \qquad (5)$$

Por tanto, a lo sumo al cabo de b divisiones (bastante menos, ya que la diferencia entre dos restos sucesivos es en general mayor que 1), se debe llegar al resto 0:

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0.$$

Cuando esto ocurre, sabemos que es

$$(a, b) = r_n;$$

en otros términos, (a, b) es igual al último resto mayor que 0 en la sucesión (5). Esto se deduce de la aplicación sucesiva de la igualdad (3) a las ecuaciones (4), puesto que de las igualdades de (4) resulta

$$(a, b) = (b, r_1),\ (b, r_1) = (r_1, r_2),\ (r_1, r_2) = (r_2, r_3),$$

$$(r_2, r_3) = (r_2, r_4),\ \ldots,\ (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n.$$

Ejercicio para desarrollar destrezas. Aplíquese el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de:

a) 187, 77; b) 105, 385; c) 245, 193.

A partir de las ecuaciones (4) puede obtenerse una importante propiedad de (a, b). Si es $d = (a, b)$, existen dos enteros, positivos o negativos, k y l tales que

$$d = ka + lb. \qquad (6)$$

Para probarlo, consideremos la sucesión (5) de restos. De la primera ecuación en (4) resulta

$$r_1 = a - q_1 b,$$

de modo que r_1 puede escribirse en la forma $k_1 a + l_1 b$ (en este caso $k_1 = 1$, $l_1 = -q1$. De la ecuación siguiente en (4) se obtiene

$$r_2 = b - q_2 r_1 = b - q_2(k_1 a + l_1 b) = (-q_2 k_1)a + (1 - q_2 l_1)b = k_2 a + l_2 b.$$

Evidentemente, este proceso puede repetirse para los restos sucesivos $r_1, r_2, \ldots$ hasta llegar a una relación

$$r_n = ka + lb,$$

como queríamos probar.

Como ejemplo, consideremos el algoritmo de Euclides para hallar (61, 24); el máximo común divisor es 1, y la representación deseada para 1 puede calcularse a partir de las ecuaciones

$$61 = 2 \times 24 + 13;\ 24 = 1 \times 13 + 11;\ 13 = 1 \times 11 + 2;\ 11 = 5 \times 2 + 1;\ 2 = 2 \times 1 + 0.$$

De la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$13 = 61 - 2 \times 24;$$

de la segunda,

$$11 = 24 - 13 = 24 - (61 - 2 \times 24) = -61 + 3 \times 24;$$

de la tercera,

$$2 = 13 - 11 = (61 - 2 \times 24) - (-61 + 3 \times 24) = 2 \times 61 - 5 \times 24;$$

y de la cuarta,

$$1 = 11 - 5 \times 2 = (-61 + 3 \times 24) - 5(2 \times 61 - 5 \times 24) = 11 \times 61 + 28 \times 24.$$

2. Aplicación al teorema fundamental de la aritmética

El hecho de que $d = (a, b)$ pueda escribirse siempre en la forma $d = ka + lb$ puede utilizarse para dar una demostración del teorema fundamental de la aritmética, independiente de la ya dada. Primero probaremos, como lema, el corolario, y luego, a partir de este lema, deduciremos el teorema fundamental, invirtiendo así el orden de la demostración anterior.

Lema. Si un número primo *p* divide a un producto *a* × *b*, divide a uno de los factores *a*, *b*.

Si p no divide a a, por ser primo p, se debe tener $(a, p) = 1$, ya que los únicos divisores de p son p y 1. Por consiguiente, se podrán encontrar dos enteros k y l tales que

$$1 = ka + lp.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por b, se obtiene

$$b = kab + lpb.$$

Ahora bien: si p divide a ab, se puede escribir

$$ab = pr$$

de modo que

$$b = kpr + lpb = p(kr + lb),$$

de donde resulta evidente que p divide a b. Hemos demostrado así que si p divide a ab y no divide a a, debe dividir a b; por consiguiente, en todo caso p dividirá a a o a b si divide a ab.

La extensión de este resultado a productos de más de dos factores es inmediata; por ejemplo, si p divide a abc, aplicando dos veces el lema podemos demostrar que p debe dividir al menos a uno de los enteros a, b o c. Ya que si p no divide ni a a, ni a b, ni a c no puede dividir a ab y, en consecuencia, tampoco puede dividir a $(ab)c = abc$.

Ejercicio para desarrollar destrezas. La extensión de este razonamiento a productos de cualquier número n de enteros requiere el uso tácito o expreso del principio de inducción matemática. Complétense los detalles de tal razonamiento.

Del resultado anterior se sigue de modo inmediato el teorema fundamental de la aritmética. Supongamos que se tienen dos descomposiciones de un entero N en producto de números primos:

$$N = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s.$$

Puesto que p_1 divide al segundo miembro de estas igualdades, debe dividir también al tercero, y, por tanto, por el ejercicio anterior, debe dividir a uno de los factores q_k. Pero q_k es primo; por consiguiente, p_1 debe ser igual a q_k. Suprimiendo este factor común en los dos últimos miembros, resultará que p_2 debe dividir a uno de los q_t restantes, y en consecuencia ser igual a él. Suprimiendo p_2 y q_t, procederíamos análogamente con $p_3, \dots, p_r$. Al final de este proceso se habrán suprimido todas las p, dejando solamente la unidad en el segundo miembro. En el último miembro no podrá quedar ninguna q, puesto que todas las q son mayores que uno. Por consiguiente, las p y las q aparecen en parejas de números iguales, lo que prueba que, salvo quizá el orden de los factores, las dos descomposiciones son idénticas.

3. La función φ de Euler. De nuevo el teorema de Fermat

Dos enteros a y b se llaman *primos relativos* cuando su máximo común divisor es 1:

$$(a, b) = 1$$

Por ejemplo, 24 y 35 son primos relativos, mientras que 12 y 18 no lo son. Si a y b son primos relativos, existen dos enteros positivos o negativos k y l tales que

$$ka + lb = 1.$$

Esto se sigue de la propiedad de (a, b) establecida anteriormente.

Ejercicio para fijar ideas. Demuéstrese el teorema siguiente: Si un entero r divide a un producto ab y es primo relativo con a, r divide a b. (**Indicación:** Si r es primo relativo con a, existen dos enteros k y l tales que

$$kr + la = 1.$$

Multiplíquense los dos miembros de esta igualdad por b.) Este teorema incluye como caso particular el lema de la página anterior, ya que un número primo p es primo relativo con un entero a cuando, y solamente entonces, p no divide a a.

Para todo entero positivo n, designemos con $\varphi(n)$ el número de enteros primos con n y menores que n. Esta función, introducida por Euler, es una función de gran importancia en teoría de números. Los valores de $\varphi(n)$ para los primeros valores de n pueden calcularse fácilmente:

$\varphi(1) = 1$, puesto que 1 es primo relativo con 1,

$\varphi(2) = 1$, puesto que 1 es primo relativo con 2, ,

$\varphi(3) = 2$, puesto que 1 y 2 son primos relativos con 3,

$\varphi(4) = 2$, puesto que 1 y 3 son primos relativos con 4,

$\varphi(5) = 4$, puesto que 1, 2, 3, 4 son primos relativos con 5,

$\varphi(6) = 2$, puesto que 1 y 5 son primos relativos con 6,

$\varphi(7) = 6$, puesto que 1, 2, 3, 4, 5, 6 son primos relativos con 7,

$\varphi(8) = 4$, puesto que 1, 3, 5, 7, son primos relativos con 8,

$\varphi(9) = 6$, puesto que 1, 2, 4, 5, 7, 8 son primos relativos con 9,

$\varphi(10) = 4$, puesto que 1, 3, 7, 9, son primos relativos con 10.

Etcétera.

Se observa que $\varphi(p) = p - 1$ si p es primo, pues un número primo p no tiene más divisores que él mismo y la unidad, y, por tanto, es primo relativo con todos los enteros 1, 2, 3,..., $p - 1$. Si n es compuesto, con la descomposición en factores primos

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

donde las p representan números primos distintos, cada uno elevado a una cierta potencia, se tiene

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Por ejemplo, puesto que $12 = 2^2 \times 3$,

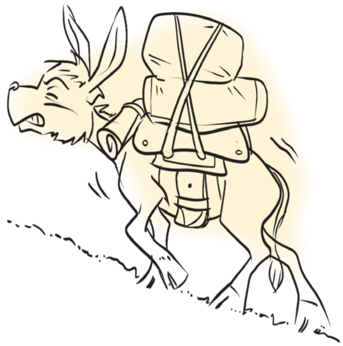
$$\varphi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12\frac{1}{2}\frac{2}{3} = 4,$$

como debía resultar, previo el cómputo de primos relativos con 12 y menores que él. La demostración general es completamente elemental, pero no la daremos aquí.

Ejercicio para fijar ideas. Basándose en la función φ de Euler, generalícese el teorema de Fermat. El teorema general se enuncia así: Si n es un entero cualquiera, y a es un primo relativo con n, se tiene

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (\text{mód } n).$$

4. Fracciones continuas. Ecuaciones diofánticas



El algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos enteros conduce de modo natural a un importante procedimiento para representar el cociente de dos enteros mediante una fracción compuesta; por ejemplo, aplicando a los números 840 y 611 el algoritmo de Euclides resultan las igualdades

$$840 = 1 \times 611 + 229, \quad 611 = 2 \times 229 + 153,$$

$$229 = 1 \times 153 + 76, \quad 153 = 2 \times 76 + 1,$$

las cuales demuestran, incidentalmente, que $(840, 611) = 1$. De estas ecuaciones se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$\frac{840}{611} = 1 + \frac{229}{611} = 1 + \frac{1}{611/229}$$

$$\frac{611}{229} = 2 + \frac{153}{229} = 2 + \frac{1}{229/153}$$

$$\frac{229}{153} = 1 + \frac{76}{153} = 1 + \frac{1}{153/76}$$

$$\frac{153}{76} = 2 + \frac{1}{76}.$$

Por combinación de estas igualdades se obtiene el desarrollo del número racional 840 /611 en la forma

$$\frac{840}{611} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{76}}}}$$

Una expresión de la forma

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}}, \qquad (7)$$

donde las a representan enteros positivos, se llama *fracción continua*. El algoritmo de Euclides da un método para representar todo número fraccionario en esta forma.

Ejercicio para desarrollar destrezas. Hállense los desarrollos en fracción continua de

$$\frac{2}{5}, \qquad \frac{43}{30}, \qquad \frac{169}{70}.$$

Las fracciones continuas son de gran valor en la rama de la aritmética superior conocida con el nombre de *análisis diofántico*. Una *ecuación diofántica* es una ecuación algebraica, con una o más incógnitas, de coeficientes enteros y de la que interesan solo las soluciones enteras. Tales ecuaciones pueden carecer de soluciones o tener un número finito o infinito de ellas. El caso más sencillo es el de la ecuación diofántica *lineal* con dos incógnitas,

$$ax + by = c, \qquad (8)$$

donde a, b y c son enteros dados, y se buscan soluciones x, y enteras. La solución completa de una ecuación de esta forma puede hallarse por el algoritmo de Euclides.

Para comenzar, hallemos $d = (a, b)$ por el algoritmo de Euclides: se tendrá entonces, para k y l convenientes,

$$ak + bl = d, \qquad (9)$$

de donde resulta que la ecuación (8) admitirá la solución particular $x = k$, $y = l$ en el caso en que sea $c = d$. En general, si c es un múltiplo de d,

$$c = d \times q,$$

se obtendría de (9)

$$a(kq) + b(lq) = dq = c,$$

de modo que (8) tiene la solución particular $x = x^* = kq$, $y = y^* = lq$. Recíprocamente: si (8) tiene una solución x, y para un c dado, c debe ser múltiplo de $d = (a, b)$, puesto que q, por dividir a a y b, debe dividir a c. Hemos probado así que, para que la ecuación (8) admita soluciones, es necesario y suficiente que c sea múltiplo de (a, b).

Para determinar otras posibles soluciones de (8), observemos que si $x = x'$, $y = y'$ es otra solución cualquiera, distinta de la $x = x^*$, $y = y^*$ obtenida por el algoritmo de Euclides, las diferencias $x = x' - x^*$, $y = y' - y^*$ forman una solución de la ecuación "homogénea"

$$ax + by = 0. \qquad (10)$$

Pues si es

$$ax' + by' = c \qquad \text{y} \qquad ax^* + by^* = c,$$

restando miembro a miembro estas dos ecuaciones, se obtiene

$$a(x' - x^*) + b(y' - y^*) = 0.$$

Ahora bien: la solución general de la ecuación (10) es $x = rb/(a, b)$, $y = -ra/(a, b)$, donde r es un entero cualquiera. (Dejamos la demostración como ejercicio. **Indicación:** divídase por (a, b) y utilícese los ejercicios anteriores.) Resulta entonces de modo inmediato que

$$x = x^* + \frac{rb}{(a,b)}, \quad y = y^* - \frac{ra}{(a,b)}.$$

En resumen: la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$, donde a, b y c son enteros, tiene soluciones cuando, y únicamente entonces, c es múltiplo de (a, b). En este caso, se puede hallar una solución por el algoritmo de Euclides, y la solución general es de la forma

$$x = x^* + \frac{rb}{(a,b)}, \quad y = y^* - \frac{ra}{(a,b)}.$$

donde r es un entero cualquiera.

Ejemplos. La ecuación $3x + 6y = 22$ no admite soluciones enteras, puesto que $(3, 6) = 3$ no divide a 22.

La ecuación $7x + 11y = 13$ tiene la solución particular $x = -39$, $y = 26$, obtenida en la forma siguiente:

$$11 = 1 \times 7 + 4, \quad 7 = 1 \times 4 + 3, \quad 4 = 1 \times 3 + 1, \quad (7, 11) = 1.$$

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7.$$

De donde

$$7 \times (-3) + 11 \times (2) = 1,$$

$$7 \times (-39) + 11 \times (26) = 13.$$

Las demás soluciones vienen dadas por las fórmulas

$$x = -39 + 11r, \; y = 26 - 7r,$$

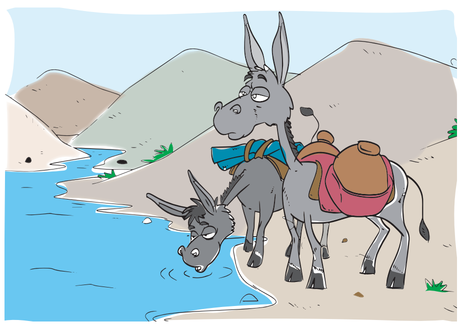
siendo r un entero arbitrario.

Ejercicio para fijar ideas. Resuélvanse las ecuaciones diofánticas:

a) $3x - 4y = 29$; b) $11x + 12y = 58$; c) $153x - 34y = 51$.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Cuándo y cómo empezaron las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?



Aspectos culturales del siglo XX

“La edad de oro de la matemática no fue la época de Euclides, sino el siglo XX”, sostenía Cassius Jackson Keyser. Keyser fue uno de los primeros estadounidenses en apreciar las nuevas direcciones en la base de las matemáticas, anunciadas por el trabajo de europeos como Richard Dedekind, Georg Cantor, Giuseppe Peano, Henri Poincaré, David Hilbert, Ernst Zermelo, Bertrand Russell y Alfred North Whitehead. También fue uno de los primeros en valorar la importancia matemática y filosófica de su compatriota estadounidense Charles Sanders Peirce.

Alfred Korzybski, fundador de la semántica general, nombró a Keyser por su considerable influencia en la cultura del siglo XX. Mientras estuvo en Columbia, Keyser supervisó solo a dos doctorados, pero ambos postulantes demostraron ser relevantes: Eric Temple Bell y el lógico Emil Post.

LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

Uno de los hallazgos culturales decisivos del siglo XIX fue el descubrimiento de que la matemática no es una ciencia natural, sino una creación intelectual del hombre. Bertrand Russell escribía en 1901 en el *International Monthly*: “El siglo XIX, que se muestra tan orgulloso de la invención de los ingenios de vapor y de la evolución, podría haber reclamado a más justo título la fama por el descubrimiento de la matemática pura”.

Thomas Henry Huxley (1825-1895), el llamado “Darwin’s bulldog” por su defensa de la evolución, había advertido ya que “la matemática es la ciencia que no sabe nada de observación, nada de experimentos, nada de inducción, nada de causación”. Y en otra ocasión, criticando a William Thomson (lord Kelvin) por lo que consideraba como una subestimación de la edad la Tierra, hizo Huxley el siguiente comentario, bien conocido:

“Podemos comparar a la matemática con un molino fabricado con precisión exquisita, que puede moler harina de cualquier grado de finura que uno quiera; pero lo que se obtenga de él depende, sin embargo, de lo que se le eche; y de la misma manera que el mejor molino del mundo no dará harina de trigo de cáscaras de guisantes, así también páginas y páginas de fórmulas no permitirán obtener ningún resultado concreto a partir de datos imprecisos”.

Es decir que hacia finales de siglo era un hecho reconocido incluso por los no matemáticos que la matemática es una forma de pensamiento axiomático, en la que uno deduce conclusiones válidas de sistemas de premisas arbitrarias. La cuestión de si los axiomas son verdaderos o no, en el sentido científico del término, carece de importancia; de hecho, las palabras mismas con que se expresan los axiomas son términos indefinidos. Esto es lo que trataba de poner de relieve Bertrand Russell con su descripción humorística de la matemática, en 1901, como la materia en la que no sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad.

Dos años más tarde, al comienzo de su libro *Principios de Matemática*, daba Russell una definición precisa de la matemática: **“La matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma *p* implica *q*, donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposiciones, y ni *p* ni *q* contienen ninguna constante, salvo las constantes lógicas”**.

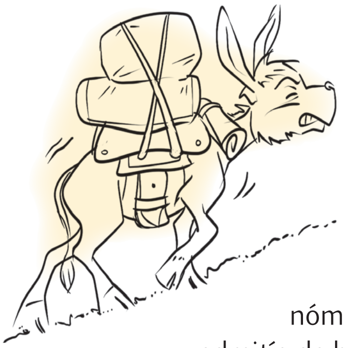
Esta definición subraya el hecho de que la característica esencial de la matemática es su estructura lógica, y no ningún tipo de afirmación categórica que pueda contener, referente al mundo de los sentidos. En resumen, Russell identifica aquí la matemática con la lógica, pero en este sentido no ha habido ni mucho menos acuerdo general entre los matemáticos. James Joseph Sylvester discrepaba completamente de Huxley, aduciendo que la matemática surge “[...] **directamente de las facultades y actividades inherentes a la mente humana, y de una introspección continuamente renovada de ese mundo interior del pensamiento, cuyos fenómenos son tan variados y exigen una atención tan cuidadosa para distinguirlos como los del mundo físico exterior**”.

Dicho con otras palabras, Sylvester se inclinaba más hacia lo que ahora se llama una *concepción intuicionista* de la matemática, puesto que consideraba como el objetivo de la matemática pura “el desvelamiento de las leyes de la inteligencia humana”, de igual manera que la física tiene como objeto descubrir las leyes del mundo exterior o de los sentidos.

En este sentido, Sylvester representaba un rechazo de las tendencias formalizadoras de George Boole, Richard Dedekind y Giuseppe Peano. A Leopold Kronecker se le podría considerar quizá en el mismo bando que Sylvester, a pesar de la aritmetización que representó, al considerar que los enteros en la matemática tenían un significado dado por Dios directamente.

Más decididamente intuicionista fue otro matemático que puede ser considerado como una de las dos grandes figuras de transición entre los siglos XIX y XX; se trata de Henri Poincaré (1854-1912), un hombre al que admiraba el viejo Sylvester como un joven excepcionalmente prolífico.

LA TEORÍA DE FUNCIONES DE POINCARÉ



Cuando Carl Friedrich Gauss murió, en el año 1855, se pensaba que ya no volvería a haber otro matemático tan universal, que dominase todas las ramas, tanto puras como aplicadas. Si hubo alguien desde entonces que haya demostrado que tal previsión estaba equivocada, ha sido Poincaré, que extendió también sus dominios a toda la matemática de la época. Sin embargo, Poincaré era fundamentalmente diferente de Gauss en varios sentidos. Gauss había sido un prodigio calculando: durante toda su vida jamás se echó atrás ante cálculos sumamente complicados, como lo eran los astronómicos, mientras que Poincaré no mostró especialmente pronto su capacidad matemática y admitía de buena gana que tenía dificultades incluso con cálculos aritméticos sencillos.

El caso de Poincaré demuestra de una manera concluyente que para ser un gran matemático no es condición necesaria distinguirse por la facilidad en el manejo de los números; hay otros aspectos más útiles de la capacidad matemática innata. Por otra parte, mientras que Gauss escribió relativamente poco, puliendo pacientemente sus obras (*pauca sed matura*), Poincaré escribía mucho y, en consecuencia, en forma precipitada, publicando más trabajos por año que ningún otro matemático.

Retratos de Poincaré.

Además, Poincaré escribió libros populares, de divulgación, con una vena filosófica innata, sobre todo en los últimos años de su vida, algo que jamás tentó a Gauss. Las semejanzas entre ellos, sin embargo, también son numerosas y fundamentales. Ambos rebosaban de ideas de tal manera que se veían en dificultades para poner por escrito sus pensamientos; ambos mostraban una fuerte preferencia por los teoremas generales frente a los casos particulares; y ambos, en fin, contribuyeron a una gran variedad de ramas de la ciencia, no estrictamente matemática.

Poincaré nació en Nancy (Francia), ciudad que iba a acoger a un buen número de matemáticos importantes a lo largo del siglo XX. Varios miembros de la familia Poincaré se destacaron por motivos diversos, tales como el primo de nuestro matemático, Raymond, que fue presidente de Francia durante la Primera Guerra Mundial. Henri era torpemente ambidextro y su ineptitud para todo tipo de ejercicios físicos se hizo legendaria. Siempre tuvo mal la vista y era sumamente distraído, pero, al igual que Euler y que Gauss, tenía una notable capacidad para realizar mentalmente complicados desarrollos en cualquier aspecto del pensamiento matemático.

Después de graduarse en la *École Polytechnique* en 1875, se recibió en ingeniería de Minas en 1879 y permaneció ligado al Ministerio de Minas durante el resto de su vida. El mismo año obtuvo también su doctorado en ciencias por la Universidad de París, en la que ocupó diversos puestos de profesor de matemáticas y física, hasta su muerte en 1912.

La tesis doctoral de Poincaré era un trabajo sobre ecuaciones diferenciales; no sobre métodos de resolución, sino sobre teoremas de existencia, lo que lo llevó a una de sus más famosas contribuciones a la matemática: el estudio de las propiedades de las funciones automorfas. De hecho, él fue prácticamente el fundador de la teoría de funciones automorfas. Una función automorfa $f(z)$ de la variable compleja z es una que es analítica en un dominio D, excepto en los polos correspondientes, y que es invariante bajo un grupo infinito numerable de transformaciones lineales fraccionarias o de Möbius:

$$z' = \frac{cz+b}{az+d}.$$

Tales funciones son una generalización de las funciones trigonométricas, como puede verse tomando $a = d = 1$, $c = 0$ y b de la forma $2k\pi$, así como de las funciones elípticas.

Charles Hermite había estudiado estas transformaciones para el caso particular en que los coeficientes a, b, c y d son enteros y se verifica que $ad - bc = 1$, y había descubierto una clase de funciones elípticas modulares invariantes bajo tales transformaciones lineales. Pero las generalizaciones de Poincaré revelaron una categoría de funciones más amplia, conocidas estas como *funciones zeta-fuchsianas*, que podían ser utilizadas, como demostró Poincaré, para resolver las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos.

MATEMÁTICA APLICADA Y TOPOLOGÍA

Poincaré no se detuvo en ningún campo el tiempo suficiente como para completar su obra; un contemporáneo dijo de él: "Era un conquistador, no un colonizador". En sus cursos de la Sorbona solía tratar de un tema distinto en cada curso académico: capilaridad, elasticidad, termodinámica, óptica, electricidad, telegrafía, cosmogonía y otros; la presentación era tal que en muchos casos las lecciones aparecían publicadas poco después de haber sido impartidas.

Solo en astronomía publicó media docena de volúmenes: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 vols., 1892-1899) y las *Leçons de mécanique céleste* (3 vols., 1905-1910), tema en el que se mostró un digno sucesor de Pierre Simon Laplace. Son especialmente importantes los métodos que utilizaba Poincaré para atacar el problema de los tres cuerpos y sus generalizaciones. También fue relevante para la cosmogonía una memoria de 1885 en la que demostraba que la figura de equilibrio relativo que adopta un fluido homogéneo sujeto a las fuerzas de atracción gravitatoria newtoniana y girando uniformemente alrededor de un eje puede tener una forma de pera, y la cuestión de una Tierra en forma de pera ha seguido interesando a los geodestas hasta nuestros días. Sir George H. Darwin (1845-1912), hijo de Charles Darwin (1809-1882), escribía en 1909 que la mecánica celeste de Poincaré sería una inmensa mina para los investigadores durante medio siglo por lo menos.

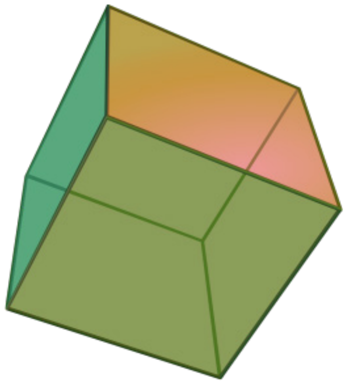
Es interesante hacer notar que Poincaré, como Laplace, también escribió mucho sobre teoría de probabilidades. En algunos aspectos, su obra es solo una continuación natural de la de Laplace y de los analistas del siglo XIX, pero Poincaré era "bifronte", como un Jano matemático, y se adelantó en buena medida al interés generalizado por la topología que iba a ser tan característico del siglo XX.

La topología tampoco fue la invención de un solo hombre; algunos problemas topológicos se encuentran ya en la obra de Euler, de Möbius y de Cantor, e incluso la palabra misma, "topología", había sido utilizada ya en 1847 por J. B. Listing (1808-1882) en el título de su libro *Vorstudien zur Topologie* ("*Introducción al estudio de la topología*"), pero si queremos fijar una fecha que señale los comienzos "oficiales" de esta rama de la matemática, ninguna sería más adecuada que la del año 1895, en que Poincaré publicó su *Analysis Situs*. En este libro se daba por primera vez un desarrollo sistemático del tema.

La topología es hoy una rama extensa y fundamental dentro de la matemática, con muchos aspectos parciales, pero que a grandes rasgos se puede subdividir en dos ramas bastante distintas: la topología combinatoria o algebraica, y la topología conjuntista. Poincaré mostró poco entusiasmo por la segunda y en 1908, dirigiéndose al *International Mathematical Congress* en Roma, se refirió a la *Mengenlehre* de Cantor como una enfermedad de la que las generaciones posteriores se considerarían completamente curadas.

La topología combinatoria o *analysis situs*, como se denominaba entonces en general, consiste en el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes bajo transformaciones biunívocas y bicontinuas. A veces se oye hablar de ella en términos de divulgación popular como "la geometría de las láminas de goma", ya que las deformaciones posibles de un globo, sin pincharlo ni romperlo, son buenos ejemplos de transformaciones topológicas.

Un círculo, por ejemplo, es topológicamente equivalente a la región del plano encerrada por una elipse; la dimensión de un espacio es un invariante topológico, como lo es el número de Descartes-Euler $N_0 - N_1 + N_2$ para un poliedro simple.



El conocido cubo con 8 vértices, 12 aristas y 6 caras cumple con $\chi_E = V - A + C = 2$ grafica el teorema del poliedro euleriano.

El teorema de Euler para poliedros es un teorema de la geometría del espacio, enunciado por Leonhard Euler en 1750, y fue publicado en la obra *Elementos de la doctrina de los sólidos* en 1758. El mismo indica la relación entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo sin orificios, ni entrantes. Expresa una constante que no se altera en caso de rotaciones o traslaciones de dichos poliedros. En la proposición, también concluye que solo pueden ser cinco los sólidos regulares y establece para ellos varias relaciones. Detrás de la fórmula está el concepto topológico de la característica χ (chi) de Euler-Poincaré. La fórmula del poliedro de Euler es el caso especial para $d = 3$ (tres dimensiones) con omisión implícita de $Z = 1$ (siempre consideramos un solo cuerpo), entonces resulta un $\chi_E - 2$:

$$\chi_E = V - A + C = 2, \text{ según el teorema del poliedro de Euler,}$$

$$\chi_E = V - A + C - Z = 1 \text{ según las características de Euler-Poincaré,}$$

con V = Número de vértices, A = Número de aristas, C = Número de caras y Z = Número de celdas.

En general, es válida (desde que se define así) para los poliedros de la característica $\chi_E = 2$ (o $\chi = 1$), que incluye todos los poliedros convexos sin excepción y muchos poliedros cóncavos "con buen comportamiento".

Entre las contribuciones originales de Poincaré a la topología está una generalización de esta fórmula de Descartes-Euler para los poliedros, para espacios de dimensión más alta, haciendo uso de lo que llamó los *números de Betti* en honor de Enrico Betti (1823-1892), que había sido profesor de la Universidad de Pisa y había estudiado algunas de las propiedades de estos invariantes topológicos.

Dicho rápidamente, y solo para tener alguna idea acerca de ellos: en topología algebraica, los números de Betti distinguen los espacios topológicos. Intuitivamente, el primer número de Betti de un espacio cuenta el número máximo de cortes que se pueden hacer sin dividir el espacio en dos piezas. Cada número de Betti es o bien un número natural o bien un elemento de la recta real extendida ($+\infty$).

Sin embargo, la mayor parte de la topología trabaja con aspectos cualitativos y no cuantitativos de la matemática, y en este sentido representa una nítida ruptura con las corrientes dominantes en el análisis del siglo XIX. Poincaré parece haberse visto conducido al *analysis situs* por sus intentos de integración cualitativa de ecuaciones diferenciales.

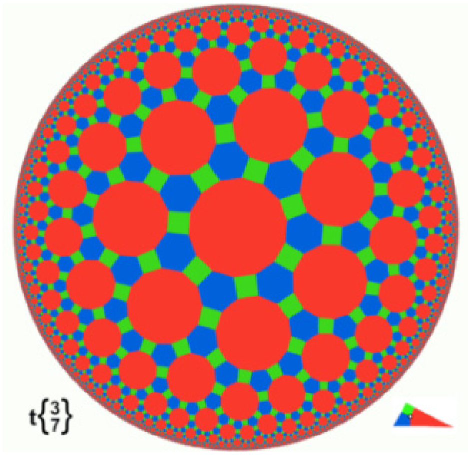
Como Bernhard Riemann, Poincaré era especialmente hábil en el manejo de problemas de tipo topológico, tales como el de averiguar las propiedades de una función sin disponer de su representación formal en el sentido clásico, porque ambos reunían una aguda intuición con un sólido razonamiento. Si Poincaré hubiera continuado interesado por la topología, podría haber anticipado otros resultados posteriores en esta rama de la matemática, una de las direcciones de investigación más desarrolladas y más fructíferas a lo largo del siglo XX.

No obstante, su mente inquieta se encontraba ocupada con todo lo que estaba ocurriendo en física y en matemática a la vuelta del siglo, desde las ondas hertzianas y los rayos X a la teoría cuántica y la teoría de la relatividad.

Una caricatura de Poincaré.

Como ejemplo del carácter polifacético de la obra de Poincaré, a él le debemos un conocido y sugestivo modelo de la geometría de Nicolái Lobachevski dentro de un marco euclídeo. Supongamos un "mundo" limitado por una superficie esférica de radio R del espacio euclídeo tridimensional, e imaginemos que la temperatura absoluta en un punto interior a esa esfera es $R^2 - r^2$, donde r es la distancia del punto al centro de la esfera; supongamos además que el índice de refracción del medio diáfano que llena la esfera es inversamente proporcional a la temperatura $R^2 - r^2$.

Imaginemos por último que las dimensiones de los objetos cambian con la temperatura de punto a punto, siendo proporcionales a la temperatura del lugar en que se encuentran. Para los habitantes de este "mundo" el universo parecería infinito y los rayos de luz o "rectas" no serían realmente rectilíneas, sino arcos de circunferencias ortogonales a la superficie esférica límite, arcos que tendrían longitud infinita.



Modelo del disco de Poincaré con una teselación {3,7} de rombos truncados.

Los "planos" serían casquetes de esferas ortogonales a la primera y dos de estos "planos" no euclídeos se cortarían, en su caso, según una "recta" no euclídea. En este "mundo" se verifican todos los axiomas euclídeos, excepto el de las paralelas, como se ve fácilmente.

LOS PROBLEMAS DE HILBERT

Poincaré murió en plena culminación de sus facultades, a los 58 años, después de haber escrito más que ningún otro matemático del siglo. Felix Klein lo comparó con Augustin Louis Cauchy por su versatilidad matemática, y para muchos fue el matemático más importante de la época. Su rival principal en este sentido, David Hilbert (1862-1943), era alemán y de temperamento e ideas muy distintos.

He aquí la segunda figura de transición fundamental entre los siglos XIX y XX, pero mientras Poincaré parece quizá pertenecer más bien al siglo anterior, Hilbert se encuentra ya claramente instalado en el siglo XX, en vista de la insistencia en la idea de estructura en su obra. Hilbert nació en Königsberg, en la Prusia oriental, lo mismo que Immanuel Kant (1724-1804), pero a diferencia de Kant viajó mucho, especialmente para asistir a los congresos internacionales de matemáticos que caracterizaron el siglo XX. El primero de tales congresos, organizado ya oficialmente, se celebró en Zúrich en 1897, el segundo en París en 1900, y desde entonces estos congresos se han ido programando más o menos regularmente cada cuatro años, habiéndose celebrado uno de los últimos en 1983, en Varsovia. El próximo se realizará entre el 23 y el 30 de julio de 2026, en Estados Unidos.

En el Congreso de París de 1900, Hilbert, que era ya un famoso profesor en Gotinga, presentó una comunicación en la que sobre la base de las tendencias que mostraba la investigación matemática de finales del glorioso siglo XIX intentaba predecir la dirección de los progresos futuros. Hizo esto proponiendo 23 importantes problemas que, según él creía, estarían o deberían estar entre los que ocupasen la atención de los matemáticos durante el siglo XX.

"Si pudiéramos hacernos una idea del desarrollo probable de los conocimientos matemáticos en el futuro inmediato", decía Hilbert, "entonces deberíamos dejar pasar ante nuestras mentes los problemas sin resolver, para estudiar los problemas que nos propone la ciencia de hoy y cuya solución podamos esperar de un futuro no lejano".

Aunque Hilbert no estaba de acuerdo con la idea de que solo los conceptos de la aritmética son susceptibles de un tratamiento completamente riguroso, admitía de buen grado que el desarrollo de la aritmetización del continuo por Cauchy, Bolzano, Cantor y otros fue uno de los dos logros más notables del siglo XIX (siendo el otro el descubrimiento de las geometrías no euclídeas por Gauss, Bolyai y Lobachevski), y así el primero de los 23 problemas se refería a la estructura del continuo de los números reales. El problema tiene dos partes relacionadas entre sí:

1) ¿hay algún cardinal transfinito entre el cardinal de un conjunto numerable y el cardinal del continuo?; y
2) ¿puede considerarse el continuo numérico como un conjunto bien ordenado?

Lo que pregunta la segunda parte, en otras palabras, es si la totalidad de los números reales podrá ordenarse totalmente, de otra forma que la usual, de manera que todo subconjunto no vacío tenga un mínimo o primer elemento en el nuevo orden.

Esta cuestión está estrechamente relacionada con el *axioma de elección*, llamado así por el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1956), que lo formuló en 1904. El axioma de Zermelo afirma que, dado un conjunto cualquiera cuyos elementos sean conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, entonces existe al menos un conjunto que contiene uno y solo un elemento en común con cada uno de los conjuntos no vacíos, elementos del conjunto dado.

Como ejemplo de problema en el que interviene el axioma de Zermelo, considérese el intervalo unidad formado por todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$; llamemos equivalentes a dos de estos números reales cuando su diferencia sea racional. Entonces hay, obviamente, infinitas clases de equivalencia de números reales; si formamos un conjunto S que contenga uno y solo un elemento de cada una de estas clases de equivalencia, ¿S será numerable o no numerable? El axioma de elección es una herramienta indispensable en todas las ramas de la matemática y en 1939 demostró Kurt Gödel (1906-1978) que este axioma es consistente con los restantes axiomas de la teoría de conjuntos. En 1963 se clarificó aún más el estatus de este axioma dentro de la teoría de conjuntos, al demostrar Paul Cohen (n. en 1934) que el axioma de elección es independiente de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos usual, demostrando así que tal axioma no podía ser demostrado dentro del sistema. Esto parece excluir una solución definitiva, en el sentido clásico, del primer problema de Hilbert.

Otro gran matemático que ejerció una fuerte influencia en la matemática del siglo XX es Georg Friedrich Bernhard Riemann. ¿Quién fue Riemann y cuáles fueron sus ideas innovadoras? Lo descubriremos a continuación.

Biografía

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Las ideas de Bernhard Riemann sobre la geometría del espacio tuvieron un profundo efecto en el desarrollo de la física teórica moderna. Aclaró el concepto de integral al definir lo que hoy llamamos *integral de Riemann*.

Retrato de Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Bernhard Riemann nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, Reino de Hannover (actualmente Alemania), y falleció el 20 de julio de 1866 en Selasca, Italia.

Su padre, Friedrich Bernhard Riemann, era un ministro luterano que se casó con Charlotte Ebell cuando ya era de mediana edad. Él mismo se encargó personalmente de la educación de sus hijos y le enseñó a Bernhard, el segundo entre dos varones y cuatro mujeres, hasta que cumplió diez años. En esa época, un maestro de una escuela local llamado Schulz contribuyó a la educación de Bernhard.

En 1840, Bernhard ingresó directamente al tercer grado del liceo de Hannover, viviendo entonces con su abuela, pero esta murió en 1842 y tuvo que mudarse al *Johanneum Gymnasium* en Lüneburg. Parece haber sido un buen alumno, aunque no sobresaliente, esforzándose mucho en las materias clásicas como hebreo y teología. No obstante, mostró un interés particular por las matemáticas, por lo que el director del colegio le permitió estudiar textos de matemáticas de su propia biblioteca. En una ocasión, le prestó el libro sobre la teoría de números de Adrien-Marie Legendre y Bernhard leyó sus 900 páginas en seis días.

En la primavera de 1846, Riemann se matriculó en la Universidad de Gotinga. Su padre lo había animado a estudiar teología, por lo que ingresó en la facultad de teología. Aunque luego de asistir a algunas conferencias de matemáticas solicitó el beneplácito de su padre para trasladarse a la facultad de filosofía, con la idea de estudiar matemática. Riemann siempre fue muy cercano a su familia y nunca habría cambiado de carrera sin el permiso de su padre. Se lo concedieron y el joven comenzó a tomar cursos de matemática con Moritz Stern y Carl Friedrich Gauss.

Se puede pensar que Riemann estaba en el lugar adecuado en Gotinga para estudiar matemática, pero en ese momento su Universidad era bastante poco favorecida respecto de la matemática. Gauss le dio clases, pero se limitaba a dar cursos elementales y no hay evidencia de que entonces reconociera el genio de Riemann. Sin embargo, Stern ciertamente alcanzó a detectar un estudiante notable y más tarde lo describió diciendo que "[...] ya cantaba como un canario".

Riemann se trasladó de Gotinga a la Universidad de Berlín en la primavera de 1847 para estudiar con Jakob Steiner, Carl Gustav Jacobi, Peter Gustav Lejeune Dirichlet y Ferdinand Eisenstein. Esta fue una época importante para él. Aprendió mucho de Eisenstein y discutió el uso de variables complejas en la teoría de funciones elípticas. Sin embargo, la persona que más influyó en él en esta época fue Dirichlet.

Felix Klein escribe: "Riemann estaba vinculado a Dirichlet por la fuerte simpatía interior que sentía por un modo de pensar similar. A Dirichlet le gustaba explicarse las cosas con claridad en un contexto intuitivo; además, hacía análisis agudos y lógicos de cuestiones fundamentales y evitaba en lo posible los cálculos largos. Su estilo lo convencía a Riemann, quien lo adoptó y trabajó según los métodos de Dirichlet".

El trabajo de Riemann siempre se basó en un razonamiento intuitivo que no alcanzaba el rigor necesario para que las conclusiones fueran irrefutables. Sin embargo, las brillantes ideas que contiene su obra son mucho más claras porque su trabajo no está excesivamente lleno de cálculos largos. Fue durante su estancia en la Universidad de Berlín cuando elaboró su teoría general de variables complejas, la cual conformó la base de algunos de sus trabajos más importantes.

En 1849 regresó a Gotinga y en 1951 presentó su tesis doctoral, dirigida por Gauss. Fueron varios, además de Gauss, quienes influyeron fuertemente en Riemann en esta época. Heinrich Martin Weber había regresado a una cátedra de física en Gotinga desde Leipzig durante el tiempo que este había pasado en Berlín, y lo tomó de asistente durante 18 meses. También Johann Benedict Listing había sido nombrado profesor de física en Gotinga en 1849. A través de Weber y Listing, Riemann adquirió una sólida formación en física teórica y, en especial con Listing, importantes ideas en topología que influirían en su investigación pionera.

La tesis de Riemann estudia la teoría de variables complejas y, en particular, lo que ahora llamamos *superficies de Riemann*. Por lo tanto, introduce métodos topológicos en la teoría de funciones complejas. El trabajo se basa en los fundamentos de Cauchy de la teoría de variables complejas construidos a lo largo de muchos años y también en las ideas de Victor Puiseux sobre los puntos de ramificación. Sin embargo, esta tesis es una pieza de trabajo sorprendentemente original, que examina las propiedades geométricas de las funciones analíticas, las aplicaciones conformes y la conectividad de las superficies.

Al demostrar algunos de los resultados de su tesis, Riemann utilizó un principio variacional que más tarde llamaría *principio de Dirichlet*, ya que lo había aprendido de las conferencias de Dirichlet en Berlín. Sin embargo, el principio de Dirichlet no se originó con Dirichlet, ya que Gauss, Green y Thomson lo habían utilizado. La tesis de Riemann fue examinada el 16 de diciembre de 1851. En su informe, Gauss describió el trabajo de Riemann como: "[...] una originalidad gloriosamente fértil".

Por recomendación de Gauss, Riemann fue designado para un puesto en Gotinga y trabajó para obtener su habilitación, el título que le permitiría convertirse en profesor. Pasó treinta meses ocupado a este efecto en su disertación, que trataba sobre la representación de funciones mediante series trigonométricas. Dio las condiciones para que una función tenga una integral, lo que ahora llamamos la *condición de integrabilidad de Riemann*. En la segunda parte del trabajo examinó el problema que describió con estas palabras:

"**Si bien los artículos anteriores han demostrado que si una función posee tal o cual propiedad, entonces puede representarse mediante una serie de Fourier, nosotros planteamos la pregunta inversa: si una función puede representarse mediante una serie trigonométrica, ¿qué se puede decir sobre su comportamiento?**".

Para completar su habilitación, Riemann tenía que dar una clase. Preparó tres cursos, dos sobre electricidad y uno sobre geometría, entre los cuales Gauss tenía que elegir uno para que Riemann lo llevara a cabo. En contra de sus expectativas, Gauss eligió la conferencia sobre geometría. Esta conferencia, titulada "Sobre las hipótesis que sustentan a la geometría" y pronunciada el 10 de junio de 1854, se convirtió en un clásico de las matemáticas.

La charla de Riemann constaba de dos partes: en la primera parte planteaba el problema de cómo definir un espacio n-dimensional y terminó dando una definición de lo que hoy llamamos *espacio de Riemann*.

Hans Freudenthal escribe: "Posee líneas más cortas, llamadas geodésicas, que se parecen a las líneas rectas ordinarias. De hecho, en una primera aproximación en un sistema de coordenadas geodésicas, dicha métrica es euclidiana plana, de la misma manera que una superficie curva hasta términos de orden superior se parece a su plano tangente. Los seres que viven en la superficie pueden descubrir la curvatura de su mundo y calcularla en cualquier punto como consecuencia de las desviaciones observadas respecto del teorema de Pitágoras".

De hecho, el punto principal de esta parte de la conferencia de Riemann era la definición del tensor de curvatura. La segunda parte planteaba preguntas profundas sobre la relación de la geometría con el mundo en el que vivimos. Preguntaba cuál era la dimensión del espacio real y qué geometría describía el espacio real. La conferencia estaba demasiado adelantada a su tiempo para que la mayoría de los científicos de la época la apreciaran.

Michael Monastyrsky afirma: "Entre los oyentes de Riemann, solo Gauss fue capaz de apreciar la profundidad de sus reflexiones. La conferencia superó todas sus expectativas y lo sorprendió enormemente. Al regresar a la reunión de la facultad, habló con los mayores elogios y un entusiasmo poco común con Wilhelm Weber sobre la profundidad de las reflexiones que había expuesto Riemann".

No se comprendió plenamente hasta sesenta años después. Freudenthal asegura que "La teoría general de la relatividad justificaba espléndidamente su trabajo. En el aparato matemático desarrollado a partir del discurso de Riemann, Einstein encontró el marco que encajaba con sus ideas físicas, su cosmología y su cosmogonía: y el espíritu del discurso de Riemann era justo lo que necesitaba la física: la estructura métrica determinada por los datos".

De modo que esta brillante obra le dio derecho a Riemann a empezar a dar conferencias. Sin embargo: "Poco antes, en septiembre, había leído un informe sobre las leyes de la distribución de la electricidad estática en una sesión de la Sociedad de Investigadores Científicos y Médicos de Gotinga".

En una carta a su padre, Riemann recordaba, entre otras cosas, que "el hecho de haber hablado en una reunión científica fue útil para mis conferencias". En octubre se puso a trabajar en sus conferencias sobre ecuaciones diferenciales parciales. Su correspondencia con su querido padre estaba llena de recuerdos acerca de las dificultades con las que se había encontrado. Aunque solo ocho estudiantes asistieron a las conferencias, Riemann estaba completamente feliz. Poco a poco superó su timidez natural y estableció una relación con su público.

En 1855, Dirichlet ocupó la cátedra de Gauss en Gotinga. En esa época, Riemann intentó conseguir una cátedra personal, pero fracasó. Sin embargo, dos años más tarde fue nombrado profesor y logró publicar otra de sus obras maestras.

El artículo "Teoría de las funciones abelianas" fue el resultado de un trabajo realizado durante varios años y se incluyó en un ciclo de conferencias que impartió a tres personas entre 1855 y 1856. Una de las tres era Dedekind, que pudo hacer accesible la belleza de las conferencias de Riemann publicando el material después de la temprana muerte de este. Este artículo retomaba donde había quedado su tesis doctoral y desarrollaba aún más la idea de las *superficies de Riemann* y sus propiedades topológicas. Examinaba las funciones multivaluadas como de un solo valor sobre una superficie especial de Riemann y resolvía problemas generales de inversión que habían sido resueltos para integrales elípticas por Abel y Jacobi. Aunque Riemann no fue el único matemático que trabajó en tales ideas. Klein escribe: "[...] cuando Weierstrass presentó un primer tratamiento de las funciones abelianas generales a la Academia de Berlín en 1857, el artículo de Riemann sobre el mismo tema apareció en el *Crelle's Journal*, volumen 54. Contenía tantos conceptos nuevos e inesperados que Weierstrass retiró su artículo y, de hecho, no lo publicó más".

Para los resultados de este artículo de 1857, Riemann volvió a utilizar el principio de Dirichlet que ya había aplicado en su tesis. Sin embargo, Karl Weierstrass demostró que había un problema con el mismo. Klein agrega: "La mayoría de los matemáticos se apartaron de Riemann [...] Riemann tenía una opinión muy diferente. Reconocía plenamente la justicia y la corrección de la crítica de Weierstrass, pero decía, como el mismo Weierstrass me dijo una vez, que apelaba al principio de Dirichlet solo como una herramienta conveniente y a mano, y que sus teoremas de existencia siguen siendo correctos".

Al final de este apartado volveremos a explicar cómo se resolvió el problema del uso del principio de Dirichlet en la obra de Riemann. En 1858, Enrico Betti, Felice Casorati y Francesco Brioschi visitaron Gotinga y Riemann conversó con ellos sobre sus ideas en topología. Esto le produjo un placer particular y quizás Betti se haya beneficiado en particular de sus contactos con él, los cuales se afianzaron cuando Riemann visitó a Betti en Italia, en 1863. Se conocen dos cartas de Betti que evidencian las ideas topológicas que aprendió de Riemann.

En 1859, Dirichlet murió y Riemann fue designado para la cátedra de matemáticas en Gotinga el 30 de julio. Unos días después fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín. Había sido propuesto por tres de los matemáticos berlineses, Ernst Kummer, Carl Wilhelm Borchardt y Weierstrass, cuyos argumentos decían: "Antes de la aparición de su obra más reciente [*Teoría de las funciones abelianas*], Riemann era casi desconocido para los matemáticos. Esta circunstancia excusa en cierto modo la necesidad de un examen más detallado de sus obras como base de nuestra presentación. Consideramos que era nuestro deber dirigir la atención de la Academia hacia nuestro colega, a quien recomendamos no como un joven talento que brinda grandes esperanzas, sino más bien como un investigador plenamente maduro e independiente en nuestra área de la ciencia, cuyo progreso ha promovido en gran medida".

Un miembro recién elegido de la Academia de Ciencias de Berlín tuvo que informar sobre sus investigaciones más recientes y Riemann envió una reseña sobre "El número de primos menores de una magnitud dada", otra de sus grandes obras maestras que cambiarían la dirección de la investigación matemática de una manera muy significativa. En este trabajo, Riemann examinó la función zeta

$$\zeta(s)=\sum\frac{1}{n_s}=\prod\frac{1}{1-p^{-el}}$$

que ya había sido considerada por Euler. Aquí, la suma es sobre todos los números naturales n mientras que el producto es sobre todos los números primos. Riemann consideró una cuestión muy diferente de la que había considerado Euler, ya que concibió la función zeta como una función compleja, en lugar de una función real. Salvo unas pocas excepciones triviales, todas las raíces de $\zeta(s)$ se encuentran entre 0 y 1. En el artículo, afirmó que la función zeta tenía infinitas raíces no triviales y que parecía probable que todas tuvieran una parte real, $\frac{1}{2}$. Esta es la famosa *hipótesis de Riemann*, que sigue siendo hoy uno de los problemas más importantes sin resolver de las matemáticas.

Riemann estudió la convergencia de la representación en serie de la función zeta y encontró una ecuación funcional para esta. El objetivo principal del trabajo era proporcionar estimaciones para el número de primos menores que un número dado. Muchos de los resultados que obtuvo fueron demostrados más tarde por Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin.

En junio de 1862, Riemann se casó con Elise Koch, que era una amiga de su hermana. Tuvieron una hija. En el otoño del año de su matrimonio, Riemann se resfrió y contrajo tuberculosis. Nunca había tenido una buena constitución física y sus graves problemas de salud probablemente se remontaban a mucho antes de este resfriado. De hecho, su madre había muerto cuando él tenía 20 años, mientras que su hermano y tres de sus hermanas murieron jóvenes. Riemann intentó luchar contra la enfermedad yendo al clima más cálido de Italia.

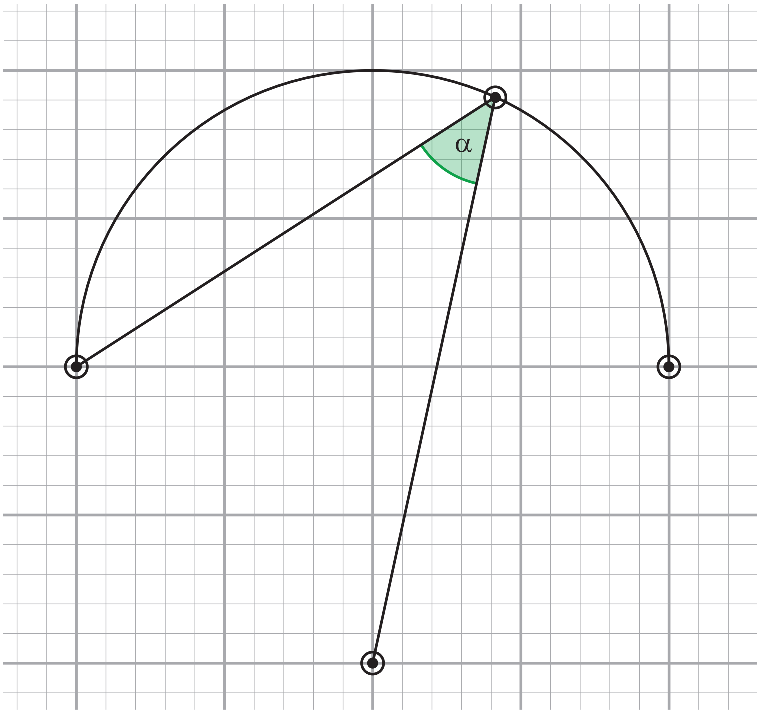
Pasó el invierno de 1862-1863 en Sicilia y luego viajó por Italia, pasando tiempo con Betti y otros matemáticos italianos que lo habían visitado en Gotinga. Regresó en junio de 1863, pero su salud pronto se deterioró nuevamente y volvió a viajar a Italia. Después de pasar desde agosto de 1864 a octubre de 1865 en el norte del país, regresó a Gotinga para el invierno de 1865-1866, antes de retornar a Selasca, en las orillas del lago Maggiore, el 16 de junio de 1866. Dedekind escribe: "Sus fuerzas decaían rápidamente y él mismo sentía que su fin estaba próximo. Pero aun así, el día antes de su muerte, descansando bajo una higuera con el alma llena de alegría ante el glorioso paisaje, trabajó en su última obra que, por desgracia, quedó inconclusa".

Por último, volvamos a la crítica de Weierstrass al uso que Riemann hace del principio de Dirichlet. Weierstrass había demostrado que el principio de Dirichlet no garantizaba una función minimizadora. Esto tuvo por efecto que la gente dudara de los métodos de Riemann. Freudenthal afirma: "Todos utilizaron el material de Riemann, pero su método fue completamente descuidado. [...] Durante el resto del siglo, los resultados de Riemann ejercieron una tremenda influencia; pero su manera de pensar, poca".

Weierstrass creía firmemente en los resultados de Riemann, a pesar de su propio descubrimiento del problema respecto del principio de Dirichlet. Pidió a su alumno Hermann Schwarz que intentara encontrar otras pruebas de los teoremas de existencia de Riemann que no utilizaran este concepto. Lo consiguió durante 1869-1870. Sin embargo, Klein estaba fascinado por el enfoque geométrico de Riemann y escribió en 1892 un libro en el que daba su versión del trabajo de este, aunque escrito en gran medida con el espíritu de Riemann. Freudenthal escribe: "Es un libro hermoso y sería interesante saber cómo fue recibido. Probablemente a muchos les ofendió su falta de rigor: Klein se parecía demasiado a Riemann como para convencer a quienes no lo creyeran".

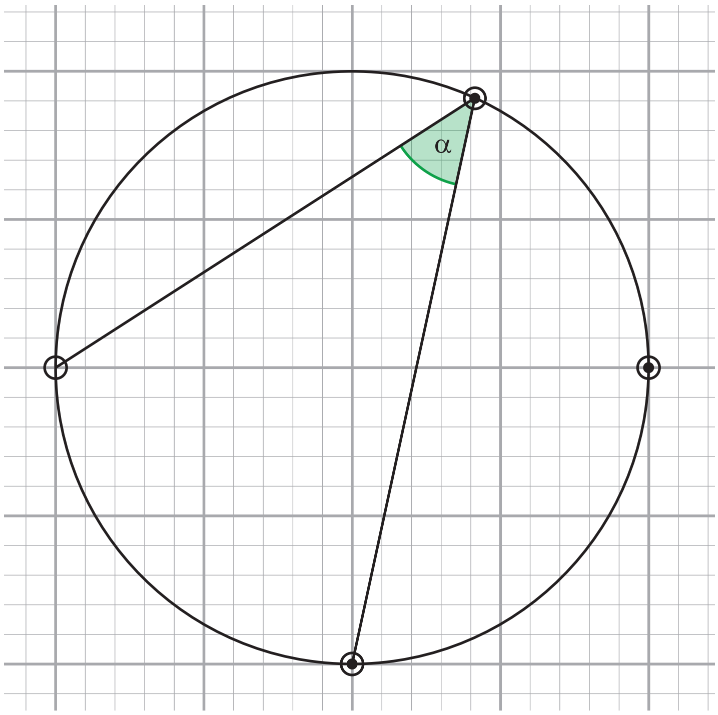
En 1901, Hilbert corrigió el planteo de Riemann al proporcionar la forma correcta del principio de Dirichlet, necesaria para que las demostraciones de Riemann fueran rigurosas. Sin embargo, la búsqueda de una demostración rigurosa no había sido una pérdida de tiempo, ya que Alfred Clebsch, Camille Jordan, Alexander von Brill y Max Noether descubrieron muchas ideas algebraicas importantes mientras intentaban demostrar los resultados de Riemann. Monastyrsky sostiene: "Es difícil recordar otro ejemplo en la historia de la matemática del siglo XIX en el que la lucha por una prueba rigurosa condujera a resultados tan productivos".

Con la información de la figura siguiente dada en la cuadrícula, hallar el valor del ángulo α.

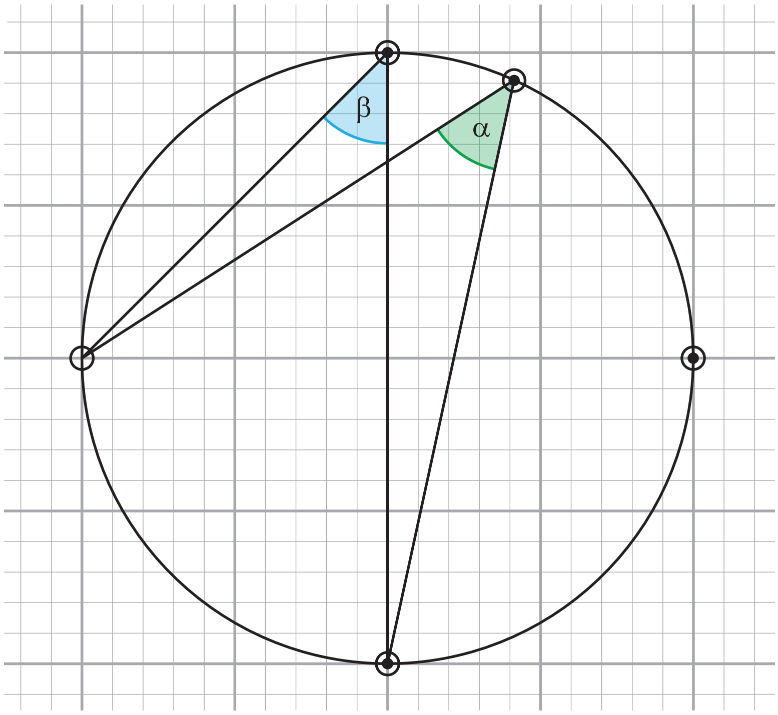


Solución

Completando la semicircunferencia a una circunferencia, se tiene que α es un ángulo inscripto.



El valor del ángulo α es igual al valor del ángulo β, indicado en la siguiente figura:



Pero resulta claro que el valor de β es 45°.