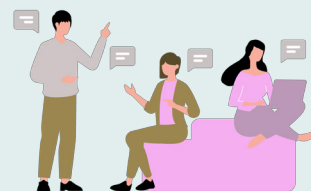
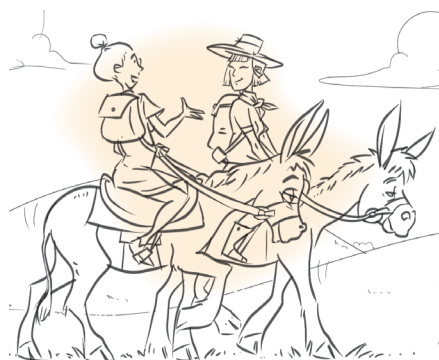


“[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen”. Dr. Alberto Calderón



I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Continúa de Leñitas Geométricas 7ª época, N° 10, Cap. “Aparición del álgebra abstracta”

CRISTALOGRAFÍA BIDIMENSIONAL

La cristalografía matemática constituye una de las aplicaciones más importantes de la geometría elemental a la física. La teoría tridimensional es complicada, pero su análoga en dos dimensiones es fácil de visualizar, sin que por ello sea trivial. Los diseños que abarcan el plano provienen de una manera natural de los diseños de franjas que se consideraron anteriormente. Sin

embargo, a pesar de la restricción a dos dimensiones, una relación completa de la enumeración de los grupos infinitos de simetría no entra, por ahora, en nuestros propósitos.

1. Las celosías y sus regiones de Dirichlet

Los *grupos infinitos bidimensionales* (los grupos de simetría de diseños que se repiten, como los que se ven en el papel tapiz para pared, para forrar cuadernos o libros o en los pisos de baldosa) se distinguen de los grupos infinitos *unidimensionales* debido a la presencia de traslaciones *independientes*; es decir, traslaciones cuya dirección no es ni paralela ni opuesta.



Grupos infinitos bidimensionales en papel de pared.

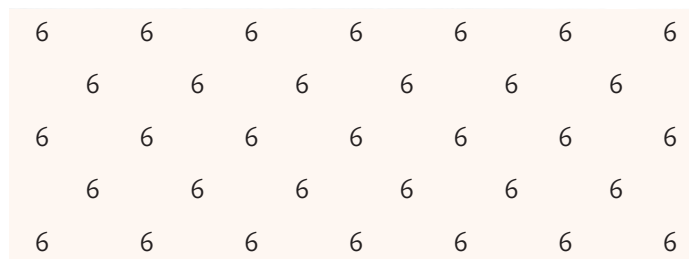
Yevgraf Stepánovich Fiódorov (22 de diciembre de 1853-21 de mayo de 1919) fue un matemático, cristalógrafo y mineralogista ruso que demostró la existencia de diecisiete de esos grupos de isometrías. En el siglo xx fueron redescubiertos por George Pólya y Paul Niggli. Los símbolos que emplearemos para denotarlos son los de las Tablas Internacionales de Cristalografía de Rayos X.

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer, Harold Scott Macdonald Coxeter y Roger Penrose.

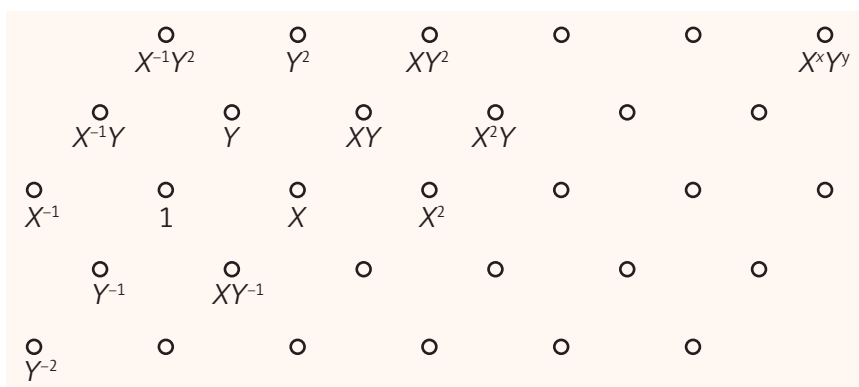
El caso más sencillo es el del grupo **p1**, al que generan dos traslaciones independientes X , Y . Como la inversa de una traslación es otra traslación y el producto de dos traslaciones es también una traslación, este grupo consiste solamente de traslaciones. Como $XY = YX$, estas traslaciones son simplemente X^xY^y para todo par de enteros x , y . De una manera abstracta, tenemos aquí el *producto directo* $C_\infty \times C_\infty$, al que una sola relación lo define:

$$XY = YX.$$

Un objeto cualquiera, como la numeral 6 de la figura siguiente,



es transformado por el grupo **p1** en una colección infinita de objetos, dispuestos de manera que forman un diseño. Y también **p1** es el grupo de simetría completo del diseño, puesto que el objeto carece de simetría intrínseca. Cuando el objeto es un solo punto, el diseño será una colección de puntos que se llama *celosía bidimensional* y que puede ser visualizado como el plano de una huerta infinita. Cada punto de la celosía se asocia de manera natural con el símbolo de la traslación por medio de la que se le derivó del punto original 1 (véase la figura siguiente).



Cualquiera que entre en una huerta puede observar la alineación de árboles en muchas direcciones; esto se parece a una propiedad típica de una celosía: la recta que una dos de sus puntos contiene también una infinidad de ellos, a espacios regulares, es decir, una *celosía unidimensional*. De hecho, la recta que une los puntos 1 y X^xY^y también contiene los puntos

Elementos de geometría afín en el plano y en el espacio



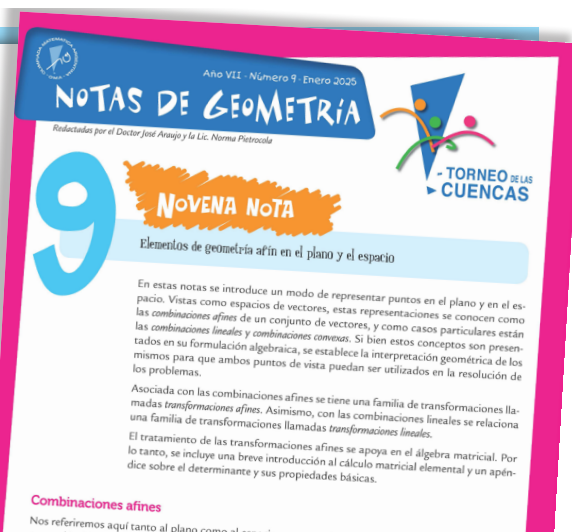
fenchu@oma.org.ar

11 4826 8976

+54 9 11 5035 7537

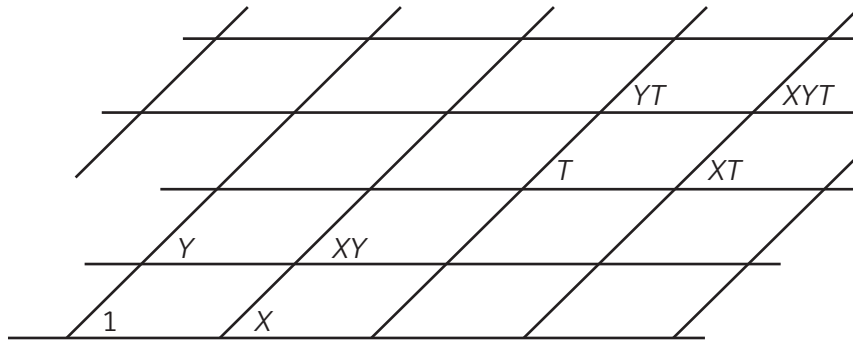
¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



$$X^{nx/d}Y^{ny/d} = (X^{x/d}Y^{y/d})^n,$$

donde d es el máximo común divisor de x y de y , y n puede ser cualquier entero. En particular, las potencias de X se encuentran todas sobre una recta, las de Y en otra, y las rectas que son paralelas a estas y pasan por los demás puntos de la celosía forman un mosaico de paralelogramos congruentes que llena el plano sin dejar intersticios (figura siguiente).



Empleamos el término *mosaico* para designar cualquier arreglo de polígonos que encajan entre sí de manera que cubren todo el plano sin que ninguno se traslape. Un paralelogramo típico es el que forman los cuatro puntos 1, X, XY, Y.

La traslación $T = X^x Y^y$ transforma a este paralelogramo en otro que tiene como “primera” esquina el punto T (en lugar de 1). Hay así una correspondencia uno-a-uno entre todas las celdas o piezas del mosaico y las transformaciones del grupo, con la propiedad de que cada transformación lleva un punto cualquiera del interior de la celda original a un punto situado de manera parecida en la nueva celda. Por esta razón, el paralelogramo típico se llama *región fundamental*.

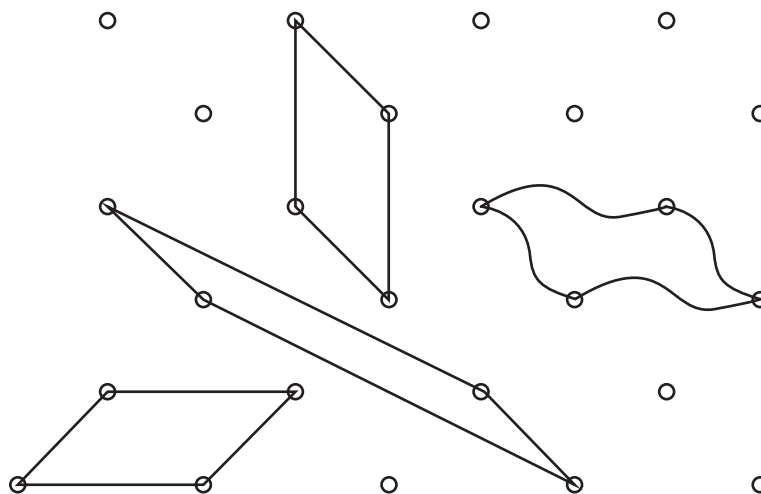
La forma de la región fundamental dista mucho de ser única. Cualquier paralelogramo servirá, siempre y cuando tenga por vértices cuatro puntos de la celosía y no haya ninguno dentro de él ni en sus lados. Esta es la contrapartida geométrica de la afirmación algebraica acerca de que el grupo que generan X, Y se genera igualmente por $X^a Y^b, X^c Y^d$, siempre y cuando

$$ad - bc = \pm 1.$$

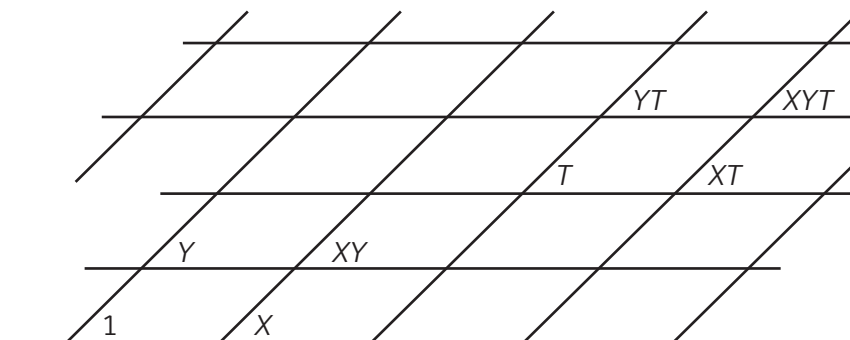
Para expresar los viejos generadores en términos de los nuevos, observaremos que

$$(X^a Y^b)^d (X^c Y^d)^{-b} = X^{ad-bc}, \quad (X^a Y^b)^{-c} (X^c Y^d)^a = Y^{ad-bc}.$$

Pero no es necesario que la región fundamental sea un paralelogramo; por ejemplo, podemos reemplazar cada par de lados opuestos por un par de curvas congruentes, como se ha hecho en la figura siguiente.



Cualquiera de las posibles regiones fundamentales, ya sea que hayamos escogido un paralelogramo o cualquier otra forma, tendrá la misma área que el paralelogramo típico de la figura que sigue.



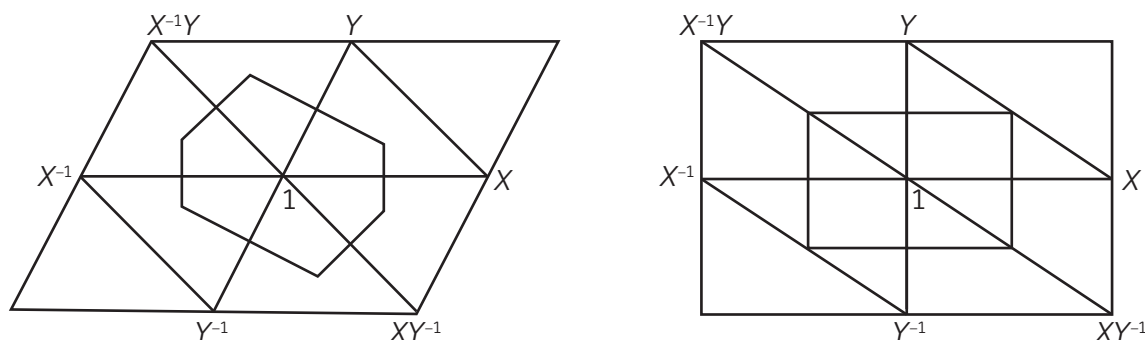
Esto se explica al considerar que en el interior de un círculo suficientemente grande el número de puntos de la celosía será igual al número de réplicas de cualquier región fundamental (con un error insignificante, debido a las regiones mutiladas por la circunferencia); así, cada forma tiene como área la misma fracción del área del círculo grande. Un hecho interesante es que cualquier región fundamental *convexa* es, en lo que se refiere al grupo de traslación, un polígono de simetría central, a saber, un paralelogramo o un hexágono de simetría central.

Entre los distintos paralelogramos posibles, podemos escoger uno como norma, al que diremos *reducido*, al tomar el generador Y como la traslación más corta (o una de las más cortas) del grupo, y a X como una traslación, igual o la más cercana, en otra dirección. Si tenemos entonces que el ángulo entre X y Y es obtuso, invertimos la dirección de Y . Así, entre todos los paralelogramos susceptibles de servir como regiones fundamentales, nuestro paralelogramo tiene los lados más cortos. Las traslaciones a lo largo de estos lados se llaman, de manera natural, *generadores reducidos*.

Al unir los vértices X, Y del paralelogramo reducido y los pares correspondientes de vértices de sus réplicas, obtenemos un mosaico de triángulos congruentes con vértices en los puntos de la celosía, ninguno de cuyos ángulos es obtuso. Cada punto de la celosía pertenece a seis de los triángulos: por ejemplo, los triángulos que rodean al punto 1 lo unen a pares de puntos adyacentes en el ciclo

$$X, Y, X^1Y, X^1, Y^1, XY^1$$

(ver la siguiente figura de análisis).



Al unir los circuncentros de los seis triángulos, se obtiene la *región de Dirichlet* o “polígono de Voronoi” de la celosía: un polígono cuyos puntos interiores son todos los puntos del plano que están más cerca de un punto de la celosía en particular (como el punto 1) que de cualquier otro. Estas regiones, tales que cada una rodea a un punto de la celosía, evidentemente encajan bien y llenan todo el plano; de hecho, la región de Dirichlet es una clase particular de región fundamental.

La *región de Dirichlet*, a menudo referida como la *célula de Wigner-Seitz* o el *dominio de influencia*, es un concepto clave en la teoría de sólidos cristalinos. Define la región espacial que pertenece a un punto de la red (o sea, un punto donde se encuentra un átomo o ion), es decir que es más cercana a ese punto que a cualquier otro punto de la red. En esencia, es la región más cercana a un punto en el espacio que contiene solo ese punto de la red.

Recordemos que, en matemáticas, la condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859),

cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar las soluciones a esas ecuaciones con esta condición se la conoce como *problema de Dirichlet*.

Volviendo a la celosía, esta es simétrica por medio de un semigiros alrededor del punto 1 (u otro cualquiera de la celosía), pues al aplicarlo se intercambian los pares de puntos de la celosía X^xY^y , $X^{-x}Y^{-y}$. (En el lenguaje técnico se dice que el grupo $p1$ tiene un automorfismo de período 2 que reemplaza a X y a Y por sus inversos.) Por lo tanto, la *región de Dirichlet es simétrica por un semigiro*.

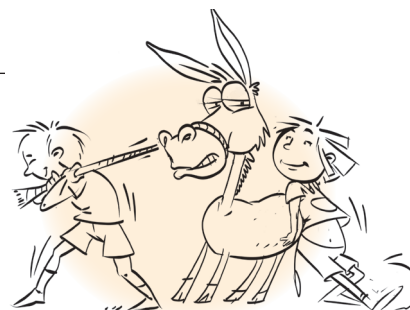
Su forma precisa depende de las longitudes relativas de las traslaciones generatrices X , Y y del ángulo que forman. Si el ángulo es recto, la región de Dirichlet será un rectángulo (o un cuadrado), puesto que el circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa. En todos los demás casos, es un hexágono (no ha de ser necesariamente un hexágono regular: pero como tiene simetría central, los pares de lados opuestos son iguales y paralelos).

Si se hace variar la celosía al permitir que el ángulo que forman las traslaciones X y Y aumente gradualmente hasta 90° , veremos que dos de los lados opuestos del hexágono se encogen hasta convertirse en vértices, y entonces los cuatro lados restantes formarán un rectángulo (o un cuadrado).

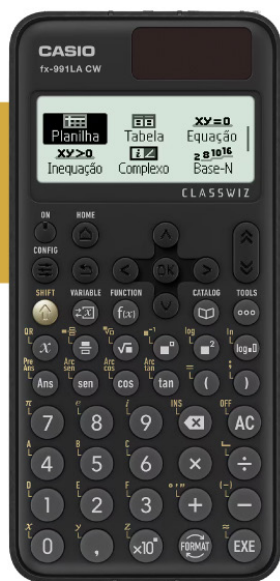
Las reflexiones en cuatro de los seis lados de la región de Dirichlet transforman el punto central de la celosía 1 en cuatro o seis puntos distintos de la celosía, que se llaman naturalmente *vecinos del punto 1*.

Ejercicios de entrenamiento

1. Dos lados opuestos cualesquiera de una región de Dirichlet son perpendiculares a la recta que une sus puntos medios. Demostrar.
2. Dibújense los distintos tipos de celosías que se pueden presentar si se sujeta a X y Y a las restricciones siguientes: pueden tener la misma longitud y el ángulo que formen puede ser de 90° o de 60° . Señalar la región de Dirichlet en cada uno de los casos y buscar el grupo de simetría de esta región, que sea C_2 , D_2 , D_4 , o D_6 .



Calculadora Científica
CLASSWIZ CASIO.



CASIO ha mejorado sus calculadoras científicas de la línea **ClassWiz**, creando calculadoras intuitivas y fáciles de usar.

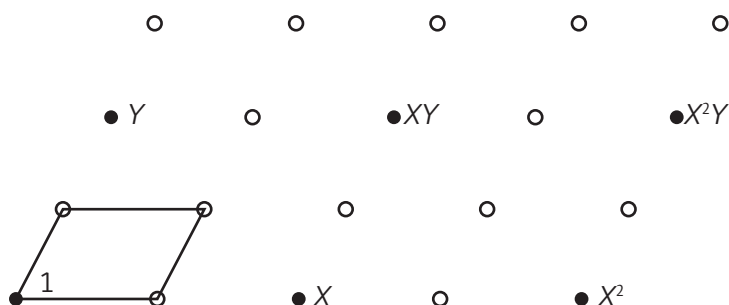
Descubrí toda línea **CASIO** en:

www.calculadoras.ar

@calculadoras.ar

2. El grupo de simetría de la celosía general

La investigación de las simetrías en una estructura matemática siempre ha dado resultados importantes. Es fácil observar que cualquier celosía es simétrica por el semigiro alrededor del punto medio del segmento que une dos puntos cualesquiera de la celosía. Esos puntos medios forman una nueva celosía de malla más fina, cuyas traslaciones generatrices tienen una longitud que es la mitad de la de X y Y . Véase los puntos “abiertos” de la figura siguiente.



La celosía “general” se presenta cuando los generadores reducidos son de longitudes diferentes y el ángulo que forman no es de 90° ni de 60° . En un caso así, las traslaciones X^xY^y y los semigiros que hemos mencionado son sus únicas operaciones de simetría. En otras palabras, el grupo de simetría de la celosía general se deriva de **p1** al añadir una nueva transformación H , que es el semigiro alrededor del punto 1.

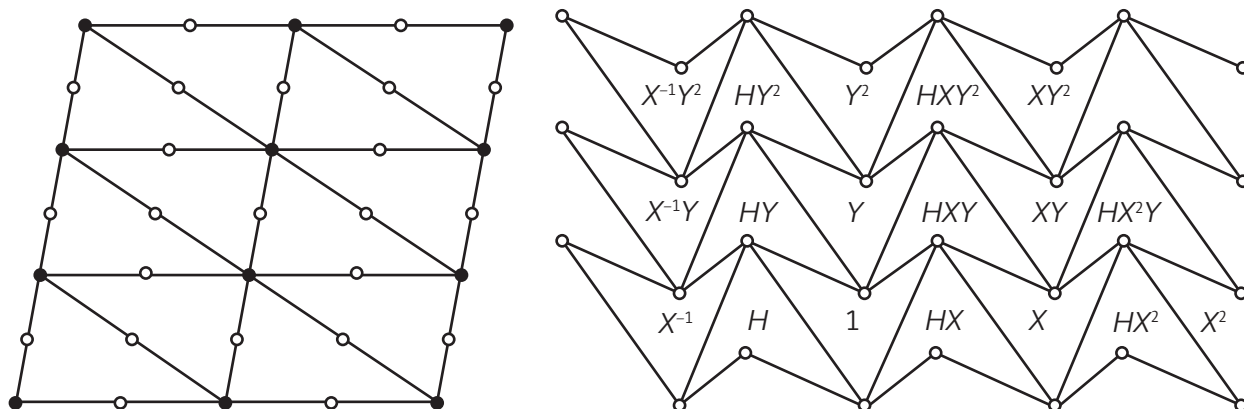
Este grupo se denota por **p2**. Lo generan el semigiro H y las traslaciones X, Y , en cuyos términos el semigiro que intercambia los puntos 1 y $T = X^xY^y$ es HT . (Adviértase que el mismo T es ya producto de H y HT .) El grupo se genera también por medio de los tres semigiros HX, H, HY , o (aunque es redundante) por estos tres y su producto

$$HX \cdot H \cdot HY = HXY,$$

que son semigiros alrededor de los cuatro vértices del paralelogramo de la figura de arriba.

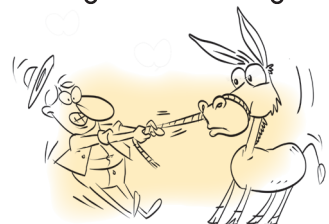
Una característica notable de cualquier triángulo o cualquier cuadrángulo simple (no necesariamente convexo) consiste en que sirven como regiones fundamentales de **p2**.

Los semigiros alrededor de los puntos medios de los tres o cuatro lados siempre se pueden identificar con HX, H, HY (ver figuras de abajo) o con HX, H, HY, HXY .



Ejercicios para fijar ideas

1. ¿Por qué razón forman los vértices de los cuadrángulos de la figura anterior de derecha dos celosías superpuestas?
2. Dibújese el mosaico de las regiones de Dirichlet que corresponden a una celosía determinada. Divídase a continuación cada región en dos mitades por medio de una diagonal. El mosaico que resulta es un caso especial del mosaico de triángulos escalenos (figura anterior de izquierda) o de cuadrángulos irregulares (figura anterior de derecha), según sea la región de Dirichlet rectangular o hexagonal.



3. El arte de M. C. Escher

Los grupos **p1** y **p2** son dos de los grupos discretos de isometría más sencillos, de los diecisiete en los que intervienen dos traslaciones independientes. En este y en el siguiente punto mencionaremos algunos más. Los generadores adecuados de todos ellos se han enumerado en la siguiente tabla:



Los 17 grupos espaciales de la cristalografía bidimensional	
Símbolo	Generadores
p1	2 traslaciones
p2	3 semigiros
pm	2 reflexiones y 1 traslación
pg	2 reflexiones paralelas en deslizamiento
cm	1 reflexión y 1 reflexión paralela en deslizamiento
pmm	Las reflexiones en los 4 lados de un rectángulo
pmg	1 reflexión y 2 semigiros
pgg	2 reflexiones perpendiculares en deslizamiento
cmm	2 reflexiones perpendiculares y 1 semigiro
p4	1 semigiro y 1/4 de giro
p4m	Las reflexiones en los 3 lados de un triángulo de ángulos iguales a 45°, 45°, 90°
p4g	1 reflexión y 1/4 de giro
p3	2 rotaciones que recorren 120°
p3m1	1 reflexión y 1 rotación que recorre 120°
p31m	Las reflexiones en los 3 lados de un triángulo equilátero
p6	1 semigiro y una rotación que recorre 120°
p6m	Las reflexiones en los 3 lados de un triángulo de ángulos de 30°, 60°, 90°

El desarrollo del arte que consiste en llenar un plano con un diseño que se repite alcanzó su clímax en la España del siglo XIII, cuando los moros aplicaron los diecisiete grupos en sus intrincados diseños decorativos de la Alhambra, en Granada. Su inclinación por los diseños abstractos provenía de la estricta observancia del segundo mandamiento. El artista holandés Maurits Cornelis Escher, que carece de esos escrúpulos, aplica con

gran ingenio estos grupos al servirse de formas animales para sus regiones fundamentales. Por ejemplo, el grupo de simetría de los jinetes a caballo representado en la lámina 1 siguiente

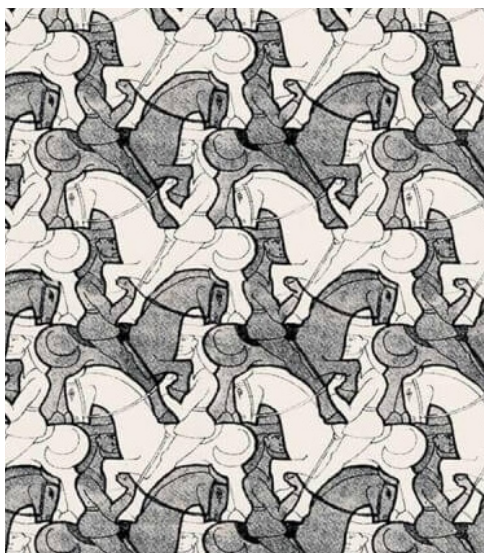


Lámina 1.

parece a primera vista **p1**, generado por una traslación horizontal y otra vertical. Pero si ignoramos la diferencia entre las áreas clara y oscura, obtenemos el grupo **pg**, que es más interesante, generado por dos reflexiones paralelas en deslizamiento, que podemos denotar por G y G' . Observemos que la traslación vertical puede quedar igualmente expresada como G^2 o G'^2 . Y es notable que la relación

$$G^2 = G'^2$$

proporcione por sí sola la definición abstracta completa de este grupo. Es claro que el jinete y su montura (al considerar cualquier color) constituyen una región fundamental de **pg**. Pero debemos combinar ambas regiones, una clara con una oscura, para obtener una región fundamental de **p1**.

De la misma manera, el grupo de simetría del diseño de Escher de los escarabajos (lámina 2)

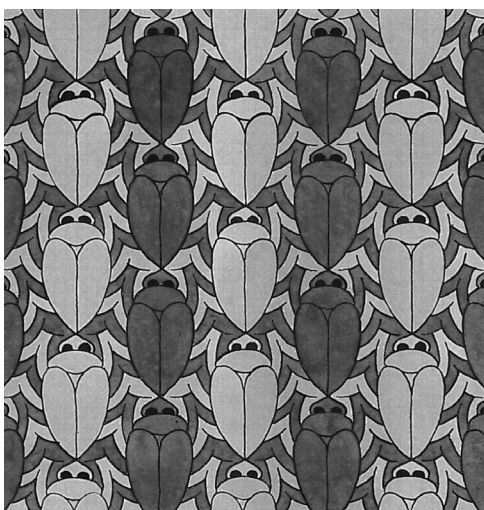
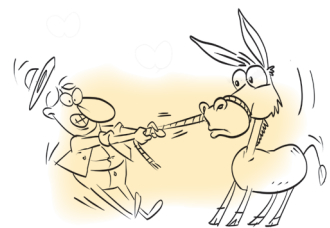


Lámina 2.

parece a primera vista **pm**, generado por dos reflexiones verticales y una traslación vertical. Pero al observar cuidadosamente, se advierte que hay escarabajos oscuros, además de los claros, y que los colores nuevamente se intercambian por medio de las reflexiones en deslizamiento. El grupo completo de simetría **cm**, cuya región fundamental es la mitad derecha o izquierda de un escarabajo de cualquier color, es generado por una reflexión vertical en deslizamiento junto con una reflexión vertical. Si queremos obtener una región fundamental del grupo más "pequeño" **pm**, deberemos combinar la mitad derecha de un escarabajo de un color con la mitad izquierda de un escarabajo adyacente del otro color. Un escarabajo completo (de cualquier color) constituye una región fundamental del grupo **p1** (donde una de sus traslaciones generatrices es oblicua) o igualmente del grupo **pg**.

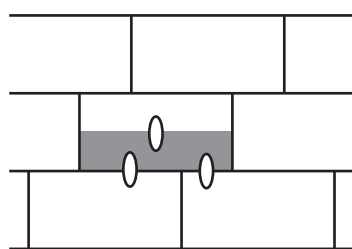
Ejercicios para fijar ideas

1. Ubíquense los ejes de dos reflexiones en deslizamiento tales que generen **pg** en las láminas 1 y 2.
2. Dos paralelogramos cualesquiera cuyos lados estén a lo largo de dos direcciones iguales pueden, entre ambos, llenar todo el plano si se los repite por medio de traslaciones. Demostrar.

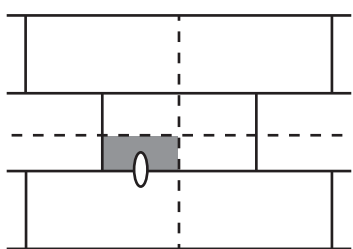


4. Seis diseños de ladrillos

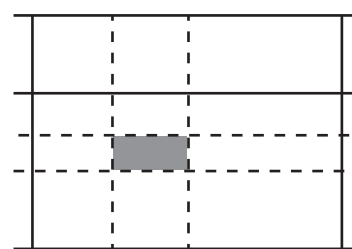
En la figura siguiente se puede ver que seis de los diecisiete grupos espaciales de dos dimensiones surgen como grupos de simetría de diseños familiares de rectángulos, a los que podríamos considerar como ladrillos o baldosas.



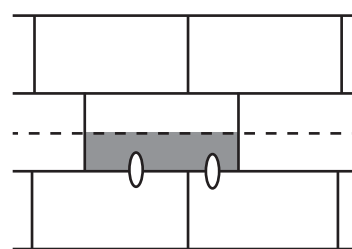
p2



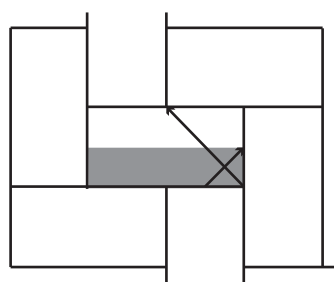
cmm



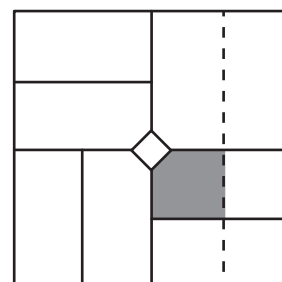
pmm



pmg



pgg



p4g

Ejercicio. Se entiende que en todos estos diseños un *ladrillo* es un rectángulo, uno de cuyos lados es dos veces mayor que el otro. En cada caso, todo ladrillo se relaciona con el diseño entero de la misma manera en que cualquier otro lo hace. (En lenguaje técnico, el grupo de simetría es *transitivo* en los ladrillos.) ¿Son estos seis los únicos diseños transitivos de ladrillos?

Los generadores lo señalan de esta manera: una línea punteada denota un espejo, una “lente” denota un semigiro, un cuadrado pequeño denota un cuarto de giro (es decir, una rotación que recorre 90°) y una “media flecha” denota una reflexión en deslizamiento.

En cada caso, la región fundamental se ha sombreado. Esta región se elige de manera, hasta cierto punto, arbitraria, con la excepción de la de **pmm**, donde queda totalmente limitada por espejos.

El procedimiento para analizar un diseño así es el que daremos a continuación. Tenemos que el grupo de simetría de un solo ladrillo es D_2 (de orden 4), que contiene a los subgrupos C_2 y D_1 . Si todas las operaciones de simetría del ladrillo son también operaciones de simetría de todo el diseño, como se tiene en **cmm** y **pmm**, la región fundamental es la cuarta parte de un ladrillo, dos de los generadores son las reflexiones que generan D_2 , y el otro generador es el que transforma nuestro ladrillo en un ladrillo vecino. Si solamente pertenece a todo el diseño el subgrupo C_2 o el D_1 (de la manera en que C_2 pertenece a **p2** o a **pgg**, y D_1 a **pmg** o a **p4g**), la región fundamental es la mitad de un ladrillo, y los generadores ya no se determinan de una manera obvia.

5. La restricción cristalográfica

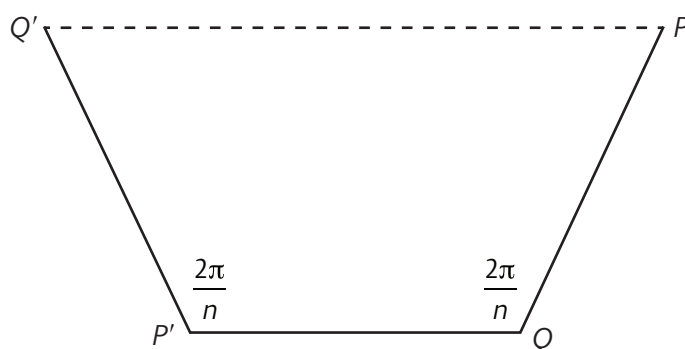


Recordemos una observación interesante de G. H. Hardy: “El matemático, como el pintor o el poeta, es un constructor de diseños. El hecho de que sus diseños sean más permanentes que los de los otros se debe a que están hechos con ideas”. Harold Scott Coxeter comparte estas consideraciones.

La relación completa de los diecisiete grupos espaciales y bidimensionales ocuparía demasiado espacio; pero vale la pena dar aquí la elegante demostración de Barlow de que los únicos subgrupos cíclicos posibles son C_2 , C_3 , C_4 y C_6 . Dicho de otra manera:

Los únicos períodos posibles de una operación rotacional de simetría de una celosía son 2, 3, 4, 6.

Sea P un centro cualquiera de rotación de período n . Las demás operaciones de simetría de la celosía traducen a P en infinitos centros diferentes de rotación que tienen el mismo período. Sea Q uno de estos centros distintos de P



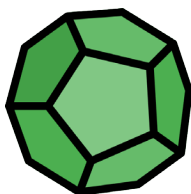
tal que esté a la menor distancia posible de él (figura anterior). Un tercer centro, P' , se deriva a partir de P mediante una rotación que recorre $2\pi/n$ alrededor de Q ; y un cuarto, Q' , se deriva de Q por medio de una rotación de $2\pi/n$ alrededor de P' . Por supuesto, los segmentos PQ , QP' , $P'Q'$ son todos iguales. Puede suceder que P y Q' coincidan; entonces, se tiene que $n = 6$. En todos los demás casos, debido a que hemos tomado Q a la menor distancia posible de P , tendremos que $PQ' \geq PQ$; por lo tanto, $n \leq 4$. (Cuando $n = 4$, $PQP'Q'$ es un cuadrado. Cuando $n = 5$, PQ' es obviamente más corto que PQ . Cuando $n = 6$, PQ corta a $P'Q'$, pero no necesitamos emplear ya Q' : tenemos que $PP' < PQ$, que es un resultado suficientemente absurdo.)

6. Mosaicos regulares

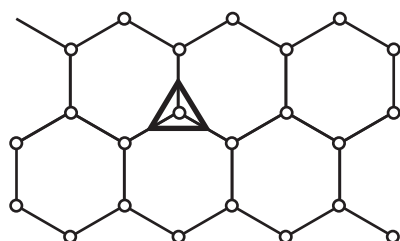
Probablemente, Johannes Kepler (1571-1630) fue el primero en investigar las maneras posibles de llenar el plano con polígonos iguales y regulares.

Ludwig Schläfli (15 de enero de 1814-20 de marzo de 1895) fue un geómetra suizo, estudioso del análisis de variable compleja, una de las figuras clave en el desarrollo de la noción de espacios de dimensiones mayores que 3. Junto con Arthur Cayley y Bernhard Riemann, es considerado uno de los arquitectos fundamentales de la geometría multidimensional.

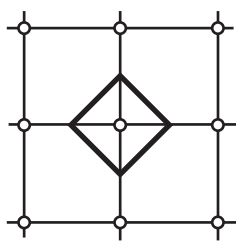
En geometría, el símbolo de Schläfli es una notación simple de la forma $\{p, q, r, \dots, w\}$, que proporciona un sumario de algunas propiedades importantes de un *polígono regular* o de una teselación, o embaledado regular. A nuestro geómetra suizo debe su nombre. El dodecaedro es un poliedro regular con el símbolo de Schläfli $\{5, 3\}$, porque tiene caras pentagonales (representadas por el número 5), y tres de ellas coinciden en cada vértice (situación indicada por el número 3) (figura siguiente).



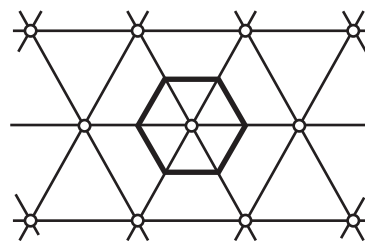
Encontraremos que resulta conveniente usar el símbolo de Schläfli $\{p, q\}$ para describir el mosaico de p -ágonos regulares donde q de ellos rodean a cada vértice. Los casos $\{6, 3\}$, $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ se representan en las figuras de abajo,



$\{6, 3\}$



$\{4, 4\}$

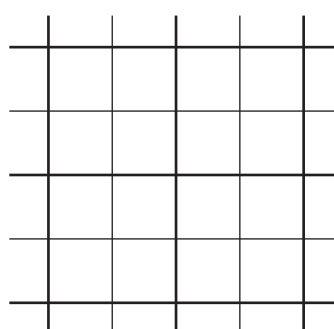
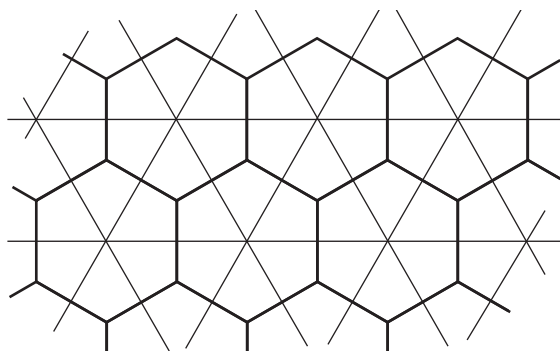


$\{3, 6\}$

donde en cada caso el polígono en líneas más gruesas es la *figura vertical*: el q -ágono cuyos vértices son los puntos medios de las q aristas que acuden a un vértice. Como los mosaicos tienen ciertas analogías con los poliedros, es natural el empleo de la palabra *arista* al hablar de lados comunes de polígonos adyacentes, como también diremos *cara* para significar a los polígonos mismos.

En busca de una definición formal, diremos que un mosaico es *regular* cuando tiene caras regulares y una figura vertical regular en todos los vértices.

El mosaico $\{6, 3\}$ se ve con frecuencia en los pisos de los cuartos de baño y también en cualquier panel. El $\{4, 4\}$ nos es familiar en las formas de papel cuadrículado; en términos de coordenadas cartesianas, sus vértices son los puntos en los que x e y son enteros. En $\{3, 5\}$ es el mosaico dual de $\{6, 3\}$ en el sentido siguiente: el *dual* de $\{p, q\}$ es el mosaico cuyas aristas son las mediatrices de las aristas de $\{p, q\}$ (ver la figura siguiente).



Así, el dual de $\{p, q\}$ es $\{q, p\}$ y viceversa; los vértices de cualquiera de ellos son los centros de las caras de otro. En particular, el dual de $\{4, 4\}$ es uno igual a él, $\{4, 4\}$. Obtenemos con facilidad los valores posibles de p y q al igualar el ángulo de un p -ágono, a saber $(1 - 2/p)\pi$, con el valor que ha de tener cuando hay q de estos polígonos reunidos en un vértice:

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, (p-2)(q-2) = 4.$$

Ya salió el tomo III

Un libro que reúne una serie de Notas escritas por matemáticos profesionales, con el fin de incorporar al área curricular algunas ideas importantes y temáticas interesantes, en forma clara y comprensible.



fenchu@oma.org.ar

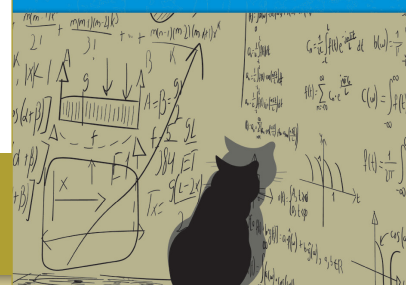
☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

ORIENTACIONES
EN LA
Geometría elemental

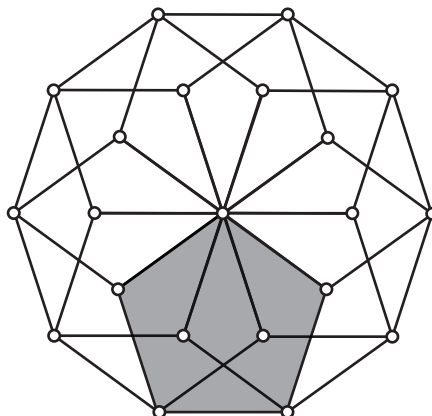
Tomo III



De las tres maneras posibles de factorizar 4, a saber

$$4 \cdot 1, 2 \cdot 2, 1 \cdot 4,$$

proviene los tres mosaicos que ya hemos descrito. Sin embargo, antes de afirmar que estos son los únicos mosaicos regulares, debemos investigar las soluciones fraccionarias de nuestra ecuación; pues podríamos tener, es decir, podemos concebir, un mosaico de “estrella” $\{p, q\}$ en el que la cara $\{p\}$ y la figura vertical $\{q\}$ sean polígonos regulares de la clase que ya consideramos. Por ejemplo, en la figura siguiente



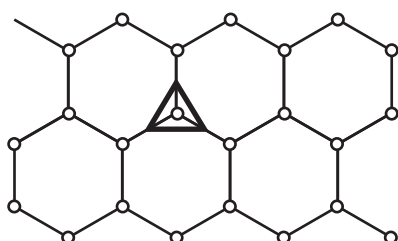
tenemos diez pentágonos que se han colocado juntos en un vértice común. Aunque se traslapan, podríamos pensar en añadir nuevos pentágonos con la esperanza de formar un mosaico $\left\{5, \frac{10}{3}\right\}$ (cuya figura vertical sea un decagrama), que cubra el plano un número determinado de veces. Pero, como veremos enseguida, este número es infinito.

Consideremos el mosaico regular general $\{p, q\}$ donde $p = n/d$. Si cubriera el plano un número finito de veces, debería haber una distancia mínima entre los centros de los pares de caras. Sean P, Q los centros de caras tales que los separa la distancia mínima. Puesto que son centros de rotación de período n , el argumento del que ya nos servimos en el punto anterior “La restricción cristalográfica” señala que los únicos valores posibles de n son 3, 4, 6. Por lo tanto, $d = 1$ y estos son los únicos valores posibles de p . En consecuencia, no hay mosaicos regulares de estrella. Es posible cubrir tres veces una esfera por medio de doce “pentágonos” cuyos lados son arcos de los círculos mayores.

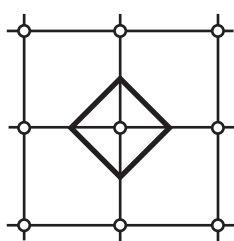
Para encontrar el grupo de simetría de un mosaico regular, aplicamos a su cara el tratamiento que dimos a los ladrillos recientemente en el punto “Seis diseños de ladrillos”. Es claro que el grupo de simetría de $\{p, q\}$ se deriva del grupo de simetría D_p de una de sus caras al añadir la reflexión en uno de los lados de la cara. Así, queda generado por las reflexiones en los lados de un triángulo cuyos ángulos serán π/p , en el centro de la cara; $\pi/2$, en el punto medio de una arista; y π/q , en un vértice.

Este triángulo constituye una región fundamental, puesto que se transforma en triángulos vecinos por medio de las tres reflexiones generatrices. Como cada generador conserva invariantes los puntos de uno de los lados, la región fundamental es única: no se puede modificar mediante sumas y restas de la manera en que Escher modifica las regiones fundamentales de algunos grupos.

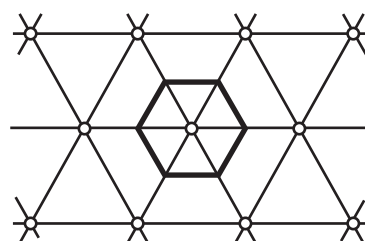
La retícula de estos triángulos, que llena el plano, es cortada por todas las rectas de simetría del mosaico regular. Las rectas de simetría incluyen las aristas de $\{p, q\}$ y de su dual $\{q, p\}$. Para $\{6, 3\}$ y el $\{3, 6\}$ (ver nuevamente las figuras),



$\{6, 3\}$



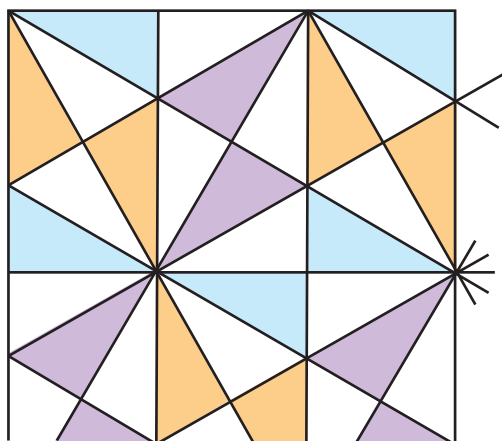
$\{4, 4\}$



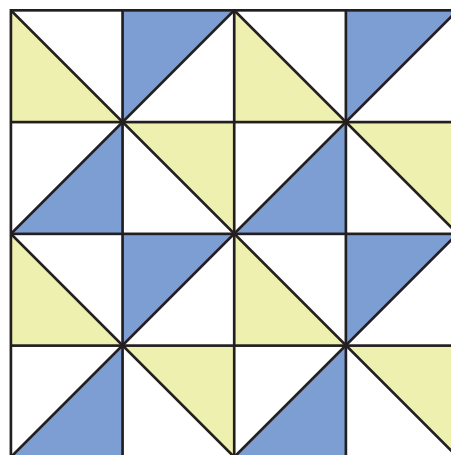
$\{3, 6\}$

estas rectas de las aristas son suficientes; en el caso de los duales $\{4, 4\}$ necesitaremos considerar también las diagonales de los cuadrados.

Las regiones alternas se han coloreado en las figuras siguientes,



p6 y p6m



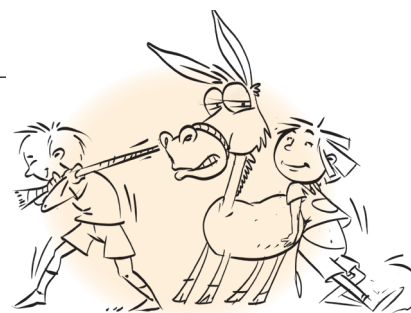
p4 y p4m

tanto para exhibir los grupos completos de simetría **p6m**, **p4m** como los subgrupos “directos” **p6**, **p4** (que consisten en rotaciones y traslaciones) que preservan los colores.

Pero, en lugar de derivar esta retícula de triángulos del mosaico regular, podemos proceder al revés y derivar el mosaico de la retícula. Con este propósito, escogeremos un punto de la retícula donde los ángulos sean de π/p , es decir, donde los p triángulos coloreados y los q blancos se reúnen. Estos $2p$ triángulos se combinan para dar forma a una cara de $\{p, q\}$.

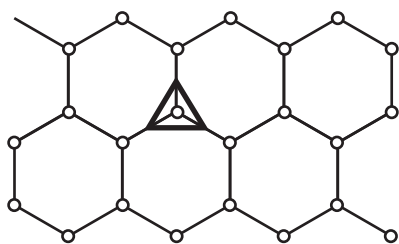
Ejercicios de entrenamiento

1. Justificar la definición formal que se dio de *regular* en la página 10. (Implica que las caras son iguales entre sí y que los vértices están rodeados de la misma manera.)
2. Por medio de un argumento general, demostrar que los puntos medios de las aristas de un mosaico regular pertenecen a una celosía. (**Indicación:** Considérese el grupo **p2** que generan los medios giros alrededor de tres puntos como esos.)
3. Señalar los puntos medios de las aristas de $\{6, 3\}$. Verificar que pertenecen a una celosía. ¿Constituyen la totalidad de la celosía?
4. Trazar porciones de celosías cuyos grupos de simetría sean **p2**, **pmm**, **cm**, **p4m**, **p6m**.

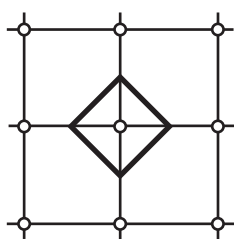


7. El problema de los puntos colineales de Sylvester

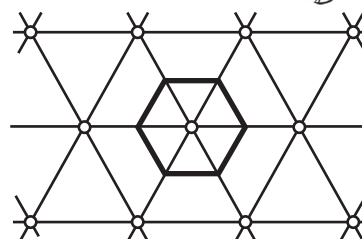
Como vimos al comienzo de este tema, una celosía es un conjunto discreto de puntos con la propiedad de que la recta que une a dos de ellos contiene además un número infinito de puntos de la celosía. Las figuras siguientes



$\{6, 3\}$



$\{4, 4\}$



$\{3, 6\}$



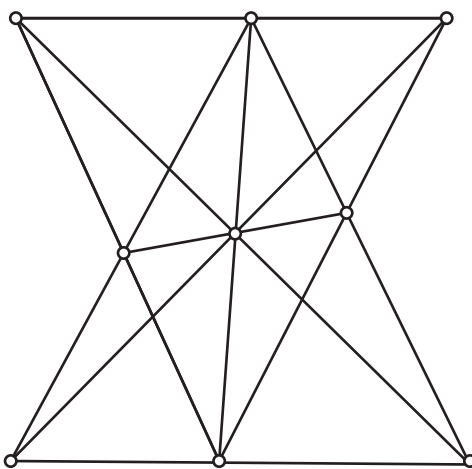
nos muestran una “huerta” finita en la que nueve puntos están dispuestos en diez filas de tres cada una. Es probable que haya sido al investigar estas configuraciones cuando a James Joseph Sylvester se le ocurrió el problema siguiente, que propuso en 1893:

“Demuéstrese que no se puede colocar ningún número finito de puntos reales de manera que una recta que pasa por cada dos de ellos pase también por un tercero, a menos que estén todos sobre la misma recta”.

Ni Sylvester ni ninguno de sus contemporáneos pudieron pensar en una demostración satisfactoria. El asunto fue olvidado hasta 1933, cuando Jovan Karamata y Paul Erdős lo revivieron y Tibor Gallai (alias Grünwald) finalmente tuvo éxito, con un argumento bastante complicado. La afirmación “negativa” de Sylvester fue redactada de nuevo, y “positivamente”, por Theodore Motzkin de esta manera:

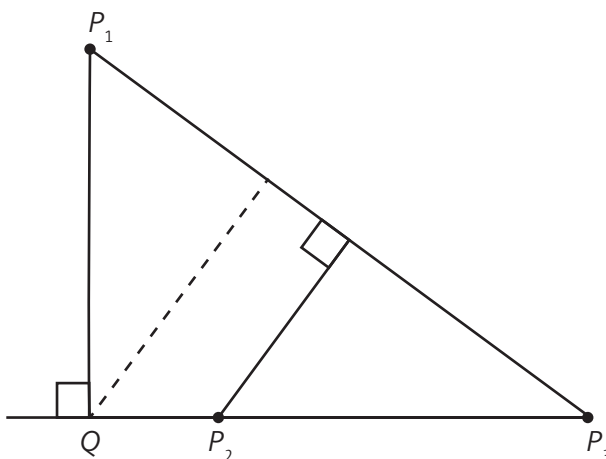
Si en el plano real se tiene que n puntos no están en la misma recta, existe una recta tal que contiene a dos de los puntos, exactamente.

La demostración que daremos a continuación, que se parece un poco a la demostración de Barlow ya comentada en el punto “La restricción cristalográfica”, se debe a Leroy Milton Kelly.



Los n puntos $P_1, \dots, P_n$ están unidos por no más de $\frac{1}{2}n(n-1)$ rectas P_1P_2, P_1P_3 , etc. Consideremos ahora los pares P_i, P_j que consisten en un punto y una recta de unión que no son incidentes. Como no puede haber más de $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ de estos pares, habrá por lo menos uno, digamos P_1, P_2P_3 con respecto al cual la distancia P_1Q desde el punto a la recta es la menor distancia de las que ocurren.

Entonces, tenemos que la recta P_2P_3 no contiene ningún otro punto del conjunto pues, si contuviera a P_4 , habría por lo menos dos de los puntos P_2, P_3, P_4 que quedarían a un lado de la perpendicular P_1Q (o también es posible que uno de los puntos P coincidiera con Q). Denominemos ahora a los puntos de manera que estos dos sean P_2, P_3 , donde P_2 está más cerca de Q (o coincide con Q).



Entonces P_2, P_3, P_1 (ver la figura de arriba) es otro par, que está a una distancia menor que P_1Q , lo que es absurdo. Esto completa la demostración de que siempre hay una recta que contiene exactamente a dos de los puntos. Por supuesto, puede haber más de una recta; de hecho, Kelly y Jürgen Moser han demostrado que el número de esas rectas no es menor que $3n/7$.

Ejercicios de entrenamiento

1. La demostración anterior implica la presencia de una recta que contenga solamente dos de los puntos P . El punto Q , de hecho, está entre P_2 y P_3 . Demostrar.
2. Si se tiene que n puntos no están en la misma recta, tienen por lo menos n rectas diferentes de unión. Demostrar.
3. Trazar una configuración de n puntos con respecto a los que se obtiene el límite más bajo de $3n/7$ rectas "ordinarias" que los unen. (Indicación: $n = 7$.)



II. Dialogando con los profesores sobre los sistemas numéricos y las transformaciones afines

¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?

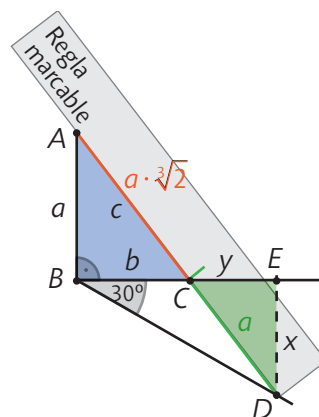
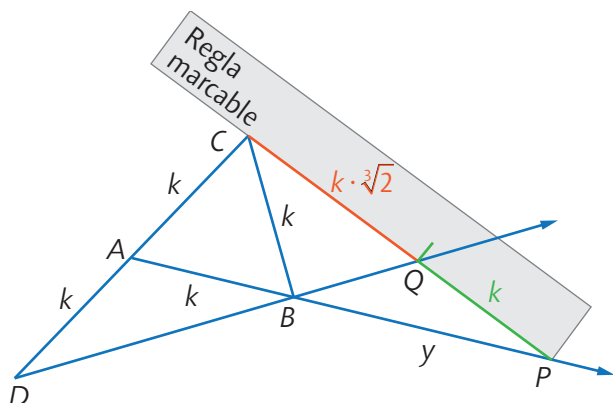


Continúa de Leñitas Geométricas 7ª época, N° 9, Apartado II, Cap. "Construcciones geométricas. Álgebra de los cuerpos numéricos"

IRRESOLUBILIDAD DE LOS TRES PROBLEMAS GRIEGOS

1. La duplicación del cubo

La *duplicación del cubo*, también conocida como el *problema de Delos*, describe una cuestión geométrica que consiste en construir un cubo que tenga el doble de volumen que un cubo dado. Es uno de los tres problemas clásicos de la matemática antigua, que ya había sido formulado en el siglo V a. C. en la Antigua Grecia.



Se llama *neusis* a las construcciones realizadas con la ayuda de una "inserción" en una regla. Además del compás utilizan una regla en la que se realiza una marca para fijar una medida como ayuda adicional. Izquierda: Construcción de *neusis* con regla marcada k = Arista del cubo inicial. Derecha: Construcción mediante *neusis* con regla marcada a = arista del cubo inicial $a : x = b : y = c : a = \sqrt[3]{2}$.

Estamos ahora en condiciones de investigar los viejos problemas de trisección del ángulo, duplicación del cubo y construcción del heptágono regular. Comenzaremos por la duplicación del cubo. Si se da un cubo cuya arista es la unidad de longitud, su volumen será la unidad de volumen; se desea encontrar la arista x de un cubo cuyo volumen sea el doble. Dicha arista satisfará a la sencilla ecuación cúbica:

$$x^3 - 2 = 0.$$

(1)

La demostración de que el número x no puede construirse con regla y compás es indirecta. Supondremos de momento que tal construcción es posible. Según lo dicho antes, esto significa que x pertenece a algún cuerpo F_k deducido, como ya se vio, del cuerpo racional, mediante sucesivas ampliaciones obtenidas por adjunción de raíces cuadradas. Como veremos, esta hipótesis nos lleva a una consecuencia absurda.

Sabemos que x no pertenece al cuerpo racional F_0 , pues $\sqrt[3]{2}$ es un número irracional. Luego, x puede pertenecer solo a algún cuerpo F_k , siendo k un entero positivo. Podemos suponer que k es el menor número entero positivo tal que x esté en algún F_k . Resulta entonces que x puede escribirse en la forma

$$x = p + q\sqrt{w},$$

donde p, q y w pertenecen a algún F_{k-1} , pero $\sqrt{w}$ no. A continuación, mediante un simple pero importante tipo de razonamiento algebraico, probaremos que si $x = p + q\sqrt{w}$ es una solución de la ecuación cúbica (1), entonces, $y = p - q\sqrt{w}$ es también solución. Como x está en el cuerpo F_k , también x^3 y $x^3 - 2$ estarán en F_k y tendremos

$$x^3 - 2 = a + b\sqrt{w}, \quad (2)$$

en donde a y b pertenecen a F_{k-1} . Mediante un sencillo cálculo, resulta $a = p^3 + 3pq^2w - 2$, $b = 3p^2q + q^3w$. Si hacemos

$$y = p - q\sqrt{w},$$

y sustituimos q por $-q$ en estas expresiones de a y b , vemos que

$$y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}. \quad (2')$$

Supongamos ahora que x es raíz de $x^3 - 2 = 0$ y, por tanto,

$$a + b\sqrt{w} = 0. \quad (3)$$

Esto implica –y aquí está la clave del argumento– que a y b son iguales a cero. Pues si b no fuera cero, se podría deducir de (3) que $\sqrt{w} = -a/b$, y $\sqrt{w}$ sería un número del cuerpo F_{k-1} al que pertenecen a y b , contrariamente a nuestra hipótesis. Siendo, pues, $b = 0$, se sigue inmediatamente de (3) que también $a = 0$.

Una vez visto que $a = b = 0$, es consecuencia inmediata de (2') que $y = p - q\sqrt{w}$ es también solución de la ecuación cúbica (1), por ser $y^3 - 2 = 0$. Además, $y \neq x$; es decir, $x - y \neq 0$, pues $x - y = 2q\sqrt{w}$ solo puede anularse si $q = 0$, de donde $x = p$ pertenecería a F_{k-1} , contra lo supuesto.

Hemos probado así que si $x = p + q\sqrt{w}$ es una solución de la ecuación cúbica (1), también $y = p - q\sqrt{w}$ es otra solución diferente de esta ecuación, lo que entraña una evidente contradicción, pues hay un único número real x que es raíz cúbica de 2, siendo las otras dos raíces cúbicas imaginarias (visto en "Fórmula de De Moivre y raíces de la unidad", en *Leñitas geométricas* 7ª época, N° 7, pp. 18-20); $y = p - q\sqrt{w}$, sin embargo, es real, ya que p, q y $\sqrt{w}$ son reales.

La hipótesis hecha nos ha llevado a un absurdo, quedando así demostrada su falsedad. Una solución de (1) no puede estar en el cuerpo F_k ; es decir, es imposible duplicar el cubo con regla y compás.

2. Un teorema sobre ecuaciones cúbicas

El razonamiento algebraico que acabamos de utilizar ha sido adaptado especialmente al problema particular analizado. Si deseamos ocuparnos de los otros dos problemas clásicos, es preferible proceder sobre una base más general. Los tres problemas dependen algebraicamente de ecuaciones cúbicas. Un hecho fundamental concerniente a la ecuación cúbica

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \quad (4)$$

es la relación siguiente entre las tres raíces x_1, x_2, x_3 de la misma:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \quad (5)$$

El polinomio $z^3 + az^2 + bz + c$ puede descomponerse en el producto $(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$, siendo x_1, x_2, x_3 las raíces de la ecuación (4). Por tanto,



$$z^3 + az^2 + bz + c = z^3 - (x_1 + x_2 + x_3)z^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)z - x_1x_2x_3,$$

y como el coeficiente de cada potencia debe ser el mismo en ambos miembros, resulta:

$$-a = x_1 + x_2 + x_3, \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad -c = x_1x_2x_3.$$

Consideremos la ecuación cúbica (4) con coeficientes a, b, c , racionales. Puede suceder que una de las raíces de la ecuación sea racional; por ejemplo, la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene la raíz racional 1, mientras que las otras dos raíces, dadas por la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$, son necesariamente imaginarias. Pero podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema general:

Si una ecuación cúbica de coeficientes racionales no tiene raíz racional, ninguna de sus raíces es construible partiendo del cuerpo racional F_0 .

Daremos nuevamente una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que x fuera una raíz construible de (4). Entonces, x pertenecería al último cuerpo F_k de alguna cadena de cuerpos sucesivamente ampliados $F_0, F_1, \dots, F_k$, como antes. Supondremos que k es el menor entero tal que una raíz de la ecuación cúbica (4) pertenece a F_k . Por supuesto que k debe ser mayor que cero, ya que en el enunciado del teorema se supone que ninguna raíz x pertenece al cuerpo racional F_0 ; luego, x puede escribirse en la forma

$$x = p + q\sqrt{w},$$

donde p, q, w pertenecen al cuerpo precedente F_{k-1} , pero $\sqrt{w}$ no. Sigue de ello, exactamente como para la ecuación particular $x^3 - 2 = 0$ anterior, que otro número de F_k ,

$$y = p - q\sqrt{w},$$

será también solución de la ecuación (4). Como antes, podremos ver que $q \neq 0$ y, por tanto, $x \neq y$.

De (5) resulta que la tercera raíz de la ecuación (4) está dada por $u = a - x - y$. Pero, dado que $x + y = 2p$, esto significa que

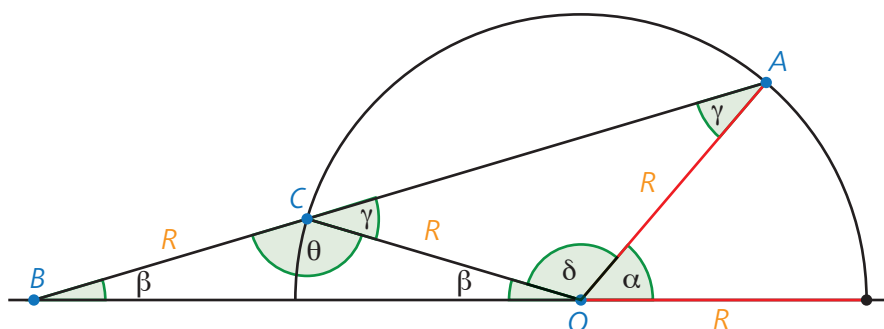
$$u = -a - 2p,$$

y como $\sqrt{w}$ ha desaparecido, u es un número del cuerpo F_{k-1} . Esto contradice la hipótesis de que k es el menor número, tal que algún F_k contiene a una raíz de (4); en consecuencia, la hipótesis es absurda y ninguna raíz de (4) pertenece a ningún cuerpo F_k . El teorema general está demostrado.

Basándose en este teorema quedará probada la imposibilidad de una construcción con regla y compás si el equivalente algebraico del problema resulta ser solución de una ecuación cúbica desprovista de raíces racionales. Esta equivalencia es obvia para el problema de duplicar el cubo, y vamos a establecerla para los otros dos problemas griegos.

3. Trisección del ángulo

Vamos a demostrar que la trisección del ángulo con la regla y el compás es, en general, imposible. Por cierto, existen ángulos como los de 90° y 180° , para los cuales es posible la trisección. Lo que demostraremos es que la trisección no puede efectuarse por un método válido para todo ángulo. Para ello basta con considerar un ángulo que no pueda trisecarse, ya que un método general debería ser válido para cualquier ejemplo. Por consiguiente, la no existencia de un método general puede probarse si se demuestra que el ángulo de 60° , por ejemplo, no puede ser trisecado solo con el auxilio de la regla y el compás.



Un gráfico sobre la trisección del ángulo.

Podemos obtener un equivalente algebraico de este problema de diferentes formas; la más sencilla consiste en considerar el ángulo por su coseno $\cos \theta = g$. Entonces, el problema es el de encontrar la cantidad $x = \cos (\theta/3)$. Mediante una sencilla fórmula trigonométrica, el coseno de $\theta/3$ se halla ligado con el de θ por la ecuación

$$\cos \theta = g = 4 \cos^3 (\theta/3) - 3 \cos (\theta/3).$$

En otras palabras, el problema de trisecar el ángulo θ , con $\cos \theta = g$, equivale a construir una solución de la ecuación cúbica

$$4z^3 - 3z - g = 0. \quad (6)$$

Para probar que en general no puede hacerse esto, tomemos $\theta = 60^\circ$, de donde $g = \cos 60^\circ = 1/2$, y la ecuación (6) se convierte en

$$8z^3 - 6z = 1. \quad (7)$$

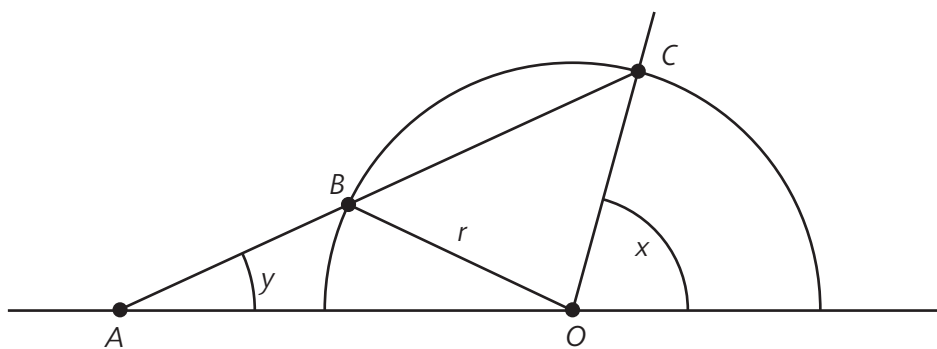
En virtud del teorema antes demostrado, basta con probar que esta ecuación no tiene raíz racional. Haciendo $v = 2z$, la ecuación se transforma en

$$v^3 - 3v = 1. \quad (8)$$

Si hubiera un número racional $v = r/s$ que verificara esta ecuación (r y s primos entre sí), tendríamos $r^3 - 3s^2r = s^3$; de donde $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ sería divisible por r , y r y s tendrían un factor común, a menos que $r = \pm 1$. Asimismo, s^2 divide a $r^3 = s^2(s + 3r)$, lo que supone que r y s tienen algún factor común, salvo que $s = \pm 1$.

Como hemos supuesto que s y r carecen de factor común, vemos que los únicos números racionales que pueden verificar la ecuación (8) son $+1$ o -1 . Pero sustituyendo $+1$ y -1 en lugar de v en (8), vemos que ninguno de ambos la satisface; luego (8) y, en consecuencia, (7) carecen de raíz racional, y la imposibilidad de trisecar el ángulo queda demostrada.

Este teorema de que un ángulo no puede ser trisecado con regla y compás solo es cierto cuando la regla se usa exclusivamente como instrumento para trazar la recta determinada por dos puntos. En nuestra precisión general de los números construibles, el uso de la regla se ha limitado siempre a esta operación; si se permiten otros usos de la regla, la totalidad de las construcciones posibles puede extenderse enormemente. El siguiente método para trisecar el ángulo, utilizado en las obras de Arquímedes, es un buen ejemplo. Sea x un ángulo arbitrario dado, como en la figura siguiente.



Trisección de un ángulo (Arquímedes).

Prolonguemos la base del ángulo por la izquierda y tracemos un semicírculo con centro en O y radio arbitrario r . Señalemos dos puntos A y B en el borde de la regla, tales que $AB = r$. Manteniendo el punto B en la semicircunferencia, deslicemos la regla haciendo que A caiga sobre la prolongación del lado inicial del ángulo x , mientras el borde de la regla pasa por la intersección C del segundo lado del ángulo x con la semicircunferencia de centro O . Con la regla en esta posición tracemos una recta, que forma un ángulo y con la prolongación del lado inicial del ángulo x .



Ejercicio para fijar ideas. Demuéstrese que esta construcción nos da $y = x/3$.

4. El heptágono regular



Pensaremos ahora el problema de hallar el lado z de un heptágono regular inscrito en la circunferencia unidad. La forma más sencilla de tratar este problema es utilizar los números complejos; sabemos que los vértices del heptágono están dados por las raíces de la ecuación

$$z^7 - 1 = 0, \quad (9)$$

siendo las coordenadas x, y de los vértices las partes real e imaginaria del número complejo $z = x + yi$. Una solución de esta ecuación es $z = 1$, y las otras son las raíces de la ecuación

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad (10)$$

obtenida de (9) dividiendo por el factor $z - 1$. Dividiendo (10) por z^3 , obtenemos la ecuación

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0. \quad (11)$$

Mediante una sencilla transformación algebraica, podemos escribir (11) en la forma:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0. \quad (12)$$

Designando $z + 1/z$ por y , de (12) deducimos:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \quad (13)$$

Sabemos que z , raíz séptima de la unidad, está dada por

$$z = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi, \quad (14)$$

donde $\varphi = 360^\circ/7$ es el ángulo central subtendido por el lado del heptágono regular; asimismo sabemos (ejemplo 2 en "Interpretación geométrica de números complejos", *Leñitas geométricas* 7ª época, N° 7, pp. 14-18) que $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi$; es decir, $y = z + 1/z = 2 \cos \varphi$.

Si es posible construir y , podremos también construir $\cos \varphi$, y recíprocamente. Luego, si podemos probar que y no es construible, quedará al mismo tiempo probado que z y, por tanto, el heptágono no son construibles. De esta forma, en virtud del teorema antes demostrado, queda solamente por probar que la ecuación (13) no tiene raíces racionales. Esto también será probado por reducción al absurdo.

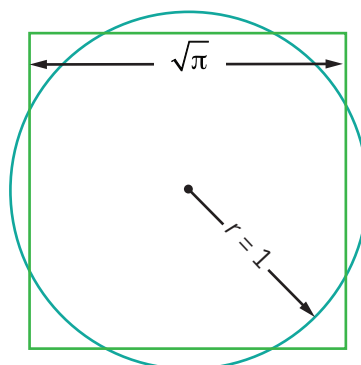
Supongamos que (13) tiene una raíz racional r/s (r y s primos entre sí). Tenemos

$$r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0 \quad (15)$$

donde se ve como antes que r^3 es divisible por s , y s^3 por r . Como s y r son primos entre sí, cada uno debe ser igual a ± 1 ; por tanto, si y es racional, solo puede tomar los valores $+1$ y -1 . Sustituyendo estos números en la ecuación, vemos que ninguno de ellos la satisface. Luego, y y, por ende, el heptágono regular, no son construibles.

5. Observaciones acerca de la cuadratura del círculo

Hemos logrado tratar estos problemas de duplicar el cubo, trisecar el ángulo y construir el heptágono regular mediante métodos elementales.



El problema de la cuadratura del círculo (figura anterior) es mucho más difícil y requiere la técnica del análisis matemático. Como un círculo de radio r tiene área πr^2 , el problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio unidad equivale a la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, lado del cuadrado pedido.

Este segmento será construible si, y solo si, el número π es construible. En virtud de nuestra caracterización general de los números construibles, podemos demostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo probando que el número π no puede estar contenido en ningún cuerpo F_k que pueda deducirse del cuerpo racional F_0 mediante sucesivas adjunciones de raíces cuadradas. Como todos los elementos de tal cuerpo son números algebraicos, es decir, números que satisfacen a ecuaciones algebraicas de coeficientes enteros, nos basta con probar que el número π no es algebraico; es decir, que es *trascendente*, como vimos anteriormente (*Leñitas geométricas* 7ª época, N° 7, pp. 22-25).

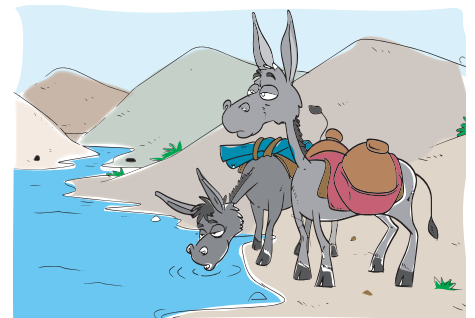
La técnica necesaria para establecer que π es un número trascendente fue creada por Charles Hermite (1822-1905), quien demostró que el número e es trascendente. Mediante un ligero perfeccionamiento del método de Hermite, Ferdinand von Lindemann consiguió (1882) probar la trascendencia de π , poniendo fin para siempre a la vieja cuestión de la cuadratura del círculo. La demostración está al alcance del estudiante de análisis superior, pero excede los fines de nuestro propósito.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Cuándo y cómo empezaron... las grandes ideas del pensamiento y sus construcciones?

Multivaluación, logaritmos naturales

Aunque la geometría del álgebra compleja es básicamente correcta, hay ciertas dificultades técnicas en hacerla (y dentro de poco veremos cómo tratarlas). En primer lugar, b^z es *multivaluada*. Es decir, existen, en general, muchas respuestas diferentes para el significado de " b^z ". Hay también una multivaluación adicional para $\log_b w$. Hemos visto ya la multivaluación de b^z con valores fraccionarios de z .



Por ejemplo, si $z = 1/2$, entonces " b^z " debería significar "cierta cantidad t cuyo cuadrado es b ", puesto que exigimos que $t^2 = t \times t = b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = b^1 = b$. Si un número t satisface esta propiedad, entonces $-t$ también lo hará (puesto que $(-t) \times (-t) = t^2 = b$). Suponiendo que $b \neq 0$, tenemos dos respuestas distintas para $b^{1/2}$ (normalmente escritas como $\pm\sqrt{b}$).

Con más generalidad, tenemos n respuestas complejas distintas para $b^{1/n}$ cuando n es un entero positivo: 1, 2, 3, 4, 5, ... De hecho, tenemos un número finito de respuestas cuando quiera que n sea un número racional (no nulo). Si n es irracional, entonces tenemos un número infinito de respuestas, como veremos enseguida.

Tratemos de ver cómo podemos enfrentar estas ambigüedades. Empezaremos haciendo una elección concreta de b , a saber, el número fundamental " e ", conocido como la *base de los logaritmos naturales*. Esto reducirá nuestro problema de ambigüedad. Tenemos, como definición de e :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,7182818285\dots,$$

donde los signos de admiración denotan *factoriales*, es decir,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n,$$

de modo que $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, etc. La función definida por $f(z) = e^z$ se conoce como función *exponencial*. A veces se escribe "exp"; puede considerarse como " e elevado a la potencia z " y esta potencia se define mediante la siguiente modificación sencilla de la serie anterior para e :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Esta importante serie de potencias converge realmente para todos los valores de z (de modo que tiene un círculo de convergencia infinito, como vimos en “El plano complejo de Gaspar Wessel”, en *Leñitas geométricas* 7ª época, N° 10. La suma infinita hace una elección particular para la ambigüedad en “ b ” cuando $b = e$. Por ejemplo, si $z = 1/2$, entonces la serie nos da la cantidad concreta positiva $+\sqrt{e}$ y no $-\sqrt{e}$.

El hecho de que $z = 1/2$ dé realmente una cantidad $e^{1/2}$ cuyo cuadrado es e se sigue del hecho de que e^z , definida por esta serie, siempre tiene la propiedad requerida “de suma a multiplicación”

$$e^{a+b} = e^a e^b,$$

de modo que $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1+1}{2}} = e^1 = e.$

Tratemos de utilizar esta definición de e^z para darnos un logaritmo inambiguo, definido como la inversa de la función exponencial:

$$z = \log w \text{ si } w = e^z.$$

Esto se conoce como el logaritmo *natural* (y escribiremos la función simplemente como “log”, sin un símbolo para la base; aunque generalmente se designa con el símbolo “ln”). De la anterior propiedad “de suma a multiplicación”, esperamos una regla “de multiplicación a suma”:

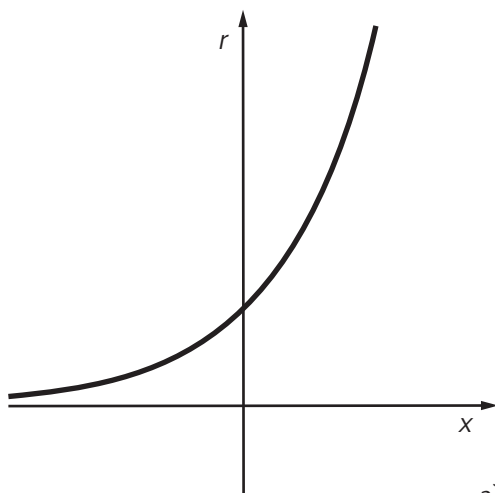
$$\log ab = \log a + \log b.$$

No es inmediatamente obvio que tal inverso de e^z exista necesariamente. Sin embargo, resulta en efecto que para cualquier número complejo w , distinto de 0, siempre existe z tal que $w = e^z$, de modo que podemos definir $\log w = z$. Pero aquí hay una trampa: hay más de una respuesta.

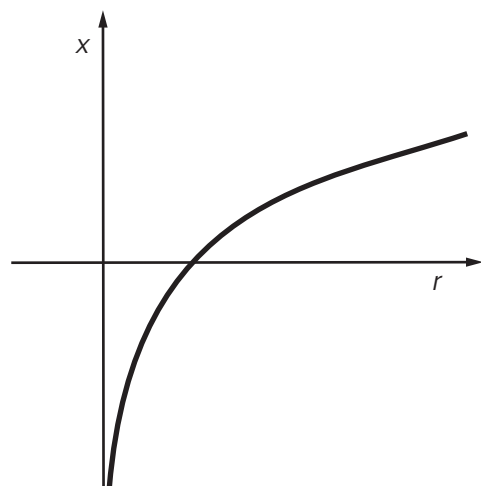
¿Cómo expresamos estas respuestas? Si $[r, \theta]$ es la representación polar de w , entonces podemos escribir su logaritmo z en la forma cartesiana habitual ($z = x + iy$) como

$$z = \log r + i\theta,$$

donde $\log r$ es el logaritmo natural ordinario de un número real positivo –la inversa de la exponencial real–. Resulta intuitivamente claro (ver la figura siguiente) que semejante función logarítmica real existe. En la figura tenemos la gráfica de $r = e^x$.



a)



b)

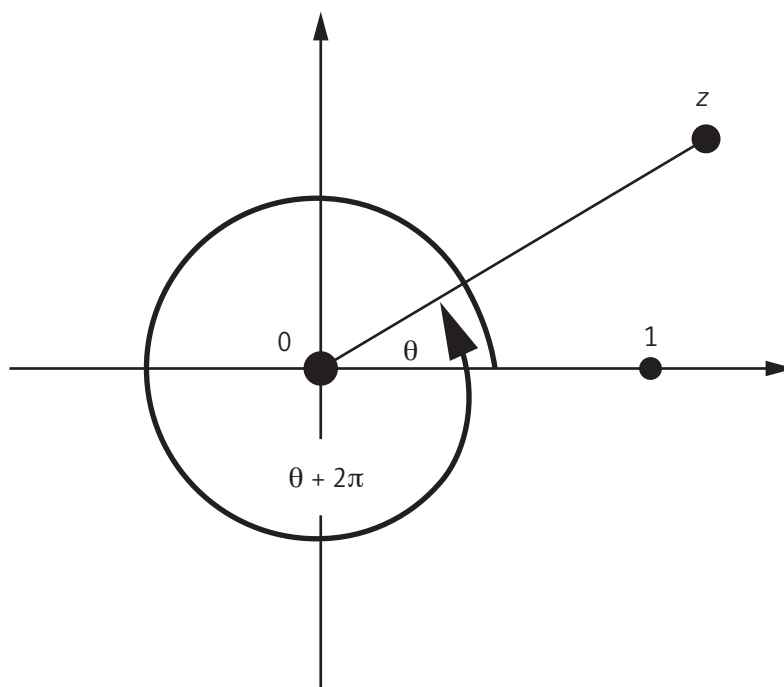
Para obtener el logaritmo de un número real positivo r , consideremos la gráfica (a) de $r = e^x$. Se alcanzan todos los valores positivos de r , de modo que, invirtiendo la figura, obtenemos la gráfica (b) de la función inversa $x = \log r$ para r positivo.

Simplemente intercambiamos los ejes, para obtener la gráfica de la función inversa $x = \log r$, como en la figura b). No es tan sorprendente que la parte real de $z = \log w$ sea simplemente un logaritmo real ordinario.

Lo que es algo más notable es que la parte imaginaria de z es simplemente el ángulo θ , que es el argumento del número complejo w . De lo que hemos establecido hasta aquí, no podemos inferir que “ $i\theta$ ” en la fórmula

$z = \log r + i\theta$ no debería ser un múltiplo real de $i\theta$. Esto requiere cálculo infinitesimal. Este hecho hace explícito el comentario acerca de que el argumento de un número complejo es realmente una forma de logaritmo.

Recordemos que existe una ambigüedad en la definición del argumento de un número complejo. Podemos añadir a θ cualquier múltiplo entero de 2π , y en esto también servirá, como lo muestra la figura ya analizada.



En consecuencia, hay muchas soluciones z diferentes para una elección dada de w en la relación $w = e^z$. Si tomamos uno de estos z , entonces $z + 2\pi i n$ es otra posible solución, donde n es cualquier entero.

Así pues, el logaritmo de w es ambiguo en cuanto que está definido salvo la suma de cualquier múltiplo entero de $2\pi i$. Debemos tener esto en cuenta con expresiones tales como $\log ab = \log a + \log b$, asegurándonos de que se hacen las correspondientes y adecuadas elecciones de logaritmo.

En esta etapa, esta característica de los logaritmos complejos parece ser solo una incomodidad. Sin embargo, veremos poco más adelante que es absolutamente capital para algunas de las más poderosas, útiles y mágicas propiedades de los números complejos. El análisis complejo depende de ello de forma crucial. Por el momento, tratemos solo de apreciar la naturaleza de la ambigüedad. Otra forma de entender esta ambigüedad en $\log w$ consiste en advertir la sorprendente fórmula

$$e^{2\pi i} = 1,$$

de donde $e^{2\pi i} = e^z = w$, etc., lo que demuestra que $z + 2\pi i$ es un logaritmo de w tan bueno como lo es z (y entonces podemos repetir esto tantas veces como queramos). La fórmula anterior está muy relacionada con la famosa fórmula de Leonhard Euler

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

(que relaciona los cinco números fundamentales 0, 1, i , π y e en una expresión casi mística).

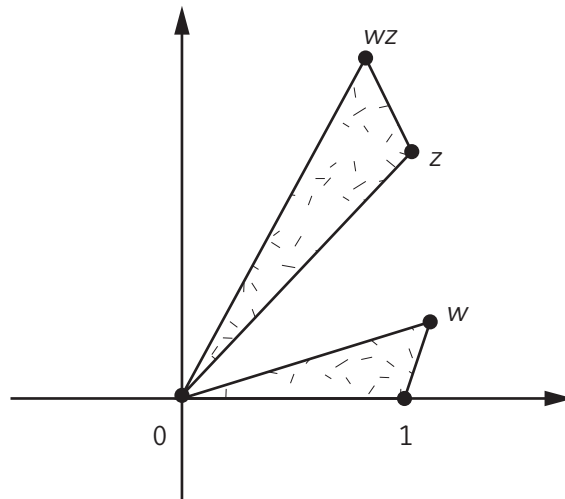
Podemos entender mejor estas propiedades si tomamos la exponencial de la expresión $z = \log r + i\theta$ para obtener

$$w = e^z = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r} e^{i\theta} = r e^{i\theta}.$$

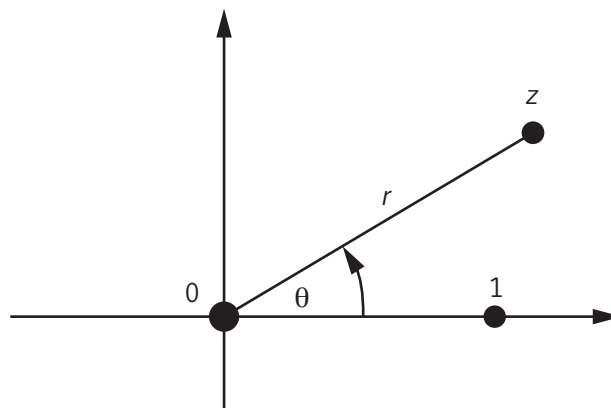
Esto demuestra que la forma polar de cualquier número complejo w , que habíamos estado denotando hasta ahora por $[r, \theta]$, puede escribirse de forma más reveladora como

$$w = r e^{i\theta}.$$

De esta forma, es evidente que, si multiplicamos dos números complejos, tomamos el producto de sus módulos y la suma de sus argumentos ($r e^{i\theta} s e^{i\phi} = r s e^{i(\theta+\phi)}$, de modo que r y s se multiplican, mientras que θ y ϕ se suman, teniendo en cuenta que restar 2π de $\theta + \phi$ no supone ninguna diferencia), como está implícito en la "ley del triángulo semejante" de la figura que sigue.



En lo sucesivo abandonaremos la notación $[r, \theta]$ para usar la expresión aplicada más arriba. Nótese que si $r = 1$ y $\theta = \pi$, obtenemos -1 y recuperamos la famosa fórmula de Euler anterior $e^{i\pi} + 1 = 0$, utilizando la geometría de la figura de análisis ya conocida:

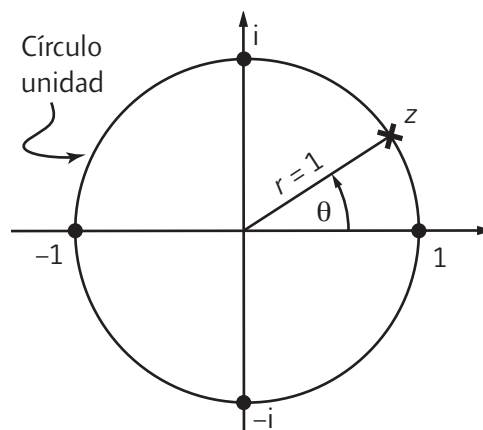


Si $r = 1$ y $\theta = 2\pi$, obtenemos $+1$ y recuperamos $e^{2i\pi} = 1$.



Ejercicio para fijar ideas. Demostrar a partir de esto que $z + \pi i$ es un logaritmo de $-w$.

El círculo con $r = 1$ se denomina el *círculo unidad* en el plano complejo, como vemos en la figura de abajo. Este está dado por $w = e^{i\theta}$ para θ real.



El círculo unidad, que consiste en números complejos de módulo unidad.
La fórmula de Cotes-Euler los da como $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ para θ real.

Comparando esta expresión con las anteriores $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ dadas arriba para las partes real e imaginaria de lo que ahora es la cantidad $w = x + iy$, obtenemos la prolífica “fórmula de Cotes-Euler”

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

que básicamente engloba los elementos esenciales de la trigonometría en las propiedades mucho más simples de las funciones exponenciales complejas. [Roger Cotes (1714) tenía la fórmula equivalente $\log(\cos \theta + i \sin \theta) = i\theta$. La $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ de Euler parece haber aparecido por primera vez treinta años más tarde].

Veamos ahora cómo funciona esto en casos elementales. En particular, la relación básica $e^{a+b} = e^a e^b$, cuando se desarrolla en términos de partes real e imaginaria, da inmediatamente las expresiones de apariencia mucho más complicada:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Análogamente, el desarrollo de $e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3$, por ejemplo, da rápidamente

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta,$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta.$$

Aquí estamos utilizando la notación conveniente (aunque no muy lógica) $\cos^3 \theta$ para $(\cos \theta)^3$, etc. Debería advertirse la inconsistencia de notación con la (más lógica) $\cos^{-1} \theta$, que también se denota habitualmente como $\arccos \theta$. La fórmula

$$\sin n\theta + i \cos n\theta = (\sin \theta + i \cos \theta)^n$$

se suele conocer como *teorema de De Moivre*. Parece que también Abraham de Moivre, un contemporáneo de Roger Cotes (como lo vimos recientemente), ha sido codescubridor de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Biografía

Roger Cotes

Roger Cotes nació el 10 de julio de 1682 en Burbage, Inglaterra, y falleció el 5 de junio de 1716 en Cambridge, Inglaterra. Fue un matemático conocido por editar la segunda edición de los *Principia* de Isaac Newton. Además, realizó avances en la teoría de logaritmos, el cálculo integral y los métodos numéricos, en particular la interpolación. Asistió a la escuela de Leicester y cuando tenía doce años sus profesores ya habían detectado su excepcional talento matemático. Su tío, el reverendo John Smith, estaba deseoso de brindarle todas las oportunidades posibles para desarrollar este talento, por lo que Roger se fue a vivir con él para recibir tutoría personal. Posteriormente, asistió a la famosa Escuela de San Pablo de Londres, pero su tío continuó asesorándolo e intercambiaron cartas sobre temas matemáticos durante el tiempo que Roger pasó en la escuela londinense.

El 6 de abril de 1699, Cotes se matriculó en el *Trinity College* de Cambridge como pensionista, lo que significa que no tenía beca y pagaba sus estudios. Se graduó con una licenciatura en 1702 y permaneció en Cambridge, donde fue elegido miembro en 1705. En enero de 1706 fue nominado como profesor de Astronomía y Filosofía experimental. Este fue un logro notable, ya que en ese momento tenía 23 años. Diseñó un telescopio de tránsito para ampliar la colección de instrumentos adquiridos o donados.

Respecto de sus habilidades matemáticas, se encuentra en segundo puesto después de Newton entre los de su generación en Inglaterra. Antes de continuar con sus contribuciones matemáticas, desde 1709 hasta 1713, Cotes dedicó gran parte de su tiempo a editar la segunda edición de los *Principia* de Newton. No se limitó a corregir el trabajo, sino que lo estudió concienzudamente, discutiendo puntos con Newton de manera suave pero persistente. Por ejemplo, se considera una discusión que tuvo lugar en 1711 entre ellos, sobre la velocidad del agua que fluye de un agujero en un recipiente cilíndrico. Durante la discusión se dieron varias aproximaciones a la raíz cuarta de 2, que es aproximadamente 1,189207115.

Al principio de la correspondencia entre ambos, el tono es muy amistoso. Sin embargo, hacia el final, se observan indicios de un enfriamiento mutuo. En particular, aunque Newton agradeció a Cotes en el primer



borrador de un prefacio que escribió para esta edición, quitó luego estos agradecimientos para la publicación final. El propio Cotes escribió un interesante prefacio en el que explicaba cómo se había desarrollado el estudio de la filosofía natural. Primero, explicó, surgió el método de Aristóteles, que consistía en nombrar propiedades ocultas. Luego, según él, surgieron las ideas de que toda la materia es homogénea. Consideró estos métodos como mejoras, aunque aún conservaban algunas de las debilidades del enfoque aristotélico.

Si bien no menciona específicamente a René Descartes ni a Gottfried Leibniz, es claramente un ataque a sus ideas. Finalmente, dice Cotes, surge el método basado en realizar en primer lugar experimentos sin ideas preconcebidas y, luego, deducir cómo funciona el mundo a partir de los resultados. Estos fueron los métodos de Newton que llevaron a establecer cómo operan las fuerzas básicas de la naturaleza.

Cotes solo publicó un artículo en vida, “Logometría”, publicado en las *Philosophical Transactions of the Royal Society* de marzo de 1714, dedicadas a Edmund Halley. Contiene, en las mismas palabras que utilizó en una carta a Newton: “[...] **un nuevo tipo de construcción en geometría que me parece muy fácil, simple y general**”.

Allí, Cotes dio un método para encontrar aproximaciones racionales como convergentes de fracciones continuas a la cuarta raíz de 2 que mencionamos anteriormente. Estaba particularmente satisfecho con su rectificación de la curva logarítmica, como lo dejó claro en una correspondencia con su amigo William Jones en 1712. En particular, su trabajo sobre logaritmos lo llevó a estudiar la curva.

Uno de los motivos que llevaron a De Moivre a interesarse en la factorización de $x^{2n} + ax^n + 1$ en factores cuadráticos fue el deseo de completar algunos de los trabajos de Roger Cotes sobre integración de fracciones racionales por descomposición en fracciones parciales.

La vida de Cotes es otro ejemplo trágico de una carrera científica muy prometedora interrumpida repentinamente por una muerte prematura; como Newton comentó en cierta ocasión: “Si viviera Cotes podríamos haber sabido algo”.

De joven, como dijimos, primero como estudiante y luego como profesor en Cambridge, empleó gran parte de su tiempo entre 1709 y 1713 en preparar la segunda edición de los *Principia* de Newton, y tres años más tarde moría, dejando tras él algunos trabajos importantes pero incompletos. La mayor parte de estas obras se reunieron y se publicaron póstumamente en 1722 con el título de *Harmonía mensurarum*, el cual se deriva del siguiente teorema:

Si por un punto fijo O se traza una recta variable que corta a una curva algebraica en los puntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ y si se toma sobre dicha recta un punto P tal que el inverso de OP sea la media aritmética de los inversos de $OQ_1, OQ_2, \dots, OQ_m$, entonces el lugar geométrico de P es una línea recta.

Sin embargo, la mayor parte del libro está dedicada a la integración de fracciones racionales, incluyendo la descomposición en factores cuadráticos de $x^n - 1$, trabajo que completaría más tarde De Moivre.

La *Harmonia mensurarum* figura entre las primeras obras en las que se reconoce el carácter periódico de las funciones trigonométricas, apareciendo quizá por primera vez en forma impresa los ciclos de las funciones tangente y secante; se trata, pues, de uno de los primeros libros que incluyen un tratamiento sistemático del cálculo aplicado a las funciones circulares y logarítmicas, junto con una tabla de integrales de estas funciones.

En este contexto, Cotes formula lo que se conoce en los textos de trigonometría como *propiedad de Cotes del círculo*, resultado relacionado estrechamente con el teorema de De Moivre, y que nos permite escribir descomposiciones del tipo:

$$x^{2n} + 1 = \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2n} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{3\pi}{2n} + 1\right) \dots \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n} + 1\right).$$

Este resultado se comprueba fácilmente considerando sobre la circunferencia unidad las raíces de índice $2n$ de -1 , y multiplicando después las parejas de raíces complejas conjugadas. Aparentemente, Cotes fue de los primeros matemáticos que anticiparon la relación $\log(\cos \theta + i \sin \theta) = i\theta$, que ya había dado bajo una forma equivalente en un artículo en las *Philosophical Transactions* en 1714, el cual se reimprimió en la *Harmonia mensurarum*; este teorema suele verse atribuido a Euler, que fue el primero en darlo en forma exponencial moderna. **¡¡Hay realmente magia en la forma directa en que tales fórmulas algo enredadas surgen de sencillas expresiones con números complejos...!!**

LOS LOGARITMOS DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS



Jean y Jacques Bernoulli redescubrieron los desarrollos de $\sin n\theta$ y de $\cos n\theta$ en términos de $\sin \theta$ y $\cos \theta$, que ya conocía François Viète, y los generalizaron alegremente para valores racionales de n . Jean era consciente también de las relaciones que había entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números imaginarios, descubriendo en 1702 la relación siguiente, al estudiar ciertas ecuaciones diferenciales:

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}.$$

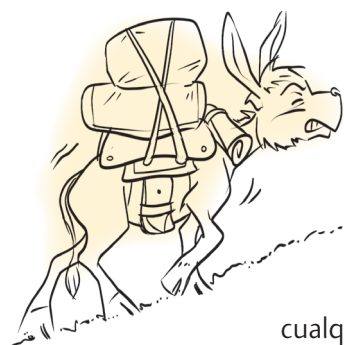
También sostuvo correspondencia con otros matemáticos sobre logaritmos de los números negativos, acerca de los cuales creía equivocadamente que $\log(-n) = \log n$. Intentó desarrollar la trigonometría y la teoría de logaritmos desde un punto de vista analítico y experimentó con varios tipos de notaciones para representar una función de x , de las que la más parecida a la moderna era ϕx . Su idea, más bien vaga, de lo que era una función venía expresada como “una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias”.

Entre las numerosas controversias en las que se vio involucrado, hubo una con los matemáticos ingleses acerca de si la conocida serie de Brook Taylor (1685-1731), publicada en su *Methodus incrementorum* de 1715, era o no un plagio de la serie de Bernoulli

$$\int y dx = yx - \frac{x^2 dy}{2! dx} + \frac{x^3 d^2 y}{3! dx^2} - \dots,$$

pero ni Bernoulli ni Taylor sabían que a los dos se les había anticipado James Gregory en el descubrimiento de la “serie de Taylor”.

Potencias complejas

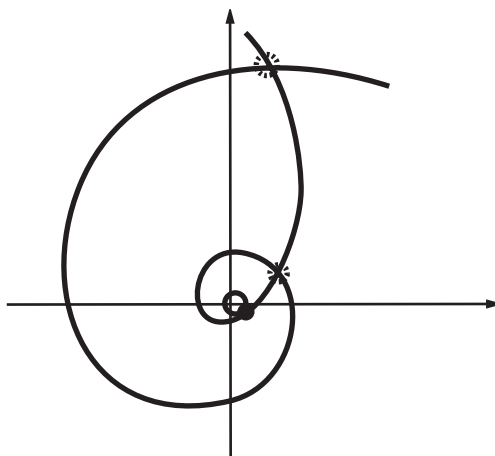


Volvamos ahora a la cuestión de definir w^z (o b^z , como hemos escrito previamente). Podemos conseguir esto escribiendo

$$w^z = e^{z \log w}$$

(puesto que esperamos que $e^{z \log w} = (e^{\log w})^z$ y $e^{\log w} = w$). Pero notemos que, debido a la ambigüedad en $\log w$, podemos añadir a $\log z$ cualquier múltiplo entero de $2\pi i$ para obtener otra respuesta admisible. Esto significa que podemos multiplicar o dividir cualquier elección particular de w^z por $e^{z \cdot 2\pi i}$ cualquier número de veces y seguimos teniendo un “ w^z ” admisible.

Resulta divertido ver la configuración de puntos en el plano complejo que da esto en el caso general y se ilustra en la figura siguiente.

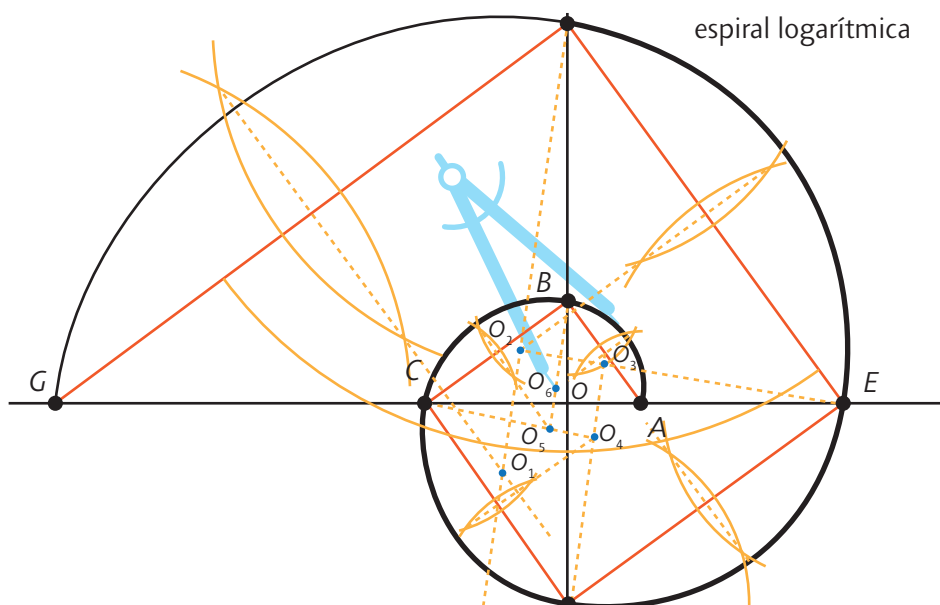


Los diferentes valores de $w^z = (e^{z \cdot \log w})$. Puede sumarse cualquier múltiplo entero de $2\pi i$ a $\log 2$, que multiplica o divide w^z por $e^{z \cdot 2\pi i}$ un número entero de veces. En el caso general, se representan en el plano complejo como las intersecciones de dos espirales equiángulas (cada una de las cuales forma un ángulo constante con líneas rectas que pasan por el origen).

Los puntos están en las intersecciones de dos espirales equiángulas. (Una espiral *equiángula* –o *logarítmica*– es una curva en el plano que forma un ángulo constante con las líneas rectas que irradian de un punto en el plano.)



Ejercicio para fijar ideas. Demuéstrelo. ¿Cuántas maneras? Encuentre también todos los casos especiales.



Una espiral *logarítmica*, también conocida como espiral *equiángula*, o *espiral de crecimiento*, es una curva que se parece a una espiral semejante a la forma de una caracola. Se caracteriza por crecer manteniendo un ángulo constante con su tangente en cualquier punto, lo que significa que, al girar a lo largo de la espiral, la distancia a su centro siempre aumenta en una proporción constante.

Esta ambigüedad nos lleva a todo tipo de problemas si no tenemos cuidado.



Ejercicio para fijar ideas. Resolver esta “paradoja”: $e = e^{1+2\pi i}$, de modo que

$$e = \left(e^{1+2\pi i} \right)^{1+2\pi i} = e^{1+4\pi i-4\pi^2} = e^{1-4\pi^2}.$$

La mejor forma de evitar tales problemas parece consistir en adoptar la regla de que la notación w^z se utilice solo cuando se ha especificado una elección particular de $\log w$. (En el caso especial de e^z , el convenio tácito es hacer siempre la elección particular $\log e = 1$. Entonces, la notación estándar e^z es consistente con nuestra más general w^z .) Una vez que se ha hecho esta elección de $\log w$, entonces w^z está definida inequívocamente para todos los valores de z .

Puede comentarse en este punto que también necesitamos una especificación de $\log b$ si queremos definir el “logaritmo en base b ” mencionado antes en esta sección (la función denotada por “ $\log b$ ”), porque necesitamos un $w = b^z$ inequívoco para definir $z = \log_b w$. Aun así, $\log_b w$ será por supuesto multivaluada (como lo era $\log w$), donde podemos sumar a $\log_b w$ cualquier múltiplo entero de $2\pi i / \log b$.

Una curiosidad que ha intrigado enormemente a algunos matemáticos en el pasado es la cantidad i^i . Podría parecer que “no puede haber nada más imaginario que esto”. Sin embargo, encontramos la respuesta real

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \frac{1}{2} \pi i} = e^{-\pi/2} = 0,207879576\dots,$$

especificando $\log i = \frac{1}{2}\pi i$. Hay también muchas otras respuestas, dadas por las otras especificaciones de $\log i$. Estas se obtienen multiplicando la cantidad anterior por $e^{2\pi i n}$, donde n es un entero (o, de forma equivalente, elevando la cantidad anterior a cualquier potencia de la forma $4n + 1$, donde n es un entero positivo o negativo). Es sorprendente que todos los valores de i^n son, de hecho, números reales.

Veamos cómo funciona la notación w^z para $z = 1/2$. Esperamos ser capaces de representar las dos cantidades $\pm\sqrt{w}$ como " $w^{1/2}$ " en algún sentido. De hecho, para obtener estas dos cantidades, basta con especificar primero un valor para $\log w$ y especificar luego otro, donde sumamos $2\pi i$ al primero para obtener el segundo. Esto da lugar a un cambio de signo en $w^{1/2}$ (debido a la fórmula de Euler $e^{\pi i} = -1$).

De modo análogo, podemos generar todas las n soluciones $z^n = w$ cuando n es 3, 4, 5, ... como la cantidad $w^{1/n}$ cuando se especifican sucesivamente diferentes valores de $\log w$. Con más generalidad, podemos volver a la cuestión de las raíces z -ésimas de un número complejo w no nulo que ya mencionamos anteriormente. Podemos expresar esta raíz z -ésima como la expresión $w^{1/z}$ y generalmente obtenemos un número infinito de valores alternativos para esto, dependiendo de qué elección de $\log w$ se especifique.

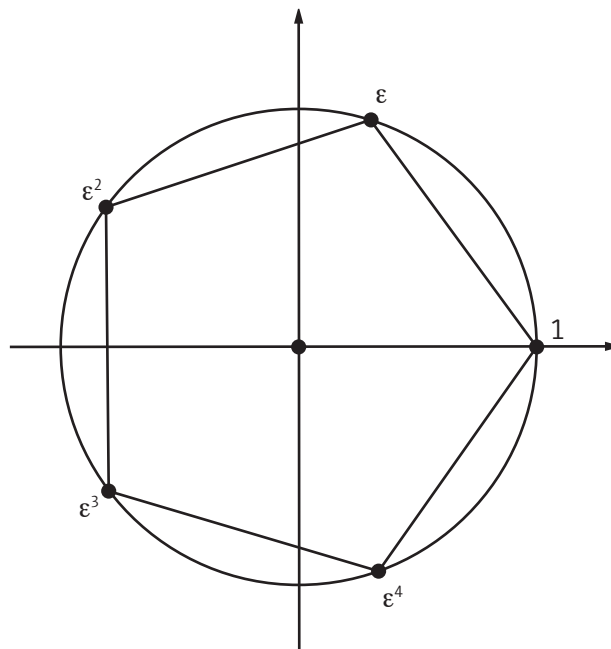
Con la elección específica correcta para $\log(w^{1/z})$, a saber, la dada por $(\log w)/z$ obtenemos realmente $(w^{1/z})^z = w$. Notamos, con más generalidad, que

$$(w^{1/z})^z = w^{az},$$

donde una vez que hemos hecho una especificación de $\log w$ (para el segundo miembro), debemos especificar (para el primer miembro) que $\log(w^a)$ sea $a \log w$.

Cuando $z = n$ es un entero positivo, entonces las cosas son mucho más simples y obtenemos precisamente n raíces. En este caso se da una situación de interés particular cuando $w = 1$. Entonces, especificando sucesivamente posibles valores de $\log 1$, a saber, $0, 2\pi i, 4\pi i, 6\pi i, \dots$ obtenemos $1 = e^0, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, e^{6\pi i/n}, \dots$ para los posibles valores de $1^{1/n}$.

Podemos escribirlos como $1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \dots$ donde $\epsilon = e^{2\pi i/n}$. En términos del plano complejo, obtenemos n puntos igualmente espaciados alrededor del círculo unidad, llamados raíces n -ésimas de la unidad. Estos puntos constituyen los vértices de un n -ágono regular (ver la figura siguiente):



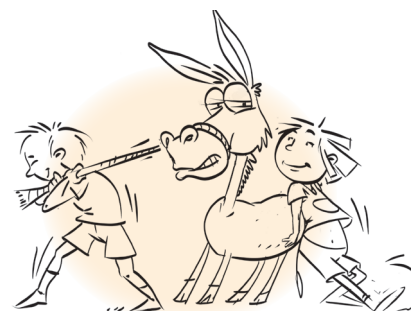
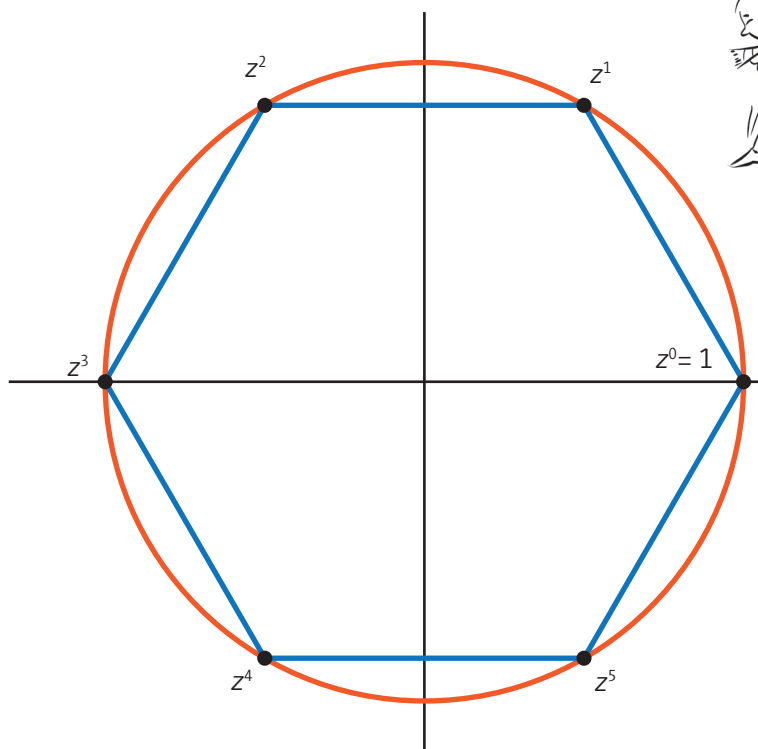
Las raíces n -ésimas de la unidad $e^{2\pi i r/n}$ ($r = 1, 2, \dots, n$), igualmente espaciadas alrededor del círculo unidad, proporcionan los vértices de un n -ágono regular. Aquí $n = 5$.

(Nótese que las elecciones $-2\pi i, -4\pi i, -6\pi i$, etc., para $\log 1$ darían meramente las mismas raíces n -ésimas, en orden inverso.)

Resulta interesante observar que, para un n dado, las raíces n -ésimas de la unidad constituyen lo que se denomina un *grupo multiplicativo finito*, más concretamente, el *grupo cíclico* Z_n , o de *congruencias*, conocido en *Leñitas geométricas* anteriores.

GRUPO ORDENADO CÍCLICAMENTE

En matemáticas, un grupo *ordenado cíclicamente* es un conjunto con estructura de grupo y orden cíclico, de modo que la multiplicación por la izquierda y por la derecha conserva el orden cíclico.



Los grupos ordenados cíclicamente fueron estudiados en profundidad por primera vez por Ladislav Rieger en 1947. Son una generalización de los grupos cíclicos: el grupo cíclico $\mathbb{Z}$ y el grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$. Dado que un orden total induce un orden cíclico, los grupos ordenados cíclicamente también son una generalización de los grupos ordenados linealmente, como los números racionales $\mathbb{Q}$, o con los números reales $\mathbb{R}$.

Algunos de los grupos ordenados cíclicamente más importantes no entran en ninguna de las categorías anteriores: el grupo circular T y sus subgrupos, como el subgrupo de puntos racionales.

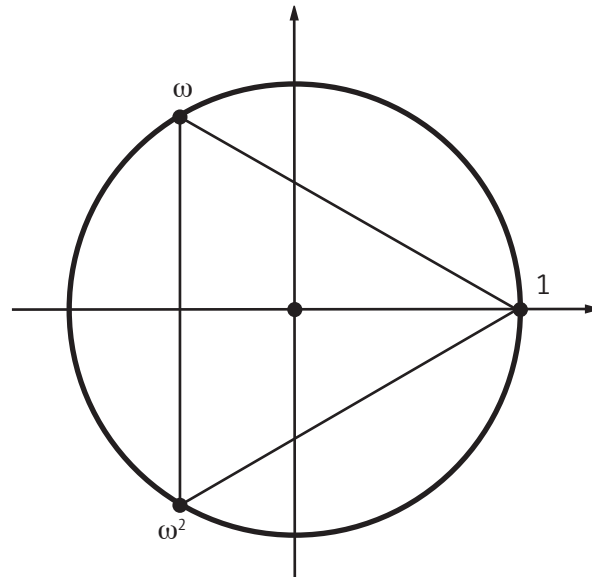
Ladislav Svante Rieger (25 de abril de 1916, Malmö-14 de febrero de 1963, Praga) fue un matemático checo especializado en lógica matemática y en teoría de conjuntos axiomática. Se lo considera el fundador de estas ramas de las matemáticas en Checoslovaquia.

Tenemos n cantidades con la propiedad de que podemos multiplicar dos cualesquiera de ellas y obtener otra. También podemos dividir una por otra para obtener una tercera. Como ejemplo, consideremos el caso $n = 3$. Ahora obtenemos tres elementos $1, \omega$ y ω^2 , donde $\omega = e^{2\pi i/3}$ (de modo que $\omega^3 = 1$ y $\omega^{-1} = \omega^2$). Tenemos las siguientes tablas simples de multiplicación y división para estos números:

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

$\div$	1	ω	ω^2
1	1	ω^2	ω
ω	ω	1	ω^2
ω^2	ω^2	ω	1

En el plano complejo, estos números concretos están representados como los vértices de un triángulo equilátero. La multiplicación por ω rota el triángulo $\frac{2}{3}\pi$ (es decir, 120°) en sentido contrario a las agujas del reloj, y la multiplicación por ω^2 lo rota $\frac{2}{3}\pi$ en el sentido de las agujas; para la división, la rotación es en sentido opuesto (ver la figura siguiente).



Triángulo equilátero de raíces cúbicas 1, ω y ω^2 de la unidad. La multiplicación por ω rota 120° en sentido contrario a las agujas del reloj y la multiplicación por ω^2 , en el sentido de las agujas del reloj.

Cálculo infinitesimal con números reales

¿QUÉ HACE RESPETABLE A UNA FUNCIÓN?

El cálculo infinitesimal –o, según su nombre más sofisticado, *análisis matemático*– está construido a partir de dos ingredientes básicos: *diferenciación* e *integración*. La *diferenciación* está relacionada con velocidades y aceleraciones, con pendientes y curvaturas de curvas y superficies, y cosas similares. Estas son tasas de cambio de las cosas y son cantidades definidas *localmente*, en términos de estructura o comportamiento en los entornos más minúsculos de puntos simples.



La *integración*, por el contrario, está relacionada con áreas y volúmenes, con centros de gravedad y con muchas otras cosas de esa misma naturaleza general. Estas son cosas que implican de una u otra forma medidas de *totalidad*, y no están definidas meramente por lo que pasa en los entornos locales o infinitesimales de puntos individuales. El hecho notable, conocido como *teorema fundamental del cálculo infinitesimal*, es que cada uno de estos ingredientes es, en esencia, justo el *inverso* del otro. Básicamente, es esto lo que posibilita que estos dos importantes dominios de estudio matemático se combinen y proporcionen un poderoso cuerpo de conocimiento y de técnica de cálculo.

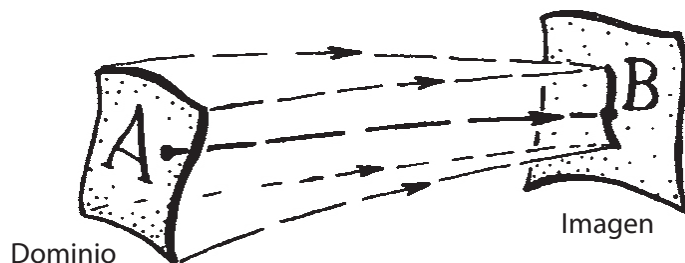
Esta disciplina del análisis matemático, tal como se originó en el siglo XVII en la obra de Fermat, Newton y Leibniz, con ideas que se remontan hasta Arquímedes en el siglo III a. C., se denomina *cálculo infinitesimal* porque proporciona un cuerpo de técnica de cálculo mediante el que algunos problemas, que de otro modo serían conceptualmente difíciles de manejar, pueden ser resueltos con frecuencia “de forma automática”, siguiendo unas pocas reglas relativamente sencillas que a menudo pueden aplicarse sin necesidad de hacer un gran esfuerzo mental.

Pese a todo, en este cálculo hay un contraste sorprendente entre las operaciones de diferenciación e integración atendiendo a lo que es lo “fácil” y lo que es lo “difícil”. Cuando se trata de aplicar las operaciones a fórmulas explícitas que implican funciones conocidas, la diferenciación es la “fácil” y la integración, la “difícil”; y en muchos casos la última puede ser imposible de llevar a cabo de una manera explícita.

Por el contrario, cuando las funciones no están dadas en términos de fórmulas, sino bajo el formato de listas tabuladas de datos numéricos, entonces la integración es la “fácil” y la diferenciación es la “difícil” y la que, estrictamente hablando, quizá no sea posible en la forma usual. Las técnicas numéricas están relacionadas generalmente con aproximaciones, pero también en la teoría exacta hay una analogía muy estrecha con este aspecto de las cosas, y de nuevo es la integración la que puede realizarse en circunstancias en las que la diferenciación no puede hacerse.

Tratemos de entender algo de esto. Estas cuestiones tienen que ver, de hecho, con lo que realmente se entiende por una “función”. Para Euler y los demás matemáticos de los siglos XVII y XVIII, una *función* significaría algo que se podría escribir explícitamente como x^2 o $\sin x$ o $\log(3 - x + e^x)$, o quizá algo definido por cierta fórmula que incluye una integración o tal vez por una serie de potencias dada explícitamente.

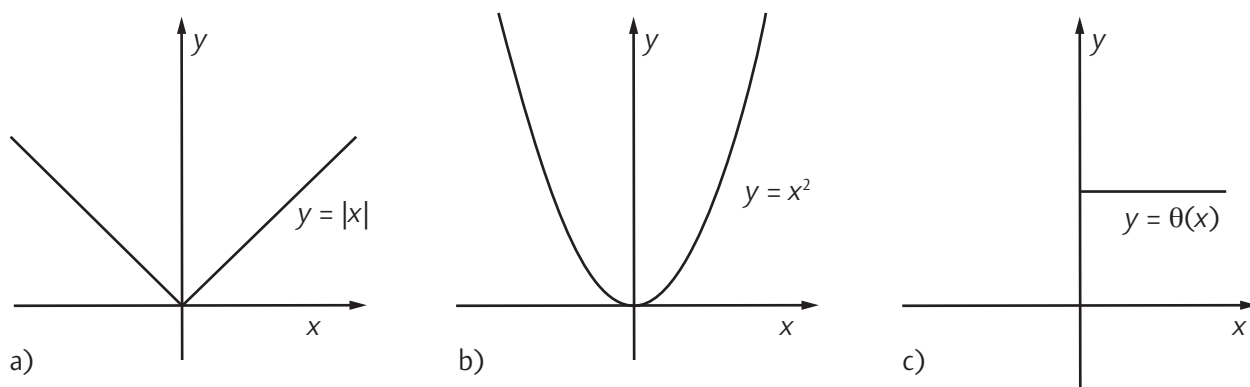
En la actualidad, se prefiere pensar en términos de *aplicaciones*, mediante las que cierta colección A de números (o entes más generales) llamada *dominio de la función* se “aplica” en cierta colección B , llamada *imagen de la función* (ver la figura siguiente).



Una *función* como “aplicación”, en donde su dominio (una colección A de números o de otras entidades) se “aplica” en su imagen (otra colección B). A cada elemento de A se le asigna un valor particular en B , aunque diferentes elementos de A pueden alcanzar el mismo valor y algunos valores de B pueden no ser alcanzados.

El punto esencial de esto es que la función asignará un miembro de la imagen B a cada miembro del dominio A . Podemos pensar que la función “examina” un número que pertenece a A y, entonces, dependiendo solo de qué número encuentre, produce un número definido perteneciente a B . Una función de este tipo puede ser simplemente una “tabla de búsqueda”. No es necesario que haya una “fórmula” de apariencia razonable que exprese la acción de la función de una manera manifiestamente explícita.

Consideremos algunos ejemplos. En las figuras siguientes



Gráficas de (a) $|x|$, (b) x^2 , y (c) $\theta(x)$; en cada caso el dominio y las imágenes son el sistema de los números reales.

hemos representado los gráficos de tres funciones sencillas, a saber, las dadas por x^2 , $|x|$ y $\theta(x)$. En cada caso, los espacios dominio e imagen son ambos la totalidad de los números reales, que suelen representarse mediante el símbolo $\mathcal{R}$. La función denotada por “ x^2 ” da simplemente el cuadrado del número real que está examinando. La función denotada por “ $|x|$ ” (llamada *valor absoluto*) da simplemente x si x es no negativo, pero da $-x$ si x es negativo; así pues, el propio valor $|x|$ no es nunca negativo. La función $\theta(x)$ es 0 si x es negativo y 1 si x es positivo; también es habitual definir $\theta(0) = 1/2$.

Esta función se denomina *función escalón de Heaviside*, en honor a Oliver Heaviside (18 de mayo de 1850, Londres-3 de febrero de 1925, Torquay, Reino Unido), un físico, ingeniero eléctrico y matemático. Introdujo los números complejos en el análisis de circuitos, inventó una nueva técnica para resolver ecuaciones diferenciales (equivalente a la transformada de Laplace), amplió de manera independiente el cálculo vectorial y reescribió las ecuaciones de Maxwell en el formato tal como es usado en la actualidad. Moldeó de forma relevante el modo en que las ecuaciones de Maxwell eran entendidas y aplicadas, en las décadas posteriores a la muerte de este. Su formulación de las ecuaciones telegráficas fue comercialmente relevante durante su vida, a pesar de que pasaron desapercibidas por un largo tiempo, debido a que pocos estaban familiarizados por entonces con su novedosa metodología.

A pesar de que sus relaciones con el *establishment* científico fueron complicadas durante la mayor parte de su vida, Heaviside remodeló el campo de las telecomunicaciones, la matemática y la ciencia. Otra importante contribución matemática suya se debió a que haya postulado por primera vez la “capa de Heaviside” en la atmósfera terrestre, tan importante para las transmisiones por radio.

Cada una de estas es una función perfectamente buena en el sentido moderno del término, pero quizás Euler habría tenido dificultad en aceptar que $|x|$ o $\theta(x)$ fueran realmente una *función* en su sentido del término.

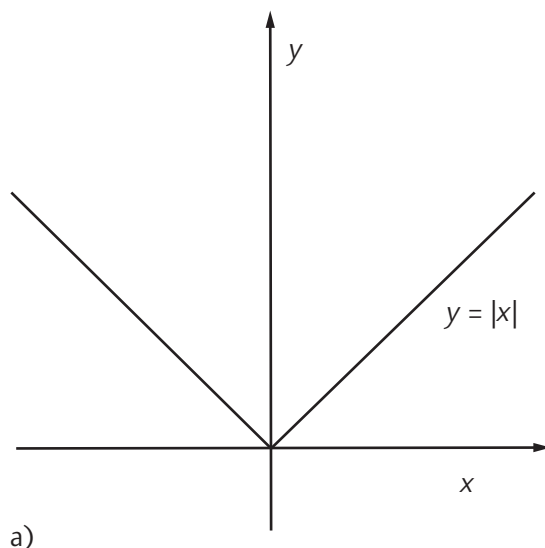
¿Por qué podría ser así? Una posibilidad es pensar que la dificultad con $|x|$ y $\theta(x)$ es que hay demasiadas cosas del tipo:

si x es tal y cual, entonces tomemos esto y aquello, mientras que si x es ...,

y no hay una “fórmula bonita” para la función. Sin embargo, esto es un poco vago y en cualquier caso podríamos preguntarnos qué hay realmente erróneo en que $|x|$ cuente como una “fórmula”. Además, una vez que hemos aceptado $|x|$, podríamos escribir una fórmula para $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{|x| + x}{2x},$$

aunque podríamos preguntarnos si hay un sentido aceptable en el que esto da el valor correcto para $\theta(0)$, puesto que la fórmula da simplemente $0/0$. Una objeción más pertinente es decir que la dificultad con $|x|$ consiste en que no es “suave”, y no en que su expresión explícita no sea “bonita”. Vemos esto en el “ángulo” en el centro de la figura siguiente que la representa:

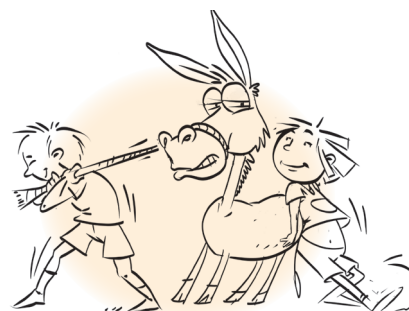


La presencia de este ángulo es lo que impide que $|x|$ tenga una pendiente bien definida en $x = 0$. Tratemos ahora de entender esta idea.

¿De dónde veníamos en el 1700?

PROBABILIDADES Y SERIES

Los descubrimientos matemáticos de los Bernoulli, igual que pasa con los de Leibniz, se encuentran publicados principalmente en artículos de revistas, especialmente en *Acta Eruditorum*, pero Jacques Bernoulli escribió también un tratado, ya clásico, titulado *El arte de la conjetura* y publicado en 1713. Se trata del primer volumen importante publicado sobre la teoría de probabilidades, ya que el *De ludo aleae* de Christiaan Huygens solo era una breve introducción. De hecho, el tratado de Huygens está reproducido en la primera de las cuatro partes de *El arte de la conjetura*, junto con el comentario correspondiente de Bernoulli.



La segunda parte incluye una teoría general de permutaciones y combinaciones que viene facilitada por el teorema binomial y multinomial. Aquí precisamente nos encontramos con la primera demostración correcta del teorema binomial para exponentes enteros positivos; la demostración

está hecha por inducción matemática, método de razonamiento que había redescubierto Bernoulli leyendo la *Arithmetica infinitorum* de John Wallis, que había publicado en 1686.

Bernoulli atribuye a Blaise Pascal el teorema binomial para exponentes arbitrarios, pero tal derecho parece gratuito ya que todos los indicios apuntan a Newton como el primero que enunció el teorema en su forma general para exponentes racionales cualesquiera, aunque sin demostrarlo, lo que haría Euler más tarde.

En conexión con el desarrollo de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, Jacques Bernoulli propuso el problema del interés compuesto continuo, es decir, el de hallar el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dado que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

estaba claro para él que el límite tenía que existir.

La segunda parte de *El arte de la conjetura* contiene también el tratamiento de los llamados *números de Bernoulli*, que aparecen como coeficientes de una fórmula de recursión para las sumas de potencias de enteros, y que posteriormente han encontrado muchas aplicaciones en otros campos. La fórmula en cuestión la escribe Bernoulli de la forma siguiente:

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} \dots$$

donde $\int n^c$ significa la suma de las potencias c -ésimas de los n primeros enteros positivos, y las letras $A, B, C, \dots$ (o números de Bernoulli) son los coeficientes de los términos en n (último término) en las expresiones correspondientes a $\int n^2, \int n^4, \int n^6, \dots$

Estos números también pueden ser definidos como $n!$ veces los coeficientes de los términos de exponente par en el desarrollo de Maclaurin de la función $\frac{x}{e^x - 1}$. Los números de Bernoulli son útiles para escribir los desarrollos en serie de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Los tres primeros de estos números son, como se puede comprobar fácilmente, $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}$ y $C = \frac{1}{42}$.

Las partes tercera y cuarta de *El arte de la conjetura* están dedicadas principalmente a problemas que ilustran la teoría de probabilidades. En particular, la cuarta y última parte contiene el famoso teorema que lleva ahora el nombre del autor, sobre el cual habían mantenido correspondencia Bernoulli y Leibniz, es decir, la llamada *ley de los grandes números*.

Este teorema afirma que si p es la probabilidad de un cierto suceso, si m es el número de veces que se ha presentado dicho suceso al hacer n experimentos, si $\epsilon > 0$ es un número positivo arbitrariamente pequeño, y si P es la probabilidad de que se verifique la desigualdad $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \epsilon$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} P = 1$.

**Un libro para imaginar, jugar y construir figuras;
para comprender el pensamiento y el para qué
de la geometría moderna.**



fenchu@oma.org.ar

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

LIBRO DE ENTRENAMIENTO BÁSICO



Como apéndice de *El arte de la conjetura* nos encontramos con una larga memoria sobre series en la que, además de la serie armónica y la suma de los inversos de los cuadrados perfectos, se estudia la serie

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Bernoulli sabía ya (por comparación de sus términos con los de la armónica) que esta serie diverge y llama la atención sobre la paradoja de que la “suma” de todos los términos impares es a la “suma” de todos los términos pares como $\sqrt{2} - 1$ es a 1, de lo cual parece deducirse que la suma de los términos impares es menor que la suma de los términos pares; pero esto es imposible porque, término a término, los primeros son mayores, respectivamente, que los segundos.

LA PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

Jean Bernoulli mantuvo siempre por la matemática un entusiasmo tan vivo como su empeño en meterse en controversias. Por otra parte, fue padre de tres hijos, Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) y Jean II (1710-1790), todos los cuales llegaron a ocupar en su momento un cargo de profesor de matemática: Nicolaus y Daniel en San Petersburgo, y Daniel y Jean II en Basilea.



Otro Nicolaus [1687-1759], primo de los anteriores, ocupó durante algún tiempo la cátedra de matemática en la Universidad de Padua, la misma que ocupara Galileo tiempo atrás. Hubo aún otros Bernoulli que alcanzaron cierta fama en matemática, pero ninguno de ellos consiguió un prestigio comparable al de los dos hermanos que iniciaron la tradición, Jacques y Jean.

El más famoso de la generación joven fue Daniel, cuyos trabajos en hidrodinámica se recuerdan en el “principio de Bernoulli”; en matemática se lo conoce mejor por su distinción entre “esperanza matemática” y “esperanza moral”, o entre “fortuna física” y “fortuna moral”. Daniel supone que un pequeño incremento en sus medios materiales produce en una persona un incremento de satisfacción que es inversamente proporcional a dichos medios; en forma de ecuación, $dm = K \frac{dp}{p}$, donde m es la fortuna moral, p es la fortuna física y K es una constante de proporcionalidad.

Esto conduce a la conclusión de que, según la fortuna física crece geométricamente, la fortuna moral crece solo aritméticamente. Esta hipótesis formulada por Bernoulli aparece en los “Comentarios” de la Academia de Ciencias de San Petersburgo de 1730-1731 (publicados en 1738), ya que Daniel Bernoulli pasó los años 1725-1733 en San Petersburgo, antes de regresar de nuevo a Basilea. Sus trabajos sobre probabilidades cubren aspectos variados, incluyendo aplicaciones a los negocios, a la medicina y a la astronomía.

Así, por ejemplo, en 1734 compartió con su padre un premio convocado por la Academia de Ciencias para un ensayo sobre la aplicación de las probabilidades al estudio de las inclinaciones de las órbitas planetarias; y en 1760 leyó ante la Academia de París un trabajo sobre la aplicación de la teoría de probabilidades a la cuestión de las ventajas que presenta la vacunación contra la viruela.

Cuando Daniel Bernoulli se trasladó a San Petersburgo en 1725, también fue llamado su hermano mayor Nicolaus como profesor de matemática, y de las discusiones entre ambos surgió un problema que no tardó en ser conocido con el nombre de *paradoja de San Petersburgo*, probablemente porque apareció por primera vez en los “Comentarios” de la Academia de San Petersburgo.

El problema es el siguiente. Supongamos que Pedro y Pablo se ponen de acuerdo para jugar a un juego que se basa en el lanzamiento de una moneda. Si en la primera tirada aparece cara, Pablo pagará a Pedro una corona; si en la primera tirada sale cruz y en la segunda sale cara, Pablo pagará a Pedro dos coronas; si aparece cara por primera vez en la tercera tirada, Pablo pagará a Pedro cuatro coronas, y así sucesivamente, de manera que la cantidad que Pablo tendrá que pagar a Pedro si aparece una cara por primera vez en la n -ésima tirada será de 2^{n-1} coronas.

Ahora bien, ¿cuánto deberá pagar Pedro a Pablo por el privilegio de jugar contra él? La esperanza matemática de Pedro, dada por

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{2}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} + \dots$$

es evidentemente infinita, a pesar de que el sentido común sugiere una suma finita y bastante modesta, por cierto.

Cuando Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), hizo un estudio empírico de la cuestión, halló que en 2084 partidas del juego mencionado, Pablo tendría que pagar a Pedro 10057 coronas, lo cual indica que, para una única partida, la esperanza de Pablo en vez de ser infinita es en realidad **¡algo menor que 5 coronas!**

La paradoja que encierra el problema de San Petersburgo fue muy discutida a lo largo del siglo XVIII, dándosele diferentes explicaciones. Daniel Bernoulli intentó resolverla por medio de su principio de esperanza moral, según el cual había que reemplazar las cantidades $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$, por $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{4}}, 4^{\frac{1}{8}}, 8^{\frac{1}{16}}, \dots$. Otros prefirieron sugerir, como solución de la paradoja, que el problema es intrínsecamente imposible, en vista del hecho de que la fortuna de Pablo es necesariamente finita; por lo tanto, no podría pagar las sumas ilimitadas que se requerirían en el caso de que se retrasase mucho la aparición de una cara por primera vez.

ABRAHAM DE MOIVRE

La teoría de probabilidades contó con una gran cantidad de aficionados que se dedicaron a su estudio durante los comienzos del siglo XVIII, entre los cuales uno de los más importantes fue Abraham De Moivre (1667-1754). De Moivre era francés de nacimiento y hugonote, por lo que poco después de la revocación del Edicto de Nantes se trasladó a Inglaterra, donde trabajó amistad con Newton y con Halley, y se dedicó a dar clases particulares de matemática. En 1697 fue elegido miembro de la *Royal Society* y, poco después, de las Academias de París y Berlín.



Esperaba conseguir también al fin un puesto en la universidad para enseñar matemática, algo que no logró nunca debido, en parte al menos, al hecho de no ser de origen inglés, y Leibniz también intentó en vano conseguirle un puesto profesional en Alemania. Sin embargo, y a pesar de las largas horas de clases necesarias para ganarse la vida, De Moivre llevó a cabo una cantidad considerable de investigaciones. En 1711 publicó en las *Philosophical Transactions* una larga memoria sobre las leyes del azar, que posteriormente amplió a un famoso libro, *Doctrine of Chances*, que publicó en 1718 y más tarde en otras ediciones. Tanto la memoria como el libro contenían numerosas cuestiones sobre dados, el problema de los puntos (con probabilidades de ganar desiguales), extracción de bolas de diversos colores de una bolsa y varios otros juegos.

Algunos de estos problemas habían aparecido mientras tanto en el *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, que se publicó antes que *Doctrine of Chances*, pero después de la memoria de De Moivre. En el prólogo a *Doctrine of Chances* el autor menciona los trabajos sobre teoría de probabilidades de Jacques, Jean y Nicolas Bernoulli. Las varias ediciones del libro contienen más de cincuenta problemas sobre probabilidades, así como cuestiones relativas a anualidades de vida.

Como regla general, De Moivre derivaba la teoría de permutaciones y combinaciones de los principios de la teoría de probabilidades, mientras que ahora se acostumbra hacer al revés; por ejemplo, para hallar el número de permutaciones de dos letras tomadas de entre las seis a, b, c, d, e, f, De Moivre razona diciendo que la probabilidad de que una letra concreta sea la primera es $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de que otra letra concreta sea la segunda es $\frac{1}{5}$. Y, por lo tanto, la probabilidad de que estas dos letras aparezcan en ese orden es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$, de lo cual concluye que el número de todas las permutaciones posibles, tomadas de dos en dos, es 30. A De Moivre se le suele atribuir el principio publicado en *Doctrine of Chances* de que la probabilidad de un suceso compuesto es el producto de las probabilidades de los sucesos componentes, pero lo cierto es que esto aparece ya implícitamente en obras anteriores.

De Moivre estaba especialmente interesado en desarrollar métodos y notaciones generales para la teoría de probabilidades, en la forma de lo que él imaginaba como un “álgebra” nueva. Hay una generalización de un problema formulado anteriormente por Huygens y que se suele conocer, con toda justicia, como problema de De Moivre.

Se trata de hallar la probabilidad de obtener un número de puntos dado al lanzar n dados que tienen cada uno m caras. Algunos de sus resultados en probabilidades se publicaron en un volumen posterior, *Miscellanea analytica*, en 1730. En un suplemento a esta obra, De Moivre incluye también algunos resultados que aparecen a la vez en el tratado *Métodos diferenciales* de James Stirling (1692-1770), obra que se publicó

el mismo año que la *Miscellanea analytica* de De Moivre; entre ellos figura la fórmula que nos da la aproximación $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$, que se suele conocer como *fórmula de Stirling*, aunque De Moivre la conocía con anterioridad, y además una serie, llamada también de Stirling; que relaciona el $\ln n!$ con los números de Bernoulli.

Todo parece indicar que De Moivre fue el primero en utilizar la fórmula de las probabilidades

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

resultado que aparece discretamente en un folleto publicado de manera privada en 1733. Esta obra breve, que representa la primera vez en que aparece la ley o curva de distribución de los errores, fue incluida en la segunda edición de *Doctrine of Chances* en 1738. Hubo otros muchos aspectos de la teoría de probabilidades que atrajeron la atención de De Moivre, incluidos diversos problemas actuariales.

El teorema de De Moivre

La obra *Miscellanea analytica* es importante no solo desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, sino también del desarrollo del aspecto analítico de la trigonometría. El bien conocido teorema de De Moivre de que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ no viene dado explícitamente, pero está perfectamente claro, a partir de su obra sobre ciclometría y de otros contextos, que el autor estaba muy familiarizado con esta relación, probablemente tan pronto como desde 1707. En un artículo publicado durante este año en *Philosophical Transactions*, De Moivre escribe que

$$\frac{1}{2}(\sin n\theta + \sqrt{-1} \cos n\theta)^{1/n} + \frac{1}{2}(\sin n\theta - \sqrt{-1} \cos n\theta)^{1/n} = \sin \theta,$$

y en *Miscellanea analytica* utiliza una fórmula equivalente a

$$(\cos \theta \pm i \sin \theta)^{1/n} = \cos \frac{2K\pi \pm \theta}{n} \pm i \sin \frac{2K\pi \pm \theta}{n}$$

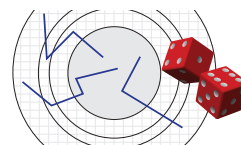
para descomponer $x^{2n} + 2x \cos n\theta + 1$ en factores cuadráticos de la forma $x^2 + 2x \cos \theta + 1$. Y de nuevo, en otro artículo de *Philosophical Transactions* de 1739 halla las raíces n -ésimas del “binomio imposible” $a + \sqrt{-b}$ por el procedimiento que usamos ahora de tomar la raíz n -ésima del módulo, dividir por n el argumento y sumar múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$.

Al manipular los números imaginarios y las funciones circulares en *Miscellanea analytica*, De Moivre estuvo muy cerca de identificar las funciones hiperbólicas al extender, en particular, teoremas sobre sectores de círculos a resultados análogos sobre sectores de hipérbolas rectangulares. A la vista de la amplitud y la profundidad de sus hallazgos, no resulta nada extraño que Newton les contestase a los que venían a preguntarle cuestiones de matemática durante los últimos años de su vida: “Vayan, vayan a ver a Mr. De Moivre; él sabe esas cosas mejor que yo”.

El interés de De Moivre por las series y por las probabilidades nos recuerda a los Bernoulli. De Moivre mantuvo una nutrida y cordial correspondencia con Jean Bernoulli durante el decenio 1704-1714 y, de hecho, él mismo fue quien propuso a Jean Bernoulli como candidato a la elección para la *Royal Society* en 1712.

LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

Si bien la matemática cambió profundamente de forma entre las dos guerras mundiales, también es cierto que buena parte de la matemática que siguió a la Segunda Guerra Mundial consistía en el comienzo de algo radicalmente nuevo que anunciaba una nueva era. La teoría de conjuntos y la teoría de la medida han ido invadiendo a lo largo del siglo xx una parte cada vez más extensa de la disciplina, pero pocas de sus ramas se han visto afectadas tan profundamente por esta tendencia como la teoría de probabilidades, a la que Émile Borel había dedicado ya en 1909 sus trabajos sobre los elementos de la teoría de las probabilidades.



El primer año del nuevo siglo lo anunciaba ya propicio para las aplicaciones de la teoría de probabilidades, tanto a la física como a la genética, puesto que en 1901 Gibbs publicaba su obra *Elementary Principles in Statistical Mechanics*. En 1873 había ya entregado su primer artículo científico sobre la representación geométrica de las funciones del estado termodinámico en *Philosophical Transactions* y enviado reimpresiones a sus corresponsales científicos en Europa. Recibió una respuesta muy favorable del físico británico James Clerk Maxwell, quien hizo tres copias de un molde de yeso de una superficie que es la representación visual del formalismo matemático de Gibbs. Envío una copia como regalo a Gibbs, la cual todavía está en exhibición en el departamento de física de Yale. Entre 1875 y 1878, Gibbs escribió una serie de artículos que aplicaron sus métodos gráficos de análisis termodinámico a sistemas químicos de etapas múltiples. Estos artículos se publicaron luego como una monografía bajo el título *Balance de sustancias heterogéneas* y forman la base de la termodinámica química. También Gibbs definió para las reacciones químicas dos funciones muy útiles: la entalpía, que representa el calor de una reacción a presión constante, y la entalpía libre, que determina si una reacción puede proceder espontáneamente a temperatura y presión constantes. La última cantidad ahora se llama *energía de Gibbs* en su honor (o como anglicismo de energía libre de Gibbs).

En sus artículos sobre equilibrios heterogéneos, introdujo las nociones de potencial químico (al mismo tiempo que Pierre Duhem), así como la regla de las fases. En resumen, aplicó los conceptos de termodinámica a la interpretación de fenómenos fisicoquímicos, y logró explicar e interpretar un conjunto de hechos previamente aislados entre sí.

Gibbs creó el término “mecánica estadística” y muchos conceptos esenciales para la descripción estadística de los sistemas físicos, como los conjuntos estadísticos conocidos como el *conjunto canónico*, el *conjunto microcanónico* y el *conjunto gran canónico*. Su marco teórico está tan bien construido que sobrevive casi intacto tras el descubrimiento (después de su muerte) de que las partículas microscópicas obedecen las leyes de la mecánica cuántica, en lugar de a la mecánica newtoniana que seguían Gibbs y sus contemporáneos. Propone y resuelve la paradoja de Gibbs sobre la entropía asociada con el proceso de mezcla de gases. En su libro de texto *Principios básicos en mecánica estadística* (1902), se interesó en los aspectos microscópicos de la termodinámica.

También durante ese periodo de oro fue fundada la revista *Biometrika*, por Karl Pearson (1857-1936). Francis Galton (1822-1911), que era primo de Charles Darwin, fue muy precoz y un estadístico nato que estudió los fenómenos de regresión. En 1900, Pearson, profesor de Eugenesia en la Universidad de Londres, popularizó el criterio de la “chi-cuadrado”. Por otra parte, uno de los cargos de Poincaré había sido el de “profesor de cálculo de probabilidades”, lo que indicaba un interés creciente por el tema. En Rusia se inició el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados, especialmente en 1906-1907, por obra de Andréi Andréyevich Márkov (o Markoff, 1856-1922), discípulo de Pafnuti Chebyshov y coeditor de las *Oeuvres* (2 vols., 1899-1904) de su maestro.

En la teoría cinética de los gases y en muchos fenómenos sociales y biológicos, la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, y especialmente desde mediados del siglo xx las cadenas de Márkov de probabilidades eslabonadas se han estudiado muy detalladamente. En su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de probabilidades en expansión, los estadísticos encontraron a mano las herramientas necesarias y hoy no es posible ya dar una exposición rigurosa de la teoría de probabilidades sin utilizar los conceptos de función medible y de las teorías de integración modernas. En Rusia, por ejemplo, Andréi Nicoláyevich Kolmogórov (1903-1987) hizo importantes progresos en la teoría de procesos de Márkov (1931) y dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía una fundamentación axiomática de la teoría de probabilidades utilizando la medida de Lebesgue.

El análisis clásico se había ocupado principalmente de funciones continuas, mientras que los problemas de probabilidades generalmente se refieren a casos discretos. La teoría de la medida y las sucesivas extensiones del concepto de integral se adaptaban perfectamente a conseguir una asociación más estrecha entre el análisis y la teoría de probabilidades, especialmente a partir de mediados del siglo, cuando Laurent Schwartz (1915-2002), de la Universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones (1950-1951).

La *función delta de Dirac* utilizada en física atómica había venido a demostrar que las funciones patológicas, de las que se habían ocupado los matemáticos desde hacía más de un siglo, resultaban útiles también en la

física. En los casos más difíciles, sin embargo, la diferenciabilidad desaparece, con los problemas consiguientes en la resolución de ecuaciones diferenciales, uno de los principales lazos que conectan la matemática con la física, especialmente donde aparecen soluciones singulares.

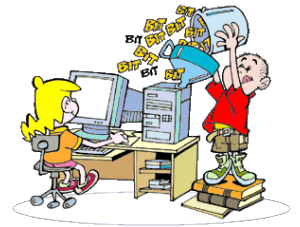
Para superar esta dificultad, Schwartz introdujo un concepto de diferenciabilidad más general, posible gracias al desarrollo de la teoría de espacios vectoriales generales durante la primera mitad del siglo por obra de Maurice Fréchet, Stefan Banach y otros. Un *espacio vectorial* es un conjunto L de elementos $a, b, c, \dots$ que satisfacen ciertas condiciones, entre las que está la exigencia de que si a y b son elementos de L y α y β son números reales (o complejos, en su caso), entonces $\alpha a + \beta b$ es otro elemento de L . Si los elementos de L son funciones, el espacio vectorial se denomina un *espacio vectorial funcional*, y una aplicación lineal de este espacio en el cuerpo de los números reales o complejos se llama un *funcional lineal*.

Con esta nomenclatura, Schwartz entendía por una *distribución* un funcional lineal continuo sobre el espacio de las funciones que son diferenciables y satisfacen ciertas otras condiciones. La función de Dirac, por ejemplo, es un caso particular de distribución.

Schwartz dio entonces una definición adecuada de derivada de una distribución, de tal manera que la derivada de una distribución sea siempre otra distribución. Esto proporciona una potente generalización del análisis, con aplicaciones inmediatas a la teoría de probabilidades y a la física. El análisis funcional, que es esencialmente una generalización del cálculo de variaciones, y la teoría de distribuciones han sido también importantes campos de investigación en la matemática desde mediados del siglo xx.

LA APARICIÓN DE LAS COMPUTADORAS

La teoría de probabilidades y la estadística han estado a lo largo del siglo xx estrechamente unidas, no solo a la matemática pura, sino a otro campo que constituye una de las características diferenciales más notables de nuestra época, la de la dependencia cada vez mayor hacia las computadoras electrónicas o de “alta velocidad”. El tema de las máquinas calculadoras no era nuevo en absoluto, puesto que Pascal y Leibniz habían conseguido modestos éxitos en este campo casi 300 años antes. Y, de hecho, el profeta de las máquinas calculadoras complejas había sido el matemático inglés del siglo xix Charles Babbage, personaje excéntrico que sostuvo durante toda su vida una polémica contra los organilleros, mientras intentaba desesperadamente conseguir fondos para completar su ambicioso proyecto de construir una “máquina diferencial”.



Este invento, concebido en 1833, fue financiado durante algún tiempo por el gobierno británico, pero cuando el ministro de Hacienda cortó las subvenciones, en 1842, Babbage lo comparó amargamente con el destructor del bello templo de Éfeso. La máquina que había imaginado habría tenido mucha de la flexibilidad de las máquinas modernas, pero no su velocidad, obviamente. Habría podido efectuar todas las operaciones aritméticas, así como almacenar información para uso posterior, todo ello por medio de un complicado diseño de ruedas dentadas, engranajes y palancas. Sin embargo, esta “máquina”, una verdadera calculadora digital, no se terminó nunca.

La época moderna de la computadora mecánica se puede decir que comenzó hacia 1925 en el *Massachusetts Institute of Technology*, donde Vannevar Bush (1890-1974) y sus colegas construyeron una computadora analógica de gran tamaño, movida por motores eléctricos, pero mecánica en todo lo demás. En 1939 la *International Business Machines Corporation* comenzó a construir el MARK 1, que iba a ser un aparato electromecánico completamente automático siguiendo las líneas del proyecto de Babbage, pero antes de estar terminado en 1944 ya se había quedado anticuado respecto de los planes para construir el ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*).

Esta fue la primera computadora totalmente electrónica, basada en el paso de haces de electrones por tubos de vacío. Los comienzos del proyecto se debieron a presiones militares, y entre los que colaboraron en el proyecto estuvo John von Neumann (1903-1957), que había nacido en Budapest y había enseñado en Berlín y en Hamburgo antes de trasladarse a los Estados Unidos en 1930, donde, junto con Albert Einstein, fue uno de los primeros miembros permanentes del *Institute for Advanced Study* en 1933.

Entre 1944 y 1946 colaboró para el ejército en la redacción de un informe sobre las posibilidades que ofrecían las computadoras y en 1949 la primera computadora programable comenzó a funcionar. Dos años más tarde,

la *Sperry Rand Corporation* terminaba de construir la UNIVAC I (*Universal Automatic Calculator*), pero el mundo de las computadoras cambia con tal rapidez que esta ya es hoy una pieza de museo expuesta en la *Smithsonian Institution*.

La electricidad ha alterado de tal manera las formas tradicionales de la vida del hombre que se puede decir que vivimos en la era de la electricidad; y ahora los instrumentos electrónicos pueden estar a punto de modificar en parte nuestro desarrollo matemático. Las computadoras han alcanzado tal grado de complejidad que sobrepasan en mucho los sueños de Babbage, que vivió solo un siglo antes de su época. Problemas que superaban de manera irremediable las posibilidades de cálculo de los matemáticos de épocas anteriores se han podido resolver recientemente con la ayuda de las computadoras más rápidas. Si, como decía Kepler, la invención de los logaritmos duplicaba la vida de un astrónomo, ¿por cuánto más no han multiplicado las computadoras electrónicas las posibilidades de los matemáticos aplicados y los físicos!

Con este poderío creciente se ha producido también una verdadera proliferación de nuevos campos de la matemática aplicada: programación lineal, teoría de juegos, investigación operativa y muchos otros. Von Neumann, que fue uno de los matemáticos más creativos y multifacéticos del siglo xx, fue también un pionero en el nuevo planteamiento de la economía matemática.

Hacia ya mucho tiempo que la econometría utilizaba el análisis matemático, pero fue sobre todo a través de *Teoría de juegos y el comportamiento económico* de Von Neumann y Oskar Morgenstern, publicado en 1944, como la llamada matemática finita vino a jugar un papel cada vez más importante en las ciencias sociales. Las interrelaciones entre las diversas ramas del pensamiento científico se fueron haciendo tan complejas que Norbert Wiener (1894-1964), un matemático prodigio y durante muchos años profesor de matemática en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, publicó en 1948 su libro *Cibernética*, que abrió un campo nuevo dedicado al estudio del control y la comunicación en animales y máquinas.

Tanto Von Neumann como Wiener se interesaron profundamente por la mecánica cuántica y el primero de ellos fue nombrado en 1955 miembro de la *Atomic Energy Commission*; sin embargo, sería equivocado pensar que estos hombres y otros análogos eran simplemente matemáticos aplicados. Los dos contribuyeron tanto o más que a la matemática aplicada a la matemática pura: a la teoría de conjuntos, a la teoría de grupos, al cálculo operacional, a la teoría de probabilidades y a la lógica matemática y los fundamentos de la matemática. De hecho, Von Neumann fue quien, hacia el año 1929, dio su nombre a los espacios de Hilbert, así como la primera axiomatización de este concepto y la forma completamente abstracta que tienen hoy.

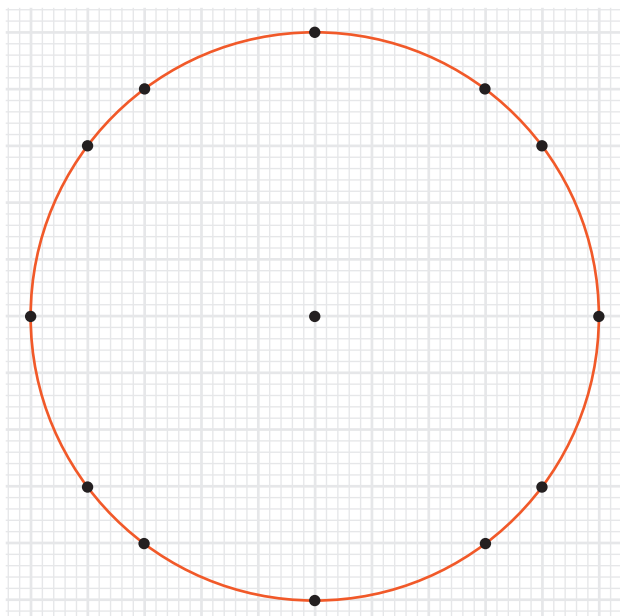
Por su parte, a comienzos de la década de 1920, Wiener desempeñó un importante papel en los orígenes de la teoría moderna de los espacios lineales y, en particular, en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. El espectacular desarrollo de la matemática aplicada durante el siglo xx no solo no ha frenado el desarrollo de la matemática pura, sino que en muchos casos lo ha impulsado, y tampoco el nacimiento de ramas nuevas de la matemática ha debilitado el vigor de las más antiguas.



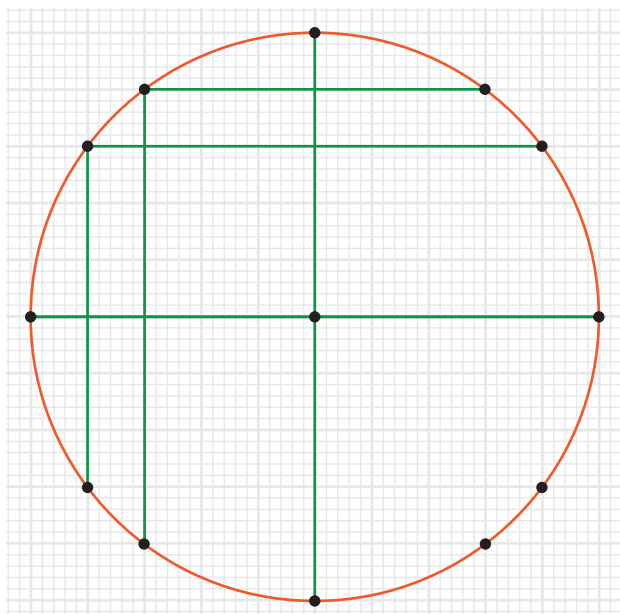
Usando *GeoGebra*, descomponer el número 100 como suma de cuatro cuadrados de números naturales.

Solución

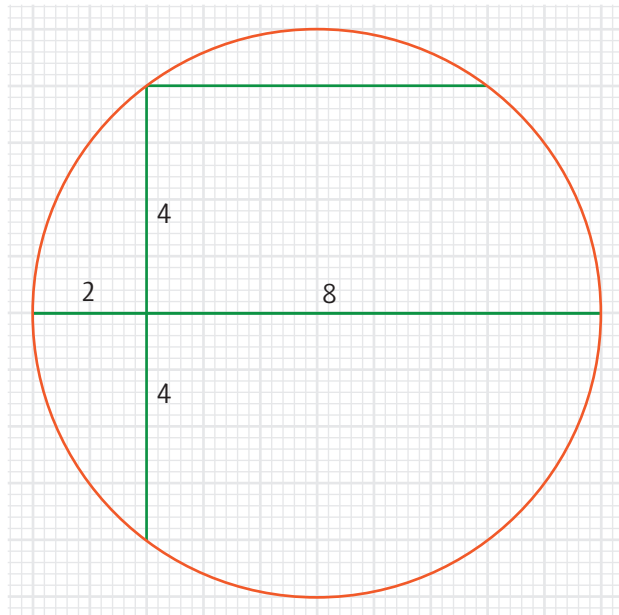
En la cuadrícula con cuadrados de 1×1 cm, trazamos una circunferencia de radio 5 cm con centro en un punto de la cuadrícula, como en la figura.



Usando los puntos de la cuadrícula que están en la circunferencia, podemos trazar cuerdas perpendiculares y usar el resultado del Problema semanal N° 13 de 2025.



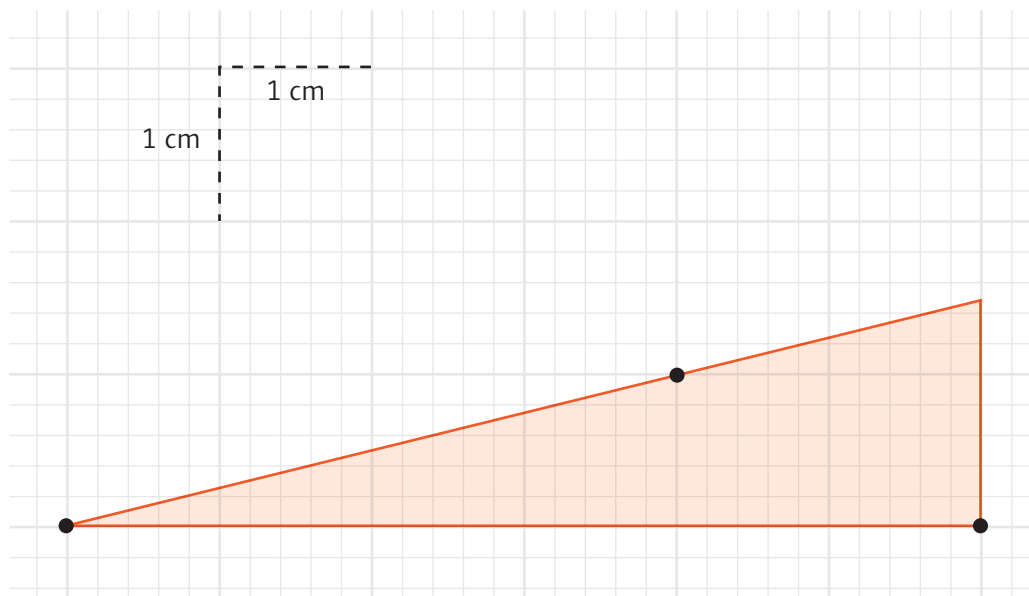
Con cada par de cuerdas que se corten en el interior del círculo tenemos una solución al problema. Por ejemplo, de la siguiente elección:



surge la igualdad:

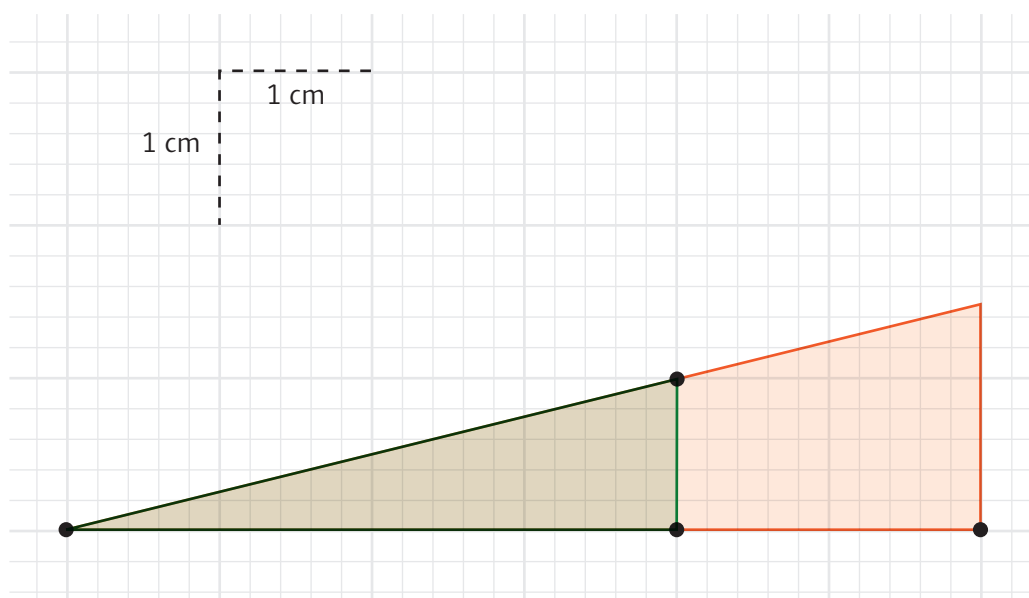
$$100 = 10^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 + 8^2.$$

Hallar el área del triángulo sobre la cuadrícula que muestra la siguiente figura:



Solución

Usaremos el hecho de que el triángulo dado es semejante al triángulo verde, con vértices en la cuadrícula, indicado en la figura a continuación.



La relación de semejanza, del triángulo mayor al triángulo menor, es $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$. Dado que el triángulo menor tiene su área de 2 cm^2 , el área del triángulo dado es:

$$\left(\frac{3}{1}\right)^2 \times 2 \text{ cm}^2 = \frac{9}{1} \text{ cm}^2.$$