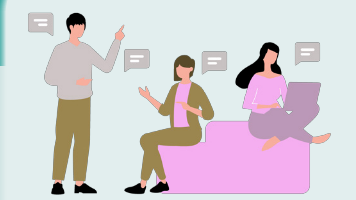
Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para estudiantes, profesores y maestros en actividad

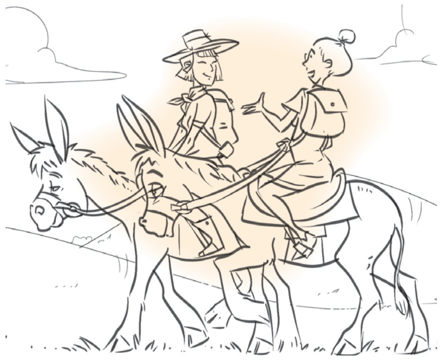
7ª época ● Nº 10 ● 7 de agosto de 2025



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

I. Dialogando con los maestros sobre los números y las transformaciones rígidas

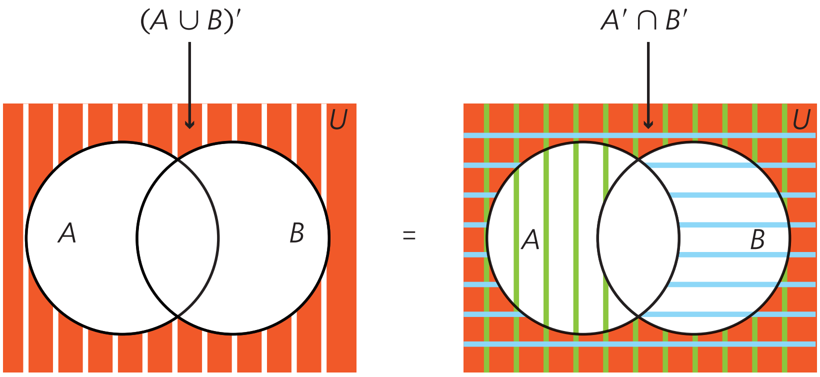
¿Qué es la matemática y la... imaginación, creatividad y aventuras del pensamiento?



Aparición del álgebra abstracta

LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS Y LA LITERATURA. PEIRCE, CLIFFORD Y DODGSON

Entre quienes continuaron la obra de Boole después de su muerte estuvieron Augustus De Morgan y Benjamin Peirce. Ambos encontraron, independientemente, lo que se suele denominar como *ley de dualidad de De Morgan:* para toda proposición en la que intervengan la suma y la multiplicación lógicas, hay otra proposición correspondiente a ella en la que están intercambiadas suma y multiplicación. En particular, tenemos lo que se llama *fórmula de De Morgan para conjuntos:* Si A y B son subconjuntos de un conjunto U, entonces el complemento de la unión de A y B es la intersección de los complementos de $A' \cap B'$, y el complemento de la intersección de A y B es la unión de los complementos de $A \cup B$ (véase la figura siguiente).



Benjamín Peirce estuvo ligado al *Harvard College* durante más de 50 años, primero como estudiante y luego como profesor. Su obra más importante fue su artículo sobre *Linear Associative Algebra,* leído ante la *American Association for the Advancement of Science* en 1864, pero que no se publicó hasta 1881 en el *American Journal of Mathematics.* Las álgebras lineales asociativas incluyen el álgebra ordinaria, el análisis vectorial y los cuaterniones como casos particulares, pero no están restringidas a las unidades 1, i, j, k. Peirce construyó tablas de multiplicar para 162 álgebras distintas, ¡lo que estaba sin duda bien lejos de la idea predominante a comienzos de este siglo de que había un álgebra única!

Charles Sanders Peirce continuó la obra de su padre en esta dirección demostrando que, de todas estas álgebras, solo hay tres en las que la división esté definida de manera única: el álgebra real ordinaria, el álgebra de los números complejos y el álgebra de los cuaterniones.

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán y los doctores Richard Courant, Herbert Robbins, Carl Boyer, Harold Scott Macdonald Coxeter y Roger Penrose.

Fue en conexión con su trabajo sobre álgebras lineales asociativas cuando Benjamín Peirce dio en 1870 su definición bien conocida, “la Matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias”. Su hijo estaba completamente de acuerdo con este punto de vista, como resultado de la influencia de George Boole, pero insistía en que la matemática y la lógica no son lo mismo, “la Matemática es una ciencia puramente hipotética: no ofrece nada más que proposiciones condicionales. La lógica, en cambio, es categórica en sus afirmaciones”. Esta distinción iba a verse discutida más a fondo por todo el mundo matemático durante el primer tercio del siglo xx.

En Inglaterra, mientras tanto, desarrollaba ideas bastante parecidas William Kingdon Clifford (1845-1879), otro de los muchos graduados por el *Trinity* con los que nos encontramos, cuya brillante obra, como la de otro graduado del *Trinity* muy anterior a él, Roger Cotes, se vio interrumpida por su muerte prematura a los 34 años. Clifford era una persona extraordinaria en varios aspectos. Por mencionar uno insólito, fue un gimnasta consumado que podía elevarse en la barra con una cualquiera de las dos manos, proeza extraordinaria para cualquiera, pero especialmente para un matemático.

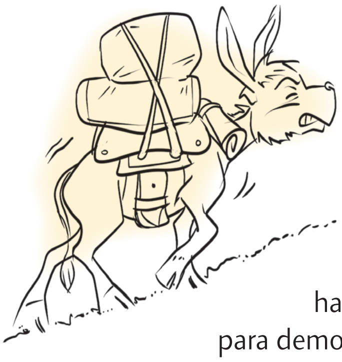
Además, ganó algunos premios de declamación, algo casi inaudito para alguien que se graduó como segundo *wrangler* en matemática. Y, por último, escribió una colección de cuentos para niños, *The Little People*, lo mismo que hizo el matemático de Oxford Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), más conocido por el seudónimo de Lewis Carroll, autor del famosísimo cuento *Alice en el país de las maravillas*. Frecuentemente citado por Harold Scott Coxeter *lo citaba con frecuencia* al tratar las transformaciones geométricas.

Ilustraciones en grabado de *Alicia en el país de las maravillas,* de Lewis Carroll.

Dodgson publicó con su verdadero nombre muchos artículos y libros de tema matemático. Destacan *El juego de la lógica* y *Euclides y sus rivales modernos*, además de *An Elementary Theory of Determinants,* escrito en 1867. En este último, da las condiciones por las cuales un sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales.

Aunque la mayor parte de su atención la dedicó Carroll a la geometría, escribió también sobre numerosos otros temas matemáticos: la cuadratura del círculo, el cifrado de mensajes (llegando a inventar algunos métodos), álgebra, aritmética electoral y votaciones, así como sobre lógica.

En los últimos años de su vida no solo prestó atención a las matemáticas recreativas (con juegos de cálculo como los diez nudos de su libro *Un cuento enmarañado*) o al estudio de las paradojas (analizó la paradoja de Aquiles y la tortuga y elaboró una propia, la de la barbería), sino que también se dedicó a la búsqueda de formas de exposición sistemática de, por ejemplo, la teoría del silogismo. Por lo demás, elaboró cuadros, fichas y diagramas del tipo de los de Venn e introdujo árboles lógicos.



Isometría en el plano euclidiano

Es natural, pues hemos estado hablando de reflexiones, rotaciones y traslaciones, que nos preguntemos por qué tenemos en la rotación y en la traslación un desplazamiento (o movimiento) continuo, cuando así se le considera, mientras no podemos hacerlo del mismo modo con una reflexión. Y también es razonable la pregunta que inquiere por alguna otra clase de isometría que se parezca en este aspecto a la reflexión. Cuando hayamos respondido a estas preguntas en términos de sentido, la información nos servirá para demostrar un notable teorema y para describir las siete maneras posibles de repetir un diseño en una franja sin fin.

ISOMETRÍAS DIRECTAS Y OPUESTAS

Al hacer varias aplicaciones de axiomas se puede demostrar que un punto cualquiera P que está en el plano de dos triángulos congruentes ABC, $A'B'C'$ determina un punto correspondiente P' tal que $AP = A'P'$, $BP = B'P'$, $CP = C'P'$. De la misma manera, de otro punto Q se tiene Q', y $PQ = P'Q'$. En consecuencia: dos triángulos congruentes cualesquiera se relacionan por medio de una isometría única.

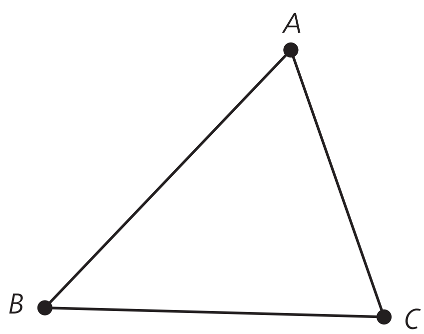
Recordemos cómo intervenía la comparación de dos triángulos coincidentes ABC, ACB. Podemos ver de una manera intuitiva que aquí hay una distinción de sentido: si uno es el contrario al de las agujas del reloj, el otro es el sentido de las agujas del reloj. Tenemos una propiedad topológica del plano euclidiano en que la distinción se puede extender de los triángulos que coinciden a los que son distintos: dos triángulos dirigidos cualesquiera, ABC y $A'B'C'$ o bien tienen el mismo sentido, o bien tienen sentidos diferentes. Esta idea intuitiva se puede investigar de manera más profunda.

Si ABC y $A'B'C'$ son congruentes, se dice que la isometría con la que se relacionan es *directa* u *opuesta* según conserve o invierta el sentido, es decir, de acuerdo con que ABC y $A'B'C'$ tengan sentidos iguales o distintos.

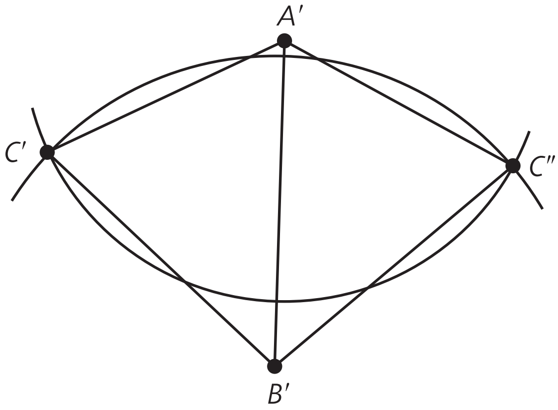
Se observa con facilidad que esta propiedad de la isometría no depende del triángulo ABC que se escoja: si una misma isometría relaciona a DEF con $D'E'F'$, donde DEF tiene el mismo sentido que ABC, entonces $D'E'F'$ tiene el mismo sentido que $A'B'C'$.

Es claro que las isometrías directas y opuestas se combinan como los números positivos y negativos (por ejemplo, el producto de dos isometrías opuestas es una directa). Como una reflexión es opuesta, una rotación (que es el producto de dos reflexiones) es directa. En particular, la identidad es directa. Algunos autores se refieren a las isometrías directas y opuestas como *desplazamientos* y *reversiones* o también como *congruencias propias e impropias*.

El teorema "Si en una isometría hay más de un punto invariante, es o bien la identidad o bien una reflexión" puede extenderse de la manera siguiente: **"Si se dan dos segmentos de recta (o pares de puntos) congruentes AB, $A'B'$, se relacionan por medio de dos isometrías: una directa y una opuesta"**.



Para demostrarlo, tómese un punto cualquiera C que no esté en la recta AB y constrúyase C', de manera que el triángulo $A'B'C'$ sea congruente con ABC. Las dos posiciones posibles de C' (ver figura siguiente),

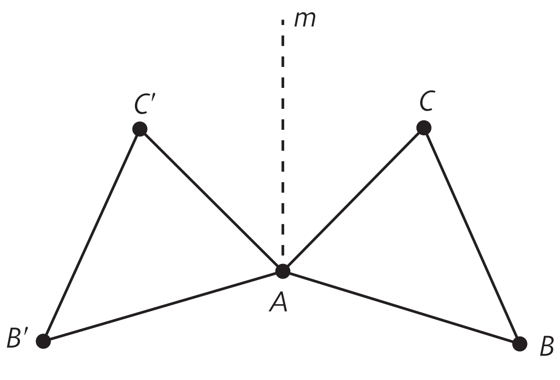


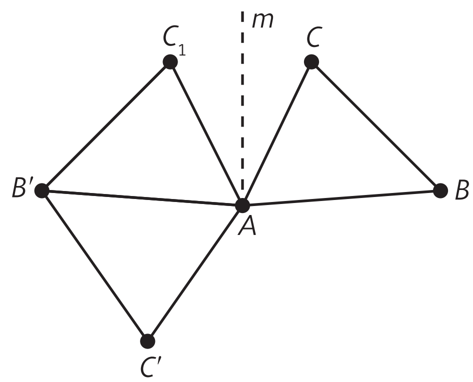
que se han señalado como C', C'' proporcionan ambas isometrías. Puesto que cualquiera de ellas se puede derivar de la otra si se la refleja en $A'B'$, una de las isometrías es directa y la otra es opuesta.

Con el objeto de que el estudio sea completo, necesitamos el teorema siguiente:

"Cada isometría del plano es producto de no más de tres reflexiones. Cuando hay un punto invariante, el 'tres' se puede reemplazar por 'dos'".

Esto lo demostraremos en cuatro pasos por medio de lo dicho más arriba. Si los triángulos ABC, $A'B'C'$ coinciden, la isometría es la identidad, trivialmente (la identidad es el producto de una reflexión consigo misma). Si A coincide con A', y B con B', mientras C y C' son distintos, los triángulos se relacionan por la reflexión en AB. El caso en el que solamente A coincide con A' se puede reducir a uno de los casos anteriores al reflejar ABC en m, la mediatriz de BB' (ver la figura siguiente).





Por último, el caso general se puede reducir a cualquiera de los tres primeros al reflejar ABC en la mediatriz de AA'.

Como una reflexión invierte el sentido, una isometría es directa u opuesta de acuerdo con que sea producto de un número par o impar de reflexiones.

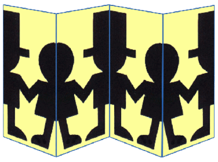
Como la identidad es producto de dos reflexiones (a saber, de cualquier reflexión consigo misma), podemos decir con sencillez que una isometría cualquiera es el producto de dos o de tres reflexiones, según se tenga que sea directa u opuesta. En lo particular,

"Toda isometría con un punto invariante es una rotación o una reflexión, según sea directa u opuesta".

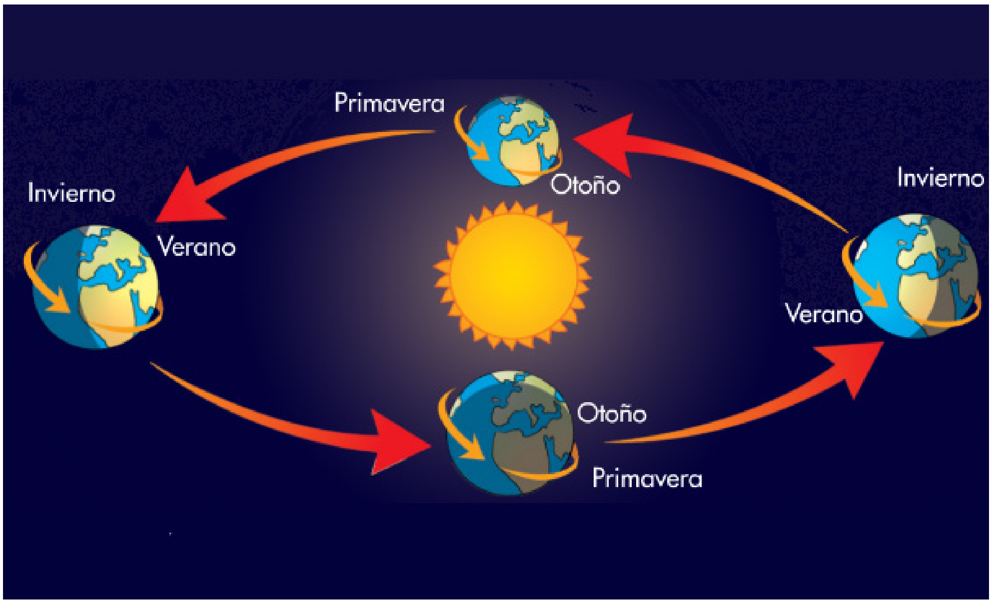
Ejercicios de entrenamiento

1. Mencione dos isometrías directas.
2. Mencione una isometría opuesta. ¿Hay alguna otra clase?
3. Si AB y A_1B_1 se relacionan por medio de una rotación, ¿cómo se puede construir el centro de rotación? **Indicación:** Las mediatrices de AA' y de BB' no son necesariamente diferentes.
4. El producto de reflexiones en tres rectas que pasan por un punto es otra recta que pasa por el mismo punto.

TRASLACIÓN

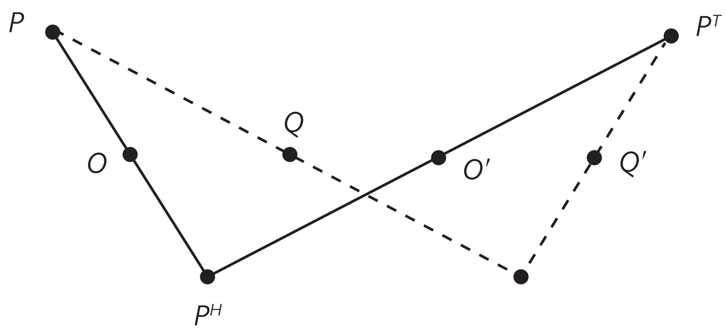


Por *traslaciones* entendemos los movimientos directos sin cambios de orientación, es decir, aquellos que mantienen la forma y el tamaño de las figuras o los objetos trasladados a los cuales deslizan según un vector. Una traslación desplaza cada punto de una figura la misma cantidad en una misma dirección.



Ejemplo de traslación.

Hasta aquí hemos venido considerando ciertas isometrías, a saber, reflexiones (que son opuestas) y rotaciones (que son directas), que siempre tienen por lo menos un punto invariante. Una isometría conocida que no deja ningún punto como invariante es la traslación, que se puede describir como el producto de semigiros alrededor de dos puntos distintos O, O' (ver la figura siguiente).



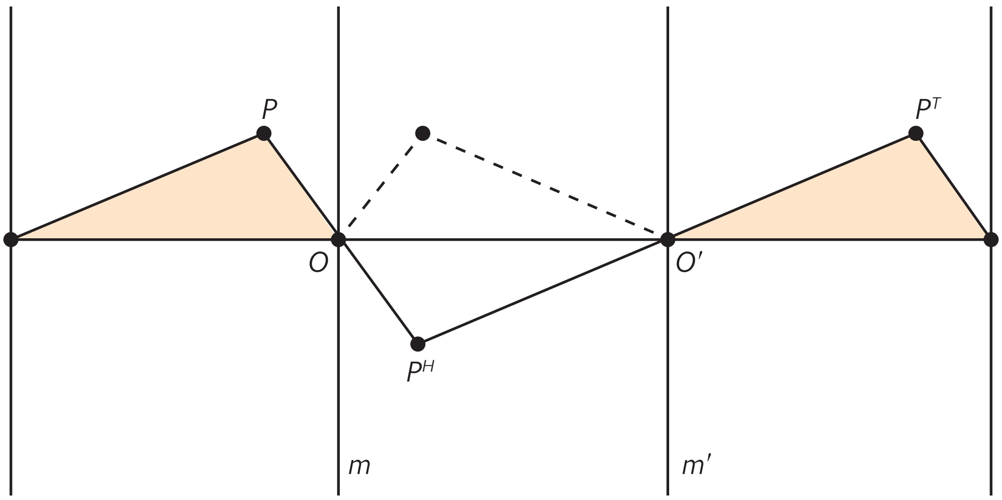
El primer semigiro transforma a un punto arbitrario P en P^H, y el segundo, a su vez, transforma a este en P^T, con el resultado final de que PP^T es paralelo a OO' y de doble longitud. Así, tenemos que la longitud y la dirección de PP^T son constantes e independientes de la posición de P. Puesto que su longitud y su dirección determinan por completo a una traslación, el producto de los semigiros alrededor de O y de O' es igual al producto de semigiros alrededor de Q y de Q' donde QQ' es igual y paralelo a OO'.

Esto significa que $OO'QQ'$ es un paralelogramo que se puede derrumbar para formar cuatro puntos colineales, como se tiene en la figura análisis de arriba.

Así, dada una traslación, se le puede asignar arbitrariamente el centro de uno de los dos semigiros.

El producto de dos traslaciones es otra traslación.

Veamos: podemos disponer los centros de manera que la primera traslación sea producto de semigiros alrededor de O_1 y O_2, mientras la segunda resulte del producto de semigiros alrededor de O_2 y O_3. Al combinarse, se cancelan mutuamente los semigiros alrededor de O_2, lo que nos deja solamente el producto de semigiros alrededor de O_1 y de O_3. De la misma manera, si m y m' (ver la figura a continuación en página siguiente)



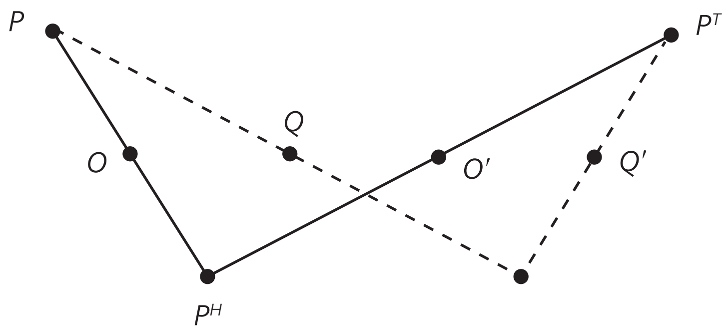
son las rectas que pasan por O y O' y son perpendiculares a OO' los semigiros alrededor de O y O' son producto de las reflexiones en m y en OO', OO' y m'. Al combinarse, las dos reflexiones en OO' se cancelan mutuamente, y no nos queda sino el producto de las reflexiones en m y en m'. En consecuencia:

El producto de reflexiones en dos espejos paralelos es una traslación que recorre el doble de la distancia entre los espejos.

Si la traslación T lleva a P y P^T y a Q hasta Q^T, tendremos que el segmento QQ^T es igual y paralelo con respecto a PP^T; por lo tanto, PQQ^TP^T es un paralelogramo. De la misma manera, si otra traslación U coloca a P en Q, llevará también a P hasta Q^T; por lo tanto, $TU = UT$.

Si queremos examinarlo en detalle, veremos que si Q es P^U, Q^T será P^{UT}.

Pero U traslada a P^T hasta P^{TU}. Por lo tanto, P^{TU} y P^{UT} coinciden para toda posición de P. En otras palabras, **las traslaciones son conmutativas.**



El producto de un semigiro H y una traslación T es otro semigiro: pues siempre podremos expresar la traslación como producto de dos semigiros, uno de los cuales es H; por ejemplo, $T = HH'$, y entonces tendremos que

$$HT = H^2H' = H'.$$

El producto de un semigiro y una traslación es otro semigiro.

Ejercicios de entrenamiento

1. Si T es el producto de semigiros alrededor de O y O', ¿cuál es el producto de semigiros alrededor de O' y O?
2. Al expresar una traslación como producto de dos reflexiones, ¿en qué medida se puede tomar arbitrariamente uno de los dos espejos?
3. ¿Qué es el producto de rotaciones que recorren ángulos opuestos (α y $-\alpha$) alrededor de dos puntos distintos?
4. El producto de las reflexiones en tres rectas paralelas es la reflexión en otra recta que pertenece al mismo haz de paralelas.

5. Todo producto de tres semigiros es un semigiro.
6. Si H_1, H_2, H_3 son semigiros, $H_1H_2H_3 = H_3H_2H_1$.
7. Exprese la traslación que recorre una distancia a a lo largo del eje de las x como una transformación de coordenadas cartesianas. Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación de una curva, ¿cuál será la ecuación de la curva transformada? Considere, como ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

REFLEXIÓN EN DESLIZAMIENTO

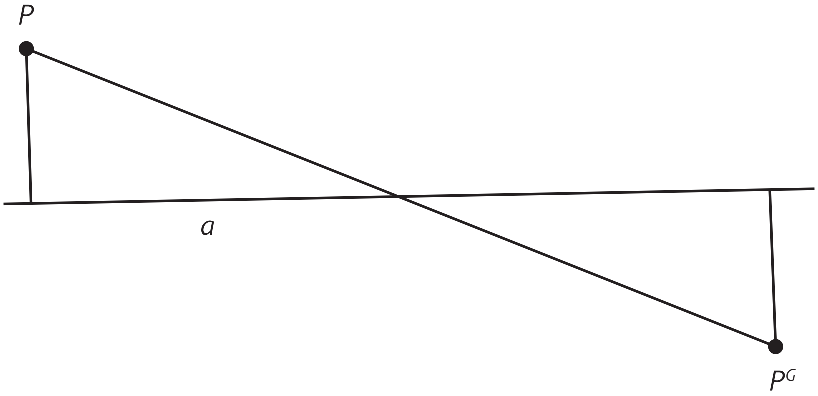
La reflexión deslizante es una composición de una reflexión a través de una línea y una traslación paralela a la línea de reflexión. Ejemplo: es como una reflexión que también tiene un deslizamiento.

Dado que esta huella de huella tiene simetría de reflexión deslizada, la aplicación de la operación hará que cada huella izquierda corresponda con una huella derecha, y que cada huella derecha coincida con una huella izquierda, dando lugar a una configuración final que es indistinguible de la original.

Conocemos ya tres clases de isometría: reflexión, rotación y traslación. Otra clase la constituye la reflexión en *deslizamiento* (o, con más sencillez, "deslizamiento"), que es el producto de la reflexión en una recta a y la traslación a lo largo de la misma recta. Si nos representamos la recta como un camino en la nieve, tendremos huellas consecutivas que se relacionan entre sí por medio de un deslizamiento. Una isometría como esta queda determinada por su eje a y por la expresión de la traslación componente.

Como una reflexión es opuesta, mientras una traslación es directa, su producto será una isometría opuesta. Decimos, entonces, que una reflexión en deslizamiento es una isometría opuesta que carece de punto invariante.

Si una reflexión en deslizamiento G transforma un punto arbitrario P en P^G (como se muestra en la figura siguiente),

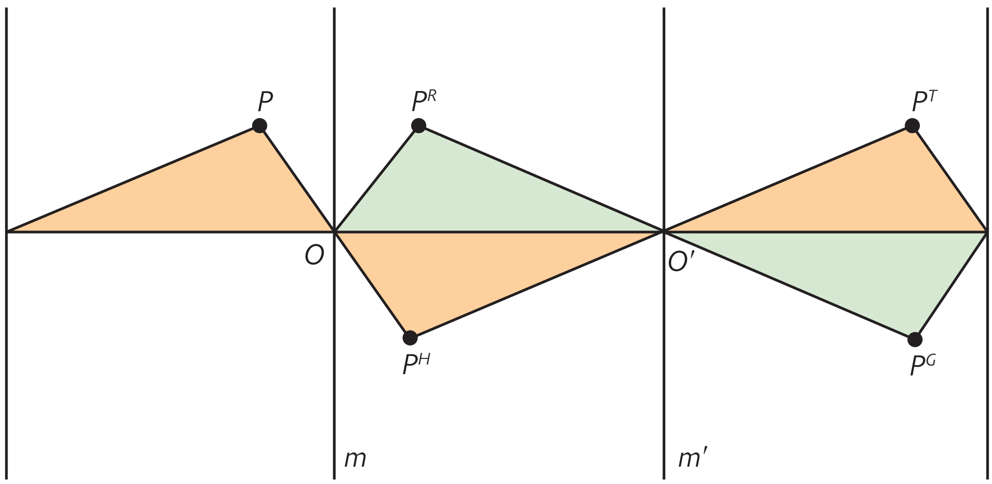


P y P^G equidistan del eje a desde lados opuestos. En consecuencia:

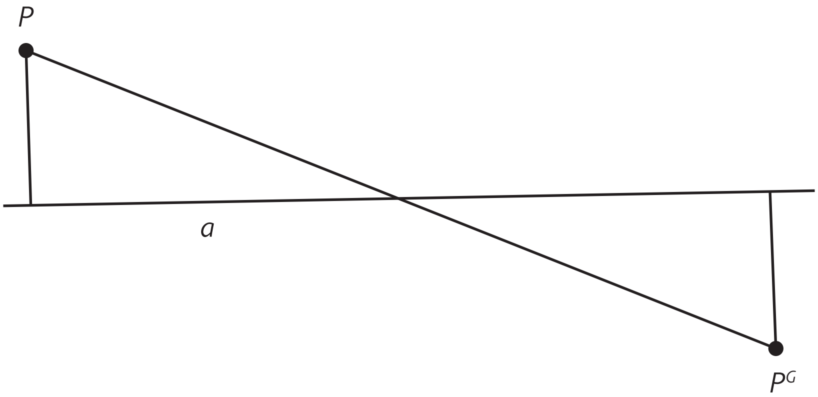
Por el punto medio del segmento de recta PP^G pasa el eje, para toda posición de P.

Denotemos por R_1 y T la reflexión y la traslación componentes. Es evidente que se conmutan, de manera que

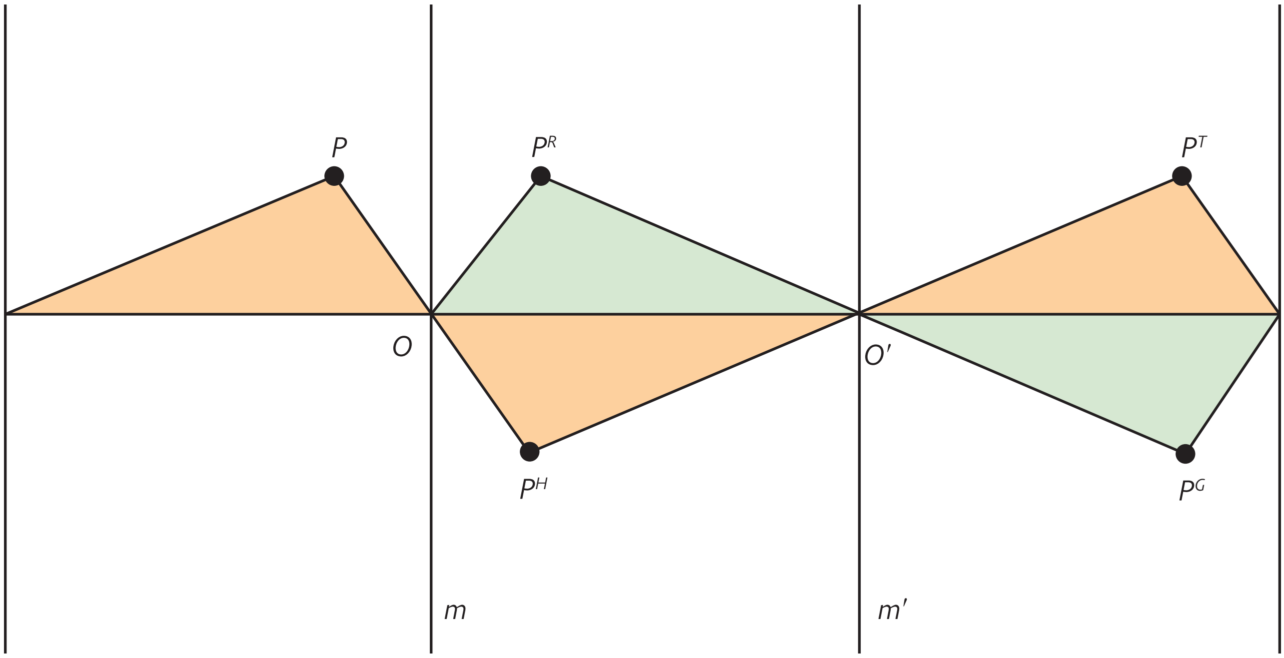
$$G = R_1T = TR_1.$$



Hemos visto en la figura de arriba que se puede expresar la traslación T como producto de dos semigiros o dos reflexiones paralelas. Si identificamos la recta a de la figura siguiente



con la recta OO' de la figura que sigue,



sean entonces R, R' las reflexiones en m, m'. Tendremos que el producto de los dos semigiros

$$H = RR_1 = R_1R, \qquad H' = R'R_1 = R_1R'$$

es

$$T = HH' = RR_1R_1R' = RR',$$

y la reflexión en deslizamiento será

$$G = R_1T = R_1RR' = HR' = TR_1 = RR'R_1 = RH'.$$

Y así, una reflexión en deslizamiento se puede expresar como producto de tres reflexiones (dos de ellas perpendiculares a la tercera) o de un semigiro y una reflexión, o aun de una reflexión y un semigiro. Y, al revés, el producto de un semigiro cualquiera y una reflexión cualquiera (o viceversa) es una reflexión de deslizamiento, siempre y cuando el centro del semigiro no esté situado en el espejo.

Vimos que toda isometría directa es, en el plano, producto de dos reflexiones, es decir, una traslación o una rotación según los espejos, fueran paralelos o intersecantes; también que cualquier isometría opuesta que tenga un punto invariante es una reflexión.

Nuestro catálogo de isometrías quedará completo al añadir una isometría opuesta en la que no hay punto invariante. Si una isometría como esta última, sea S, transforma el punto arbitrario A en A', considérese el semigiro H que intercambia ambos puntos. El producto HS, que es una isometría opuesta en la que el punto A' permanece invariante, no puede ser sino una reflexión R. Por lo tanto, la isometría opuesta dada es la reflexión en deslizamiento

$$S = H^{-1}R = HR:$$

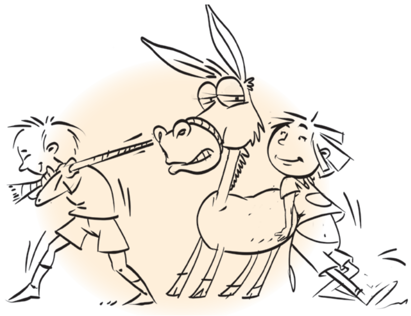
Toda isometría opuesta que carece de punto invariante es una reflexión en deslizamiento.

En otras palabras:

Todo producto de tres reflexiones es o bien una sola reflexión o bien una reflexión en deslizamiento.

En particular, el producto RT de una reflexión cualquiera y de una traslación cualquiera es una reflexión en deslizamiento que degenera en una reflexión pura cuando el espejo de R es perpendicular a la dirección de la traslación T (y en este caso, las reflexiones R y RT se pueden tomar como dos reflexiones paralelas cuyo producto es T). Pero como la reflexión G ha de tener un eje definido (el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos PP^G), su descomposición en una reflexión y una traslación a lo largo del espejo es única (distinta de su descomposición en una reflexión y un semigiro, donde podemos tomar como espejo cualquier perpendicular al eje o, de manera equivalente, el centro del semigiro como un punto cualquiera del eje).

Ejercicios de entrenamiento



1. Si el punto medio de AC es B, ¿qué clase de isometría transformará (a) AB en CB, (b) AB en BC?
2. Toda isometría directa es producto de dos reflexiones. Toda isometría opuesta es producto de una reflexión y un semigiro.
3. Descríbase el producto de la reflexión en OO' y del semigiro alrededor de O.
4. Descríbase el producto de dos reflexiones en deslizamiento cuyos ejes son perpendiculares.
5. Todo producto de tres reflexiones en deslizamiento es una reflexión en deslizamiento.
6. El producto de tres reflexiones es una reflexión si y solo si los tres espejos son o bien concurrentes o bien paralelos.
7. Si R_1, R_2, R_3 son tres reflexiones, $(R_1R_2R_3)^2$ es una traslación.
8. Describir la transformación $(x, y) \rightarrow (x + a, -y)$. Justifique la afirmación de que, al aplicarla, se transforma la curva $f(x, y) = 0$ en $f(x - a, -y) = 0$.

Biografía

Gerhard Thomsen

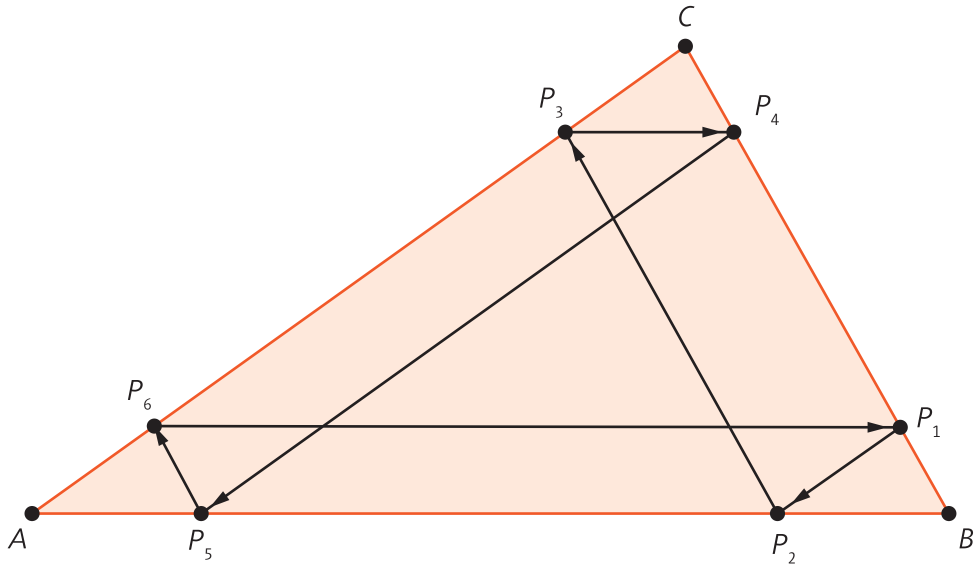
Gerhard Thomsen (23 de junio de 1899, Hamburgo-4 de enero de 1934, Rostock, Alemania) fue un matemático alemán, bien conocido por su trabajo en diversas ramas de la geometría elemental de las transformaciones.

Su padre, Georg Thomsen, era médico. Gerhard creció en Hamburgo y asistió al *Johanneum Gymnasium* (escuela secundaria) de 1908 a 1917. Después de completar la escuela, sirvió en el ejército durante el último año de la Primera Guerra Mundial. En 1919 se convirtió en uno de los primeros estudiantes de la recién fundada Universidad de Hamburgo, especializándose en matemática y ciencias naturales. Aparte de un interludio temporal, Thomsen estudió en esta ciudad hasta 1923. Recibió una certificación para enseñar en escuelas secundarias en el otoño de 1922 y, finalmente, su doctorado le fue otorgado en el verano del año siguiente. A continuación, trabajó brevemente como asistente en el Instituto de Tecnología de Karlsruhe antes de regresar a Hamburgo durante la primavera de 1925, en una capacidad similar. Mientras trabajaba en su tesis de habilitación, Thomsen pasó un año en Roma con una beca Rockefeller para estudiar con el matemático italiano Tullio Levi-Civita. Recibió su habilitación en Hamburgo en 1928 y comenzó a trabajar como profesor titular en la Universidad de Rostock en el otoño de 1929.

El 11 de noviembre de 1933, Thomsen pronunció una incendiaria charla sobre el peligro de marginar las ciencias exactas en escuelas y universidades, la cual tuvo una gran repercusión en el ámbito académico. En ella atacaba directamente la supresión de la educación científica, provocando que la Gestapo lo investigara. Fue arrollado por un tren en Rostock el 4 de enero de 1934. Se cree que su muerte posiblemente se debió a la investigación de la Gestapo.

En Hamburgo, Thomsen ayudó a Wilhelm Blaschke (asesor del doctorado de Thomsen) a aplicar el Programa de Erlangen de Felix Klein sobre geometría diferencial. También editó y organizó las conferencias de Blaschke sobre este tema para su publicación en una serie de tres libros. Él mismo escribió 22 artículos sobre diversas cuestiones de geometría, además de algunos otros sobre física teórica. Estos últimos se redactaron principalmente en italiano, en lugar de en alemán. Thomsen también publicó un libro sobre los fundamentos de la geometría elemental. En esta misma rama de la matemática existe un teorema que lleva su nombre.

El teorema de Thomsen demuestra que una trayectoria formada por segmentos de recta paralelos a las aristas de un triángulo siempre termina en su punto de partida.



Teorema de Thomsen $P_7 = P_1$.

Consideremos un triángulo arbitrario ABC con un punto P_1 en su arista BC. Se construye una secuencia de puntos y rectas paralelas de la siguiente manera. La recta paralela a AC que pasa por P_1 interseca a AB en P_2 y la recta paralela a BC que pasa por P_2 interseca a AC en P_3. Continuando de esta manera, la recta paralela a AB que pasa por P_3 interseca a BC en P_4 y la recta paralela a AC que pasa por P_4 interseca a AB en P_5. Finalmente, la recta paralela a BC que pasa por P_5 interseca a AC en P_6 y la recta paralela a AB que pasa por P_6 interseca a BC en P_7. El teorema de Thomsen ahora establece que P_7 es idéntico a P_1 y, por lo tanto, la construcción siempre conduce a una trayectoria cerrada $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$.

REFLEXIONES Y SEMIGIROS

Gerhard Thomsen desarrolló una teoría de gran belleza, en la que se expresan las propiedades geométricas de los puntos $O, O_1, O_2, \ldots$ y las rectas $m, m_1, m_2, \ldots$ (donde se entiende que son diferentes entre sí) como relaciones entre los semigiros $H, H_1, H_2, \ldots$ y las reflexiones $R, R_1, R_2, \ldots$ correspondientes. Rápidamente nos convencerá la equivalencia lógica de los pares de afirmaciones siguientes:

$$RR_1 = R_1R \leftrightarrow m \text{ y } m_1 \text{ son perpendiculares.}$$

$$HR = RH \leftrightarrow O \text{ es un punto de } m.$$

$$R_1R_2R_3 = R_3R_2R_1 \leftrightarrow m_1, m_2, m_3 \text{ o bien concurren, o bien son paralelas.}$$

$$H_1H = HH_2 \leftrightarrow O \text{ es el punto medio de } O_1O_2.$$

$$H_1R = RH_2 \leftrightarrow m \text{ es la mediatriz de } O_1O_2.$$

Ejercicio para fijar ideas. Interpretar las siguientes relaciones (*a*) $H_1H_2H_3H_4 = 1$; (*b*) $R_1R = RR_2$.

RESUMEN DE LOS RESULTADOS ACERCA DE ISOMETRÍAS

Tal vez algunos se encuentren confundidos por la profusión de términos técnicos, muchos de los cuales son palabras conocidas a las que se les ha asignado significados de una precisión desusada. Por esta razón repetiremos algunas definiciones, insistiendo en sus analogías y diferencias.

En el contexto que nos ocupa, una *transformación* es una correspondencia uno-a-uno de la totalidad del plano (o el espacio) consigo mismo. Una *isometría* es una clase especial de transformación, a saber, la que preserva la longitud. Una operación de simetría se aplica a una determinada figura y no tanto a todo el plano: es una isometría que transforma la figura en otra que es ella misma.

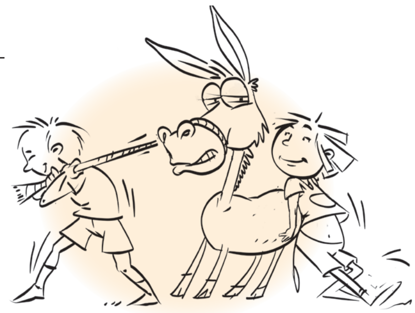
En el plano, una isometría *directa* (que preserva el sentido) es una rotación o una traslación, pues es el producto de dos reflexiones, tenga o no tenga un punto invariante, es decir, según que los espejos se intersecten o sean paralelos.

En el último caso, la longitud de la traslación es el doble de la distancia entre los espejos: en el primero, el ángulo de rotación es el doble del ángulo entre los espejos. En particular, el producto de las reflexiones en dos espejos perpendiculares es un *semigiro*, es decir, una rotación que recorre dos ángulos rectos. Además, el producto de dos semigiros es una *traslación*.

Una isometría *opuesta* (que invierte el sentido) es, en general, una *reflexión en deslizamiento*, pues es el producto de tres reflexiones: el producto de una reflexión y una traslación. El caso especial en el que la traslación es la identidad (es decir: una traslación que recorre una distancia de cero), la reflexión en deslizamiento se reduce a una sola reflexión con toda una recta de puntos invariantes, a saber, los puntos del espejo.

Para resumir lo dicho: **Una isometría directa cualquiera es o bien una traslación o bien una rotación. Una isometría opuesta cualquiera es o bien una reflexión o bien una reflexión en deslizamiento.**

Ejercicios de entrenamiento



1. Si S es una isometría opuesta, S^2 es una traslación.
2. Si R_1, R_2, R_3 son tres reflexiones, $(R_2R_3R_1R_2R_3)^2$ es una traslación a lo largo del primer espejo. **Indicación:** Como $R_1R_2R_3$ y $R_2R_3R_1$ son reflexiones en deslizamiento, sus cuadrados son conmutativos. Así,

$$(R_1R_2R_3)^2 = (R_2R_3R_1)^2 = (R_2R_3R_1)^2(R_1R_2R_3)^2,$$

es decir, R_1 y $(R_2R_3R_1R_2R_3)^2$ son conmutativos.

Biografía

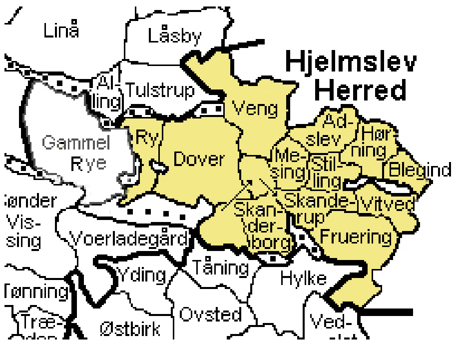
Johannes Trolle Hjelmslev

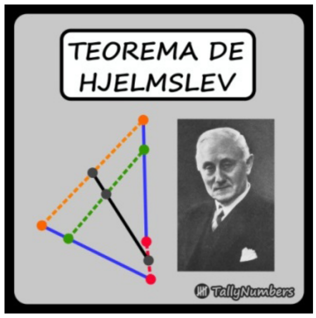
Johannes Trolle Hjelmslev (nombre de nacimiento: Johannes Trolle Petersen, 7 de abril de 1873, Hørning, cerca de Aarhus-16 de febrero de 1950, Copenhague, Dinamarca) fue un matemático danés.

Johannes era hijo del fabricante de sillas de montar Niels Peter Petersen y de Marie Kirstine Pedersen (nacida Trolle), y padre del lingüista Louis Hjelmslev. Después de graduarse en la Real Escuela de Skanderborg en 1888, llegó a la Escuela de Educación de Aarhus, donde obtuvo el título de filosofía en 1891 y pronunció su conferencia magistral sobre matemática en 1894.

A continuación, ejerció como docente y escribió textos académicos. Profesor en la enseñanza media, en 1897 se doctoró con un trabajo sobre geometría descriptiva infinitesimal. El notable ingenio geométrico contenido en esta tesis fue aun superado en la revisión presentada a la Sociedad de Ciencias en 1898, titulada *Un nuevo principio para las investigaciones de líneas geométricas*. En 1898 se casó con Agnes Elisabeth Bohse (nacida el 4 de octubre de 1874), hija adoptiva del doctor Bohse, establecido en la ciudad de Fredericia. Desde 1903 ocupó la cátedra de geometría descriptiva en el colegio politécnico, y entre 1917 y 1942 fue profesor de matemáticas en la Universidad de Copenhague.

Cambió su apellido a "Hjelmslev" en 1904, para evitar la confusión con su firma (J. Petersen), que ya estaba siendo usada por Julius Petersen. Tomó el nuevo apellido del distrito en el que nació, Hjelmslev Herred.

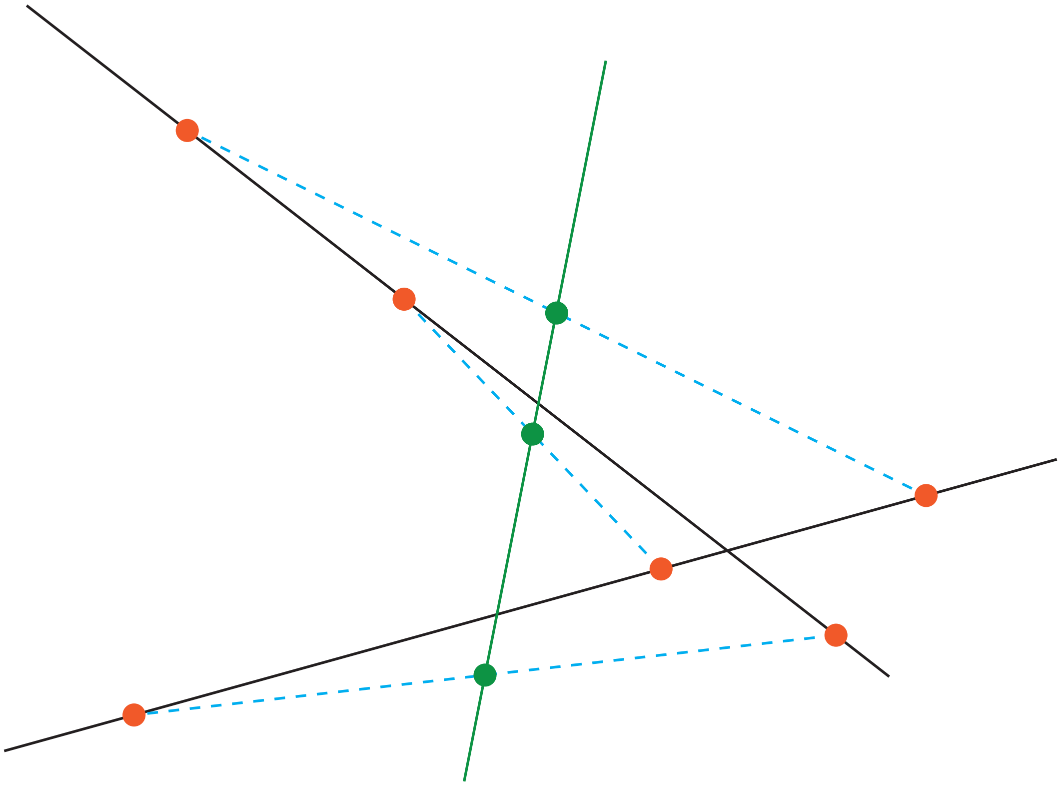




El distrito Hjelmslev Herred se ubica en el corazón de la principal isla de Dinamarca.
A la derecha, una representación del teorema de Hjelmslev.

EL TEOREMA DE HJELMSLEV

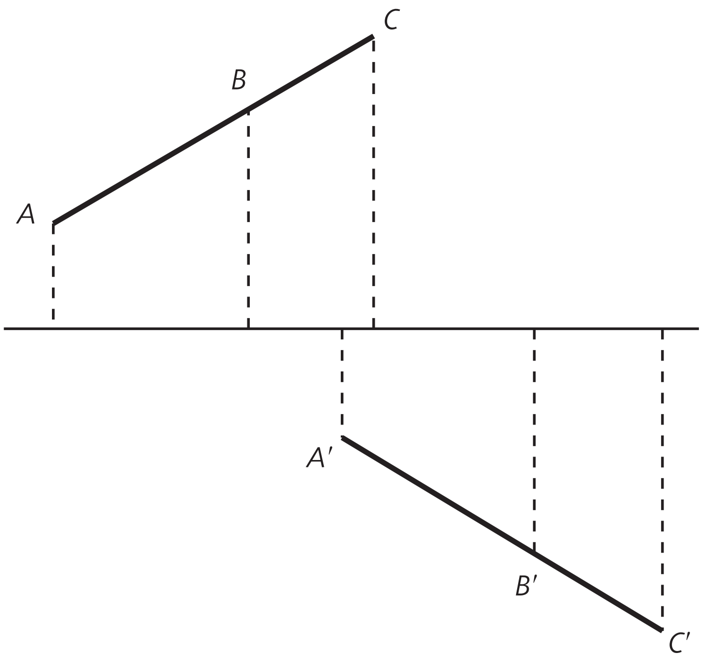
En geometría, el teorema de Hjelmslev, que lleva el nombre del matemático danés Johannes Hjelmslev (1873-1950), afirma que si los puntos *P*, *Q*, *R* ..., situados sobre una misma recta, se asignan isométricamente a los puntos *P*′, *Q*′, *R*′ ... de otra recta en el mismo plano, los puntos medios de los segmentos *PP*′, *QQ*′, *RR*′ también se encuentran en una recta.



Los tríos de puntos rojos en cada una de las dos rectas negras están a las mismas distancias relativas dentro de cada trío. Según el teorema de Hjelmslev, los tres puntos medios de los pares de puntos correspondientes están sobre la misma recta (verde).

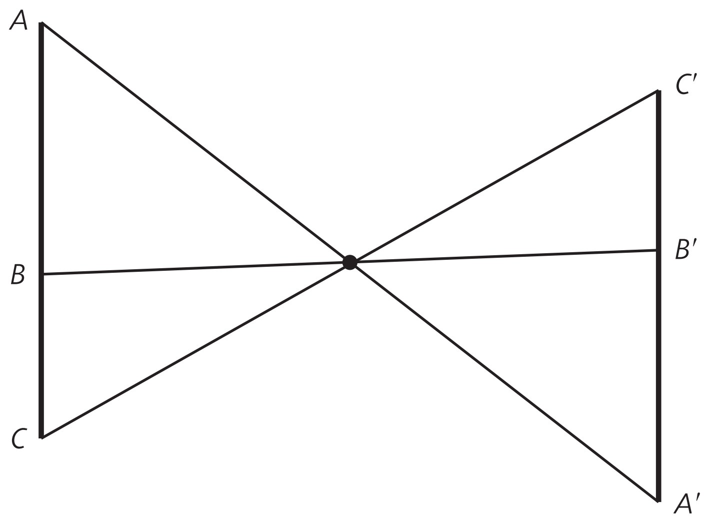
Ya vimos que dos segmentos de recta congruentes *AB, A′B* se relacionan por no más de dos isometrías: una directa y otra opuesta. Ambas tienen el mismo efecto sobre cada punto que es colineal con *A* y *B*, es decir, sobre todos los puntos de la recta infinita *AB* (por ejemplo, el punto medio de *AB* se transforma en el punto medio de *A′B′*). La isometría opuesta es una reflexión o una reflexión en deslizamiento en la que el espejo o el eje incluyen todos los puntos medios de las partes con los que se unen los pares de puntos correspondientes. Cuando coinciden dos de los puntos medios, la isometría es un semigiro, y coinciden también todos los demás. Por lo tanto,

[Teorema de Hjelmslev.] Cuando todos los puntos *P* de una recta se relacionan por medio de una isometría con todos los puntos *P*′ de otra recta, los puntos medios de los segmentos *PP*′ son diferentes y colineales o, de no ser así, coinciden todos.

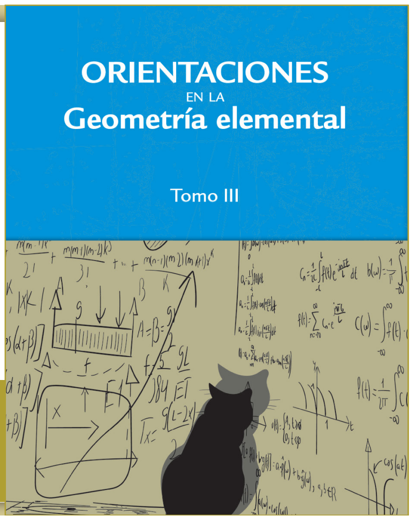


En particular, se tiene que si A, B, C están en una recta y A', B', C' están en otra (figura anterior), donde

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C',$$

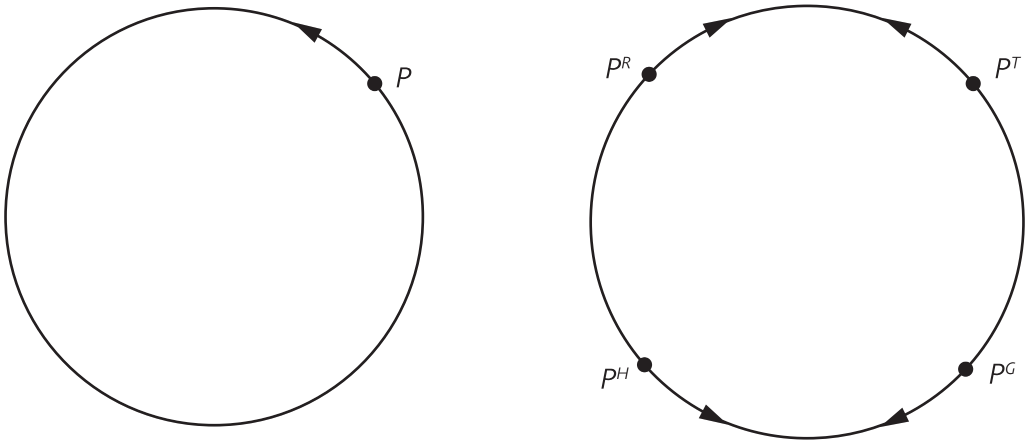


entonces los puntos medios de AA', BB', CC' o bien son colineales o bien coinciden en un solo punto (figura de arriba).

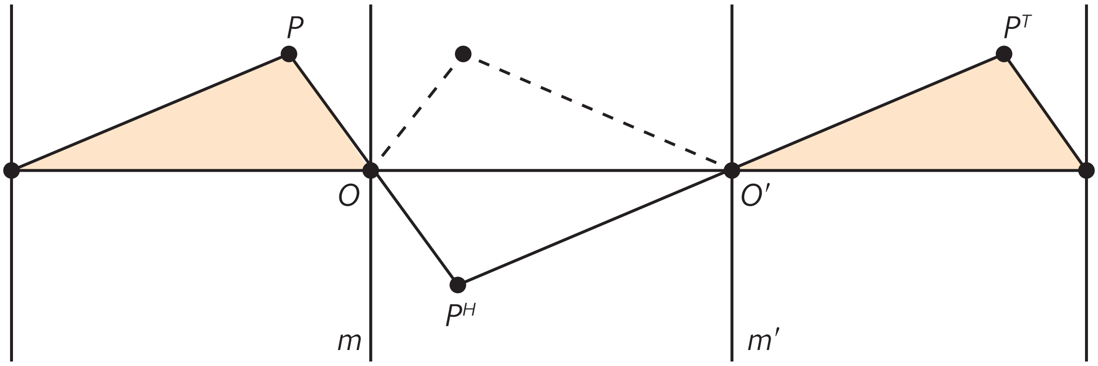


DISEÑOS EN UNA FRANJA

Dos circunferencias iguales se pueden relacionar por medio de cualquier isometría. Por ejemplo, el punto P de la primera circunferencia de la figura



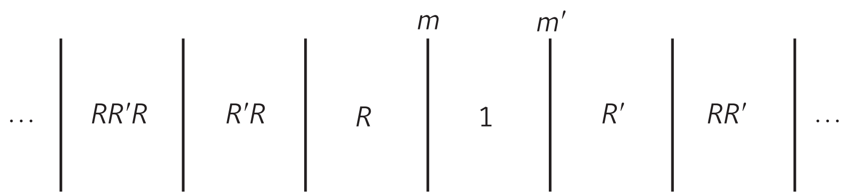
se transforma en P^T de la segunda mediante una traslación, en P^R mediante una rotación, en P^H mediante un semigiro y en P^G mediante una reflexión en deslizamiento. (Se han puesto flechas en las circunferencias para señalar lo que sucede con el sentido de rotación de la primera.) Las cuatro isometrías tienen en común una propiedad importante: conservan invariante la totalidad de una recta infinita, a saber, la que une los centros de ambas circunferencias. (En el cuarto caso, se trata de la única recta invariante.) Hemos visto ya en la figura siguiente



que el producto de las reflexiones en dos espejos paralelos m, m' es una traslación. Podemos considerarla como el caso límite de una rotación cuyo centro está muy lejos, pues los espejos paralelos son el caso límite de dos espejos que se cortan en un ángulo muy pequeño. De acuerdo con esta consideración, el grupo infinito que genera una sola traslación se denota por C_∞, y el grupo infinito que generan dos reflexiones paralelas se denota por D_∞. En un sentido abstracto, C_∞ es el "grupo libre con un generador". Si T es la traslación generatriz, el grupo consistirá en las traslaciones

$$\ldots, \quad T^{-2}, \quad T^{-1}, \quad 1, \quad T, \quad T^2, \ldots$$

De la misma manera, D_∞, que es generado por las reflexiones R, R' en espejos paralelos m, m' (figura siguiente)

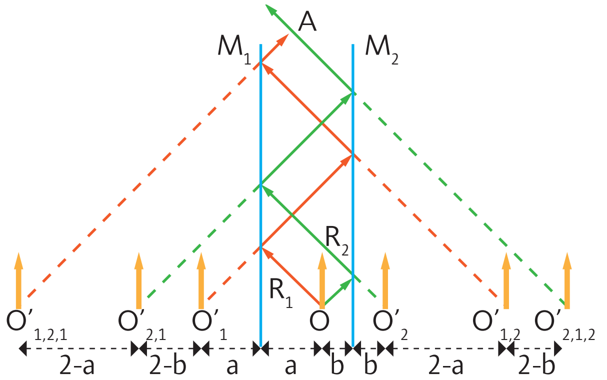


consiste en las reflexiones y traslaciones

$$\ldots, RR'R, \quad R'R, \quad R, \quad 1, \quad R', \quad RR', \quad R'RR'\ldots$$

Su definición abstracta es sencillamente

$$R^2 = R'^2 = 1.$$



Ejemplos de grupo infinito que generan dos reflexiones paralelas.

Este grupo se puede observar cuando nos sentamos en la silla del peluquero entre dos espejos paralelos.

Una idea geométrica diferente del mismo grupo abstracto D_∞ se obtiene al interpretar los generadores R y R' como semigiros. Hay también una representación intermedia en la que uno es una reflexión y el otro un semigiro; pero en este caso, el producto no es ya una traslación, sino una reflexión en deslizamiento.

Al continuar de esta manera, obtendremos pronto la lista completa de los siete grupos de simetría infinitos *unidimensionales*: las siete maneras esencialmente distintas de repetir un diseño en una franja o en una cinta:

Diseños típicos	*Generadores*	*Grupo abstracto*
(i) … L L L L …	1 traslación	C_∞
(ii) … L Γ L Γ …	1 reflexión en deslizamiento	
(iii) … V V V V …	2 reflexiones	D_∞
(iv) … N N N N …	2 semigiros	
(v) … V Λ V Λ …	1 reflexión y 1 semigiro	
(vi) … D D D D …	1 traslación y 1 reflexión	$C_\infty \times D_1$
(vii) … H H H H …	3 reflexiones	$D_\infty \times D_1$

En el caso (iii), ambos espejos son verticales y uno se encuentra en el punto medio de una V, de modo que la refleja en sí misma, mientras el otro la refleja en uno de sus vecinos; así, una mitad de la V colocada entre ambos espejos es la que origina el diseño entero. En los casos (vi) y (vii), hay un espejo horizontal y los símbolos de la última columna indican "productos directos". En todos estos grupos hay cierta libertad de elección de generador, con la excepción de (i) y (ii); por ejemplo, en (iii) o en (iv) se podría substituir uno de los dos generadores por una traslación.

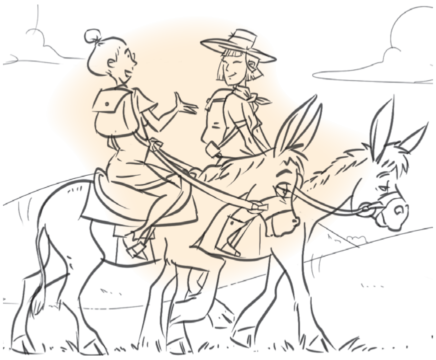
En un sentido estricto, estos siete grupos no son "unidimensionales", sino que corresponden a una dimensión de $1\frac{1}{2}$, es decir, se trata de grupos de simetría bidimensionales en los que interviene una traslación en una dirección. En un ámbito puramente unidimensional solamente hay dos grupos infinitos de simetría: C_∞, que es generado por una traslación, y D_∞, que es generado por dos reflexiones (en espejos puntos).

Ejercicios para fijar ideas

1. Identifique los grupos de simetría de los diseños siguientes:

…b b b b …
… b p b p …
…b d b d …
…b q b q …
…b d p q b d p q …

2. ¿Cuáles son los grupos de simetría de (a) una cicloide; (b) la curva del seno?

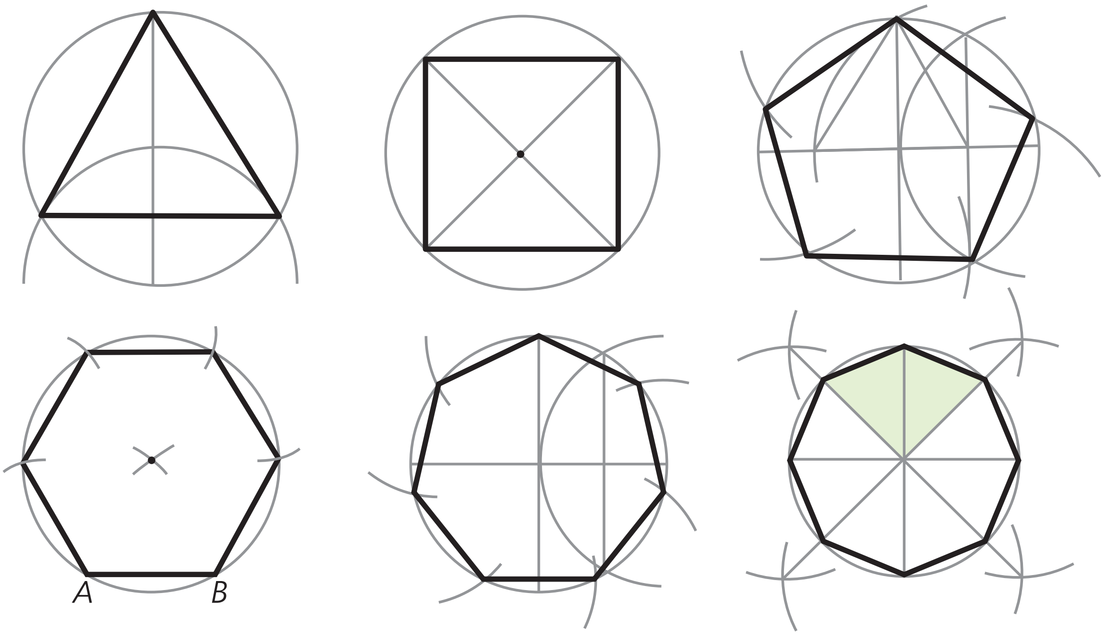


Continúa de Leñitas Geométricas 7ª época, Nº 9, Apartado 2, Cap. "Construcciones geométricas. Álgebra de los cuerpos numéricos"

NÚMEROS CONSTRUIBLES Y CUERPOS DE NÚMEROS

1. Teoría general

En nuestra discusión previa queda indicado el fondo algebraico general de las construcciones geométricas. Cada construcción con regla y compás consiste en una sucesión de operaciones de las enumeradas a continuación: 1) unir dos puntos por una recta; 2) hallar el punto de intersección de dos rectas; 3) trazar una circunferencia de radio y centro dados; 4) hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra circunferencia o con una recta.



Algunas construcciones geométricas conocidas.

Un elemento (punto, recta, circunferencia) se considera conocido si se da desde el principio o si ha sido construido en algún paso previo. Para un análisis teórico, podemos referir la construcción en conjunto a un sistema de coordenadas x, y. Los elementos dados pueden representarse por puntos o segmentos en el plano x, y. Si solo se da un segmento inicial, podemos tomarlo como unidad de longitud, lo que determina el punto $x = 1, y = 0$.

A veces, aparecen elementos "arbitrarios": se trazan líneas arbitrarias, se eligen puntos o radios arbitrarios. Un ejemplo de elemento arbitrario aparece al construir el punto medio de un segmento: dibujamos dos circunferencias de radios iguales, pero arbitrarios, con sus centros en los extremos del segmento, y unimos sus intersecciones. En tales casos, elegimos el elemento de manera que sea racional; es decir, los puntos arbitrarios, con coordenadas x, y racionales; las rectas arbitrarias $ax + by + c = 0$, con coeficientes a, b, c racionales; los círculos arbitrarios, con centros en coordenadas racionales y radios racionales. Haremos siempre la elección de los elementos arbitrarios de manera que sean racionales; si los elementos son verdaderamente arbitrarios, esta restricción no puede afectar al resultado de la construcción.

Por sencillez, supondremos en la siguiente discusión que solo se da un elemento inicial, el segmento de longitud 1. Podemos construir con regla y compás todos los números que puedan deducirse de la unidad mediante procesos racionales de suma, resta, multiplicación y división; es decir, todos los números racionales r/s, siendo r y s enteros.

El sistema de los números racionales es "cerrado" respecto de las operaciones racionales; esto es, suma, diferencia, producto o cociente de dos números racionales, excluyendo, como siempre, la división por cero, donde cero es también un número racional. Todo conjunto de números que posea esta propiedad de ser cerrado respecto de las cuatro operaciones se denomina *cuerpo de números*.

Ejercicio para fijar ideas. Demuéstrese que todo cuerpo contiene al menos todos los números racionales. **Indicación:** Si $a \neq 0$ es un número del cuerpo F, entonces $a/a = 1$ pertenece a F, y a partir de 1 se obtiene todo número racional por operaciones racionales.

Partiendo de la unidad, podemos construir el cuerpo completo de los números racionales y, en consecuencia, todos los puntos racionales (es decir, los puntos con ambas coordenadas racionales) del plano x, y. Podemos obtener nuevos números, irracionales, haciendo uso del compás para construir, por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ que, como sabemos, no pertenece al cuerpo racional. Habiendo hecho esto mediante las construcciones "racionales", podemos hallar todos los números de la forma

$$a+b\sqrt{2}, \qquad (1)$$

siendo a y b racionales y, por tanto, construibles. También podemos construir todos los números de la forma

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right),$$

donde a, b, c y d son racionales. Por otra parte, estos números pueden escribirse en la forma (1); en efecto:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \cdot \frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} = p+q\sqrt{2},$$

siendo p y q racionales. (El denominador $c^2 - 2d^2$ no puede ser cero, pues si $c^2 - 2d^2 = 0$, entonces $\sqrt{2} = c/d$, lo que contradice la demostrada irracionalidad de $\sqrt{2}$.) Igualmente

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right) = (ac+2bd) + (bc+ad)\sqrt{2} = r+s\sqrt{2},$$

siendo r y s racionales. De aquí que todo cuanto podemos obtener con la construcción de $\sqrt{2}$ es el conjunto de números de la forma (1), siendo a y b racionales y arbitrarios.

Ejercicio para fijar ideas. Siendo $p = 1+\sqrt{2}, q = 2-\sqrt{2}, r = -3+\sqrt{2}$ pónganse bajo la forma (1) los números

$$\frac{p}{q}, \quad p+p^2, \quad \left(p-p^2\right)\frac{q}{r}, \quad \frac{pqr}{1-r^2}, \quad \frac{p+qr}{q+pr^2}.$$

Estos números (1) forman un *cuerpo*, como muestra la discusión precedente. (Es obvio que la suma y la diferencia de dos números de la forma (1) tienen también la misma forma.) Este cuerpo es más amplio que el cuerpo racional, que es una parte o *subcuerpo* de él. Pero, naturalmente, es menos amplio que el cuerpo de todos los números reales. Llamemos al cuerpo racional F_0, y al nuevo cuerpo de números de la forma (1), F_1. La posibilidad de construir cualquier número del "cuerpo ampliado" F_1 ha sido ya establecida.

Podemos ahora extender el alcance de nuestras construcciones, por ejemplo, tomando un número de F_1 tal como $k = 1+\sqrt{2}$, y extrayendo la raíz cuadrada; obtenemos así el número construible

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}=\sqrt{k},$$

y con él, de acuerdo con lo visto, el cuerpo formado por todos los números

$$p+q\sqrt{k} \qquad (2)$$

donde ahora p y q son números arbitrarios de F_1; es decir, de la forma $a+b\sqrt{2}$, con a, b de F_0, esto es, racionales.

Ejercicio para fijar ideas. Representar en la forma (2) los números

$$\left(\sqrt{k}\right)^3, \qquad \frac{1+\left(\sqrt{k}\right)^2}{1+\sqrt{k}}, \qquad \frac{\sqrt{2}\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{k}\right)^3-3}, \qquad \frac{\left(1+\sqrt{k}\right)\left(2-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)}{1+\sqrt{2}k}.$$

Todos estos números han sido construidos en la hipótesis de un solo segmento dado inicialmente. Si se dan dos, elegiremos uno de ellos como unidad de longitud, y supondremos que la longitud del otro segmento medido con esta unidad es α. Entonces, podemos construir el cuerpo G formado por todos los números de la forma

$$\frac{a_m\alpha^m+a_{m-1}\alpha^{m-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0}{b_n\alpha^n+b_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+b_1\alpha+b_0}$$

donde los números $a_0, \ldots, a_m$ y $b_0, \ldots, b_n$ son racionales, y m y n enteros positivos.

Ejercicio para fijar ideas. Dados los segmentos de longitudes 1 y α: construir $1+\alpha+\alpha^2$, $(1+\alpha)/(1-\alpha)$, α^3.

Supongamos ahora, con mayor generalidad, que somos capaces de construir todos los números de un cuerpo F. Vamos a demostrar que el uso de la regla sola no nos permitirá salir fuera del cuerpo F. La ecuación de la recta que une los puntos de coordenadas a_1, b_1 y a_2, b_2 pertenecientes a F, es:

$$(b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+(a_1b_2-a_2b_1)=0;$$

sus coeficientes son expresiones racionales formadas por números de F y, por definición de cuerpo, también pertenecen a F. Además, si tenemos dos rectas $\alpha x+\beta y-\gamma=0$ y $\alpha' x+\beta' y-\gamma'=0$, con coeficientes de F, las coordenadas de su punto de intersección, halladas resolviendo este sistema de dos ecuaciones, son:

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}, \qquad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Como estos son también números de F, es evidente que el uso de la regla sola no nos permitirá salir fuera de los confines del cuerpo F.

Ejercicio para fijar ideas. Las rectas $x+\sqrt{2}y-1=0, 2x-y+\sqrt{2}=0$ tienen coeficientes del cuerpo (1). Calcúlense las coordenadas de su punto de intersección y verifique que tienen la forma (1). Únanse los puntos $\left(1,\sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$ mediante la recta $ax+by+c=0$ y verifique que los coeficientes son de la forma (1). Hágase lo mismo respecto del cuerpo (2), para las rectas

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}x+\sqrt{2}y=1, \qquad \left(1+\sqrt{2}\right)x-y=1-\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

y los puntos $\left(\sqrt{2},-1\right),\left(1+\sqrt{2},\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, respectivamente.

Solo podemos salir de los confines de *F* haciendo uso del compás. Para conseguir esto, elegimos un elemento *k* de *F* tal que $\sqrt{k}$ no pertenezca a *F*. Entonces podemos construir $\sqrt{k}$ y, por tanto, todos los números

$$a+b\sqrt{k}, \tag{3}$$

donde *a* y *b* son racionales, o incluso elementos arbitrarios de *F*. La suma y diferencia de dos números $a+b\sqrt{k}$ y $c+d\sqrt{k}$, su producto $\left(a+b\sqrt{k}\right)\left(c+d\sqrt{k}\right)=(ac+kbd)+(ad+bc)\sqrt{k}$, y su cociente,

$$\frac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}}=\frac{\left(a+b\sqrt{k}\right)\left(c-d\sqrt{k}\right)}{c^2-kd^2}=\frac{ac-kbd}{c^2-kd^2}+\frac{bc-ad}{c^2-kd^2}\sqrt{k}$$

son de nuevo de la forma $p+q\sqrt{k}$ siendo *p* y *q* de *F*. (El denominador $c^2 - kd^2$ no puede anularse, salvo que *c* y *d* sean ambos cero; en caso contrario, $\sqrt{k}=c/d$ sería un número de *F*, mientras hemos supuesto que $\sqrt{k}$ no pertenecía a *F*.) Luego, el conjunto de números de la forma $a+b\sqrt{k}$ forma un cuerpo *F′*, que contiene el cuerpo original *F*, pues podemos, en particular, elegir $b = 0$. *F′* se llama *cuerpo generalizado* o *extensión* de *F*, y *F subcuerpo* de *F′*.

Como ejemplo, sea *F* el cuerpo $a+b\sqrt{2}$, con *a* y *b* racionales y $k=\sqrt{2}$. Entonces, los números del cuerpo generalizado *F′* se representan por $p+q\sqrt[4]{2}$, siendo *p* y *q* de *F*, $p=a+b\sqrt{2}, q=a'+b'\sqrt{2}$ con *a, b, a′* y *b′* racionales. Todo número de *F′* puede ser reducido a esta forma; por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt[4]{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}-\frac{2+\sqrt{2}}{4-2}\sqrt[4]{2}=$$

$$=\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt[4]{2}.$$

Ejercicio para fijar ideas.

Sea *F* el cuerpo $p+q\sqrt{2+\sqrt{2}}$, donde *p* y *q* son de la forma $a+b\sqrt{2}$, y *a* y *b* racionales. Representar en esa forma el número

$$\frac{1+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2-3\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Hemos visto que si partimos de un cuerpo *F* de números construibles que contiene el número *k*, entonces, por medio de la regla y una única utilización del compás podemos construir $\sqrt{k}$ y, en consecuencia, todos los números de la forma $a+b\sqrt{k}$, en tanto que *a* y *b* sean de *F*.

Recíprocamente probaremos ahora que, mediante una sola aplicación del compás, podemos obtener solo números de esta forma. Pues lo que el compás realiza en una construcción es definir puntos (o sus coordenadas) como intersecciones de una circunferencia y una recta, o de dos circunferencias. La circunferencia de centro ξ, η y radio *r* tiene como ecuación $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$; luego si ξ, η y *r* pertenecen a *F*, la ecuación podrá escribirse en la forma:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0,$$

con coeficientes α, β y γ de *F*. Una recta $ax + by + c = 0$, que une dos puntos cuyas coordenadas están en *F*, tiene coeficientes *a, b, c* de *F*, como ya hemos visto. Eliminando *y* entre estas dos ecuaciones obtenemos para la abscisa *x* de un punto de intersección de la circunferencia y la recta una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, cuyos coeficientes *A, B, C* de *F* son $A = a^2 + b^2$, $B = 2(ac + b^2\alpha - ab\beta)$, $C = c^2 - 2bc\beta + b^2\gamma$. La solución viene dada por la fórmula

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

que es de la forma $p + q\sqrt{k}$, con *p, q, k* de *F*. Una fórmula análoga nos da la ordenada *y* del punto de intersección. Por otra parte, si tenemos dos circunferencias:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0, \\ x^2+y^2+2\alpha' x+2\beta' y+\gamma'=0, \end{cases}$$

restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos la ecuación lineal

$$2(\alpha-\alpha')x+2(\beta-\beta')y+(\gamma-\gamma')=0,$$

que puede resolverse junto con la ecuación de la primera circunferencia, como antes. En uno y otro caso, la construcción da las coordenadas x e y del punto o de los dos nuevos puntos, y estas cantidades son de la forma $p+q\sqrt{k}$, con p, q, k de F. En particular, naturalmente, $\sqrt{k}$ puede pertenecer a F; por ejemplo, cuando sea $k = 4$. Entonces, la construcción no proporciona nada esencialmente nuevo, y no salimos de F. Pero este no es el caso general.

Ejercicio para fijar ideas. Considérese el círculo de radio $2\sqrt{2}$ con centro en el origen, y la recta que une los puntos $\left(\frac{1}{2},0\right),\left(4\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Hallar el cuerpo F' determinado por las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta. Hágase lo mismo respecto de la intersección de la circunferencia dada con la de radio $\sqrt{2}/2$ y centro $\left(0,2\sqrt{2}\right)$.

Resumiendo otra vez: **dadas ciertas cantidades iniciales, podemos construir solo con la regla todas las cantidades del cuerpo *F* engendrado mediante procesos racionales a partir de estas cantidades. Usando el compás, es posible extender el cuerpo *F* de las cantidades construibles a un cuerpo más amplio, eligiendo un número *k* de *F*, extrayendo su raíz cuadrada y construyendo el cuerpo *F′* constituido por todos los números de la forma $a+b\sqrt{k}$, donde *a* y *b* son de *F*.**

Este es un subcuerpo de F', porque todas las cantidades de F están también contenidas en F', ya que en la expresión $a+b\sqrt{k}$ podemos elegir $b = 0$. (Se supone que $\sqrt{k}$ es un nuevo número no perteneciente a F, pues de otro modo el proceso de adjunción de $\sqrt{k}$ no variaría la situación, y F' sería idéntico a F.) Hemos probado que todo paso en una construcción geométrica (trazado de la recta que une dos puntos, de la circunferencia de centro y radio dados, o determinación de la intersección de dos rectas o circunferencia conocidas) puede, bien producir cantidades del cuerpo ya conocido o, mediante la construcción de una raíz cuadrada, dar lugar a un nuevo cuerpo ampliado de números *construibles*.

La totalidad de los números construibles puede ser descrita ahora con precisión. Partimos de un cuerpo dado F_0, definido por cantidades iniciales dadas; por ejemplo, el cuerpo de todos los números racionales, si solo se da un segmento, elegido como unidad. A continuación, mediante la adjunción de $\sqrt{k_0}$ donde k_0 es de F_0, pero no $\sqrt{k_0}$, formamos el cuerpo ampliado F_1 de números construibles, que consta de todos los números de la forma $a_0+b_0\sqrt{k_0}$, en que a_0 y b_0 son números cualesquiera de F_0. Después se define F_2, nueva extensión de F_1, como conjunto de todos los números de la forma $a_1+b_1\sqrt{k_1}$. Siendo a_1 y b_1 números de F_1 y k_1 un número de F_1 cuya raíz cuadrada no está en F_1. Repitiendo este proceso, podemos obtener un cuerpo F_n después de n adjunciones de raíces cuadradas. Números construibles son aquellos y solo aquellos que pueden hallarse mediante una tal sucesión de cuerpos ampliados, esto es, que pertenecen a un cuerpo F_n del tipo descrito. La magnitud del número n de extensiones necesarias no importa; solo mediría el grado de complejidad del problema. El siguiente ejemplo puede aclarar el proceso. Deseamos obtener el número

$$\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}.$$

Sea F_0 el cuerpo de los números racionales. Hagamos $k_0 = 2$, obteniendo el cuerpo F_1, que contiene el número $1+\sqrt{2}$. Ahora tomamos $k_1=1+\sqrt{2}$ y $k_2 = 3$. Por supuesto, 3 está en el cuerpo original F_0, y *a fortiori* en el cuerpo F_2, por lo cual es perfectamente lícito elegir $k_2 = 3$. Luego tomamos $k_3=\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ y, finalmente, $k_4=\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5$. El cuerpo F_5 así construido contiene el número deseado, pues $\sqrt{6}$ está a su vez en F_5, ya que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, y en consecuencia su producto, están en F_3 y también, por tanto, en F_5.

Ejercicio para fijar ideas.

Verifique que, partiendo del cuerpo racional, el lado del 2^m-ágono regular es un número construible, con $n = m - 1$. Determine la sucesión de cuerpos generalizados. Hágase lo mismo con los números $\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, $\left(\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)/\left(1+\sqrt{7-\sqrt{3}}\right)$, $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[8]{2}+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{7}}}\right)$.

2. Todos los números construibles son algebraicos

Si el cuerpo F_0 inicial es el cuerpo racional engendrado por un único segmento, entonces todos los números construibles son algebraicos. Los números del cuerpo F_1 son raíces de ecuaciones cuadráticas; los de F_2, raíces de ecuaciones de cuarto grado; y, en general, los números de F_k son raíces de ecuaciones de grado 2^k, con coeficientes racionales. Para probar esto para el cuerpo F_2, consideremos como ejemplo $x = \sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{2}}$. Tenemos

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2 = 3+\sqrt{2}; \quad x^2+2-2\sqrt{2}x = 3+\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x^2-1 = \sqrt{2}(2x+1),$$

ecuación cuadrática con coeficientes del cuerpo F_1. Si elevamos al cuadrado, obtenemos finalmente

$$(x^2-1)^2 = 2(2x+1)^2,$$

que es una ecuación de cuarto grado con coeficientes racionales. En general, todo número del cuerpo F_2 tendrá la forma

$$x = p + q\sqrt{w}, \tag{4}$$

donde *p, q* y *w* pertenecen al cuerpo F_1 y, por ello, son de la forma $p = a+b\sqrt{s}$, $q = c+d\sqrt{s}$, $w = e+f\sqrt{s}$, siendo *a, b, c, d, e, f* y *s* racionales. De (4) tenemos

$$x^2 - 2px + p^2 = q^2 w,$$

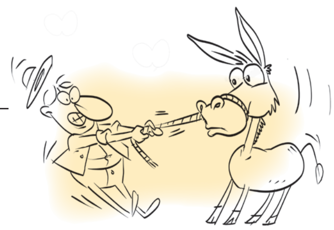
cuyos coeficientes pertenecen todos al cuerpo F_1, engendrado por $\sqrt{s}$. Por tanto, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$x^2 + ux + v = \sqrt{s}(rx+t),$$

siendo *r, s, t, u* y *v* racionales. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos una ecuación de cuarto grado

$$\left(x^2+uz+v\right)^2 = s(rx+t)^2 \tag{5}$$

con coeficientes racionales, según queríamos ver.



Ejercicios de entrenamiento

1. Hallar ecuaciones con coeficientes racionales para:

a) $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$; b) $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$; c) $x = 1/\sqrt{5+\sqrt{3}}$.

2. Hállense por métodos análogos ecuaciones de octavo grado para:

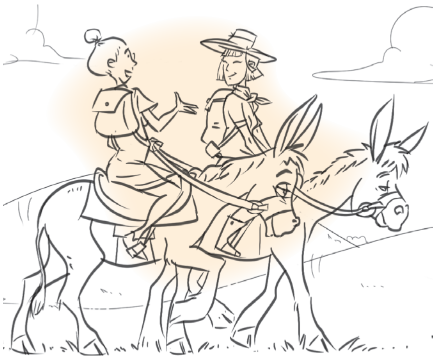
a) $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $x = \sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{3}}$; c) $x = 1+\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$.

Para demostrar el teorema general si x es un cuerpo F_k con k arbitrario, probaríamos, mediante el procedimiento usado antes, que x satisface a una ecuación cuadrática con coeficientes de F_{k-l}. Repitiendo este procedimiento, encontraríamos que x satisface a una ecuación de grado $2^2 = 4$ con coeficientes de F_{k-2} etcétera.

Ejercicio para fijar ideas. Completar por inducción la demostración general para probar que x satisface a una ecuación de grado 2^l con coeficientes de F_{k-l}, siendo $0 < l \le k$. Este enunciado para $l = k$ es el teorema deseado.

III. Dialogando con los estudiantes sobre la probabilidad y la programación lineal

¿Qué es la realidad?



Continúa de Leñitas Geométrícas 7ª época, Nº 9, Cap. "Los mágicos números complejos"

LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El sello de Carl Friedrich Gauss llevaba escrito el lema: *pauca sed matura* ("poco pero maduro") y lo cierto es que su mente estaba tan rebosante de ideas originales que no tenía materialmente tiempo de verlas madurar a todas ellas hasta el punto de perfección en que insistía antes de publicarlas. Sin embargo, su descubrimiento decisivo del 30 de marzo de 1796 sí lo anunció públicamente en una revista literaria. Siempre estuvo tan orgulloso de este descubrimiento que, a imitación de Arquímedes, antiguo rival en talla matemática, expresó el deseo de que se grabara sobre su tumba un polígono regular de 17 lados. Este deseo no se cumplió nunca porque el testarudo cantero encargado de tallar la lápida se negó en redondo, insistiendo en que la figura resultante no se distinguiría de una circunferencia, pero al menos en el monumento a Gauss en Brunswick puede verse tallado realmente el egregio polígono.

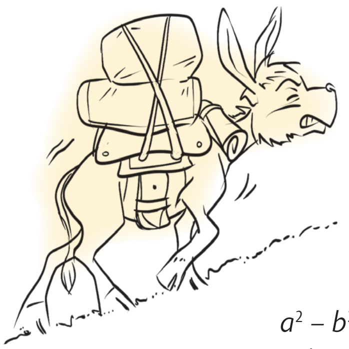
¿Sabías que Carl Friedrich Gauss nació en Brunswick (en alemán, Braunschweig), en Alemania? ¿Sabías que en su ciudad natal hay una plaza donde se erigió una estatua dedicada a él? ¿Podrías imaginar qué forma tiene el contorno de la plaza? Y vamos por el contorno de la plaza. ¿Qué imagináis que podrá ser? Una curva relacionada con Gauss que pueda servir de contorno de una plaza en la que hay una estatua de Gauss. ¡¡Exacto!! La famosísima campana de Gauss.

Durante breves períodos de tiempo Gauss abandonaba Gotinga para asistir a la Universidad de Helmstädt, y fue en esta última en la que recibió su doctorado en 1798. La tesis, publicada en Helmstädt en 1799, lleva en latín el aplastante título: "*Nueva demostración del teorema que afirma que toda función algebraica racional y entera de una variable puede resolverse en factores reales de primero o de segundo grado*". Este teorema, al que Gauss se referiría más tarde con el nombre de *teorema fundamental del álgebra*, es esencialmente la proposición conocida en Francia como el *teorema de d'Alembert*, pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración, incluyendo algunos de Euler y de Lagrange, eran incorrectos.

La representación gráfica de los números complejos había sido descubierta ya en 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) y publicada en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798, pero lo cierto es que la obra de Wessel pasó usualmente inadvertida, y así el plano de los números complejos se suele denominar hoy como *plano de Gauss*, a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde. Desde la época de Albert Girard era bien conocido que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta.

Wallis había llegado a sugerir incluso que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Sin embargo, sorprendentemente, nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la obvia etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un número complejo $a + bi$ como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano, al cual estaría asociado dicho número complejo.

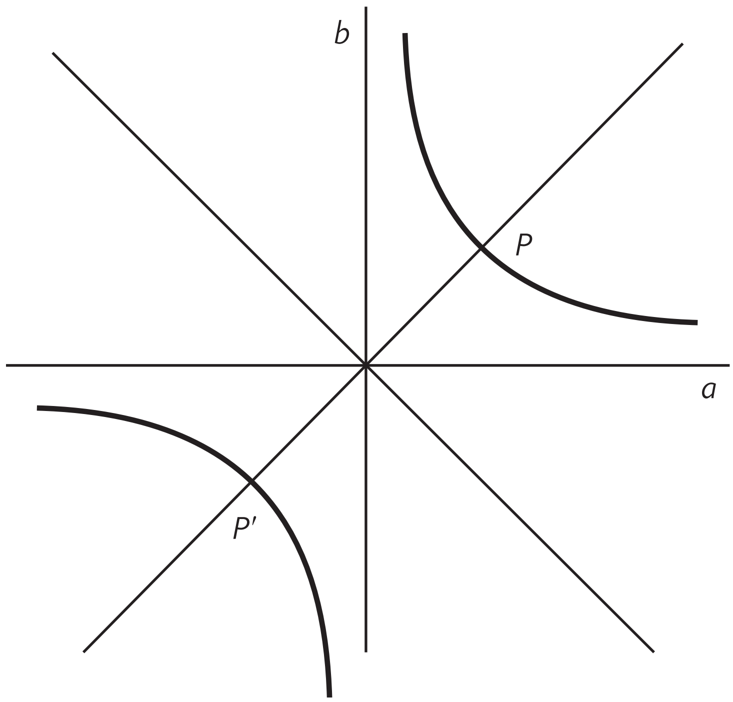
El cubrir esta simple etapa hizo sentirse a los matemáticos mucho más útiles con los números imaginarios, ya que ahora podían visualizar en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa. Ver es creer, es bien cierto, y las viejas ideas acerca de la no existencia de los números imaginarios fueron abandonadas por casi todos los matemáticos.



EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

La tesis doctoral de Gauss venía a demostrar que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. No podemos entrar aquí en los detalles de la demostración, pero una ilustración indicará por lo menos las líneas generales que seguían las ideas de Gauss. Vamos a resolver la ecuación $z^2 - 4i = 0$ gráficamente, probando para ello que hay un valor complejo $z = a + bi$ que satisface la ecuación.

Sustituyendo en ella z por $a + bi$ y separando partes reales e imaginarias, nos queda que $a^2 - b^2 = 0$ y $ab - 2 = 0$. Interpretando a y b como variables y representando estas dos ecuaciones en un mismo sistema de ejes de coordenadas, en abscisas la parte real a y en las ordenadas la parte imaginaria pura b, obtenemos dos curvas: la primera consiste en el par de rectas $a + b = 0$ y $a - b = 0$, y la segunda es la hipérbola equilátera $ab = 2$ (figura siguiente).



Está claro por la representación gráfica que las dos curvas se cortan en un punto P en el primer cuadrante (es, incidentalmente, en otro P' en el tercero).

Obsérvese en particular que una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones $\theta = 1\pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$, y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones $\theta = 0\pi/4$y $\theta = 2\pi/4$; el punto de intersección está entre las dos direcciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Las coordenadas a y b de este punto de intersección son las partes real e imaginaria del número complejo que es solución de la ecuación $z^2 - 4i = 0$.

Si nuestra ecuación polinómica original hubiera sido de tercer grado en vez de segundo grado, habría habido una rama de una de las dos curvas aproximándose a las direcciones $\theta = 1\pi/6$ y $\theta = 3\pi/6$, y la otra curva se aproximaría a las direcciones $\theta = 0\pi/6$ y $\theta = 2\pi/6$. Las ramas son continuas en todos los casos; por lo tanto, tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$. Para una ecuación de grado n habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas $\theta = 1\pi/2n$ y $\theta = 3\pi/2n$, mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones asintóticas $\theta = 0\pi/2n$ y $\theta = 2\pi/2n$, y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/n$, y las coordenadas a y b del punto de intersección serán de nuevo las partes real e imaginaria de un número complejo que es una raíz de la ecuación.

Vemos pues así que, sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, debe tener al menos una raíz compleja. A partir de este resultado se puede demostrar ya fácilmente el teorema de la tesis de Gauss de que un polinomio cualquiera se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos.

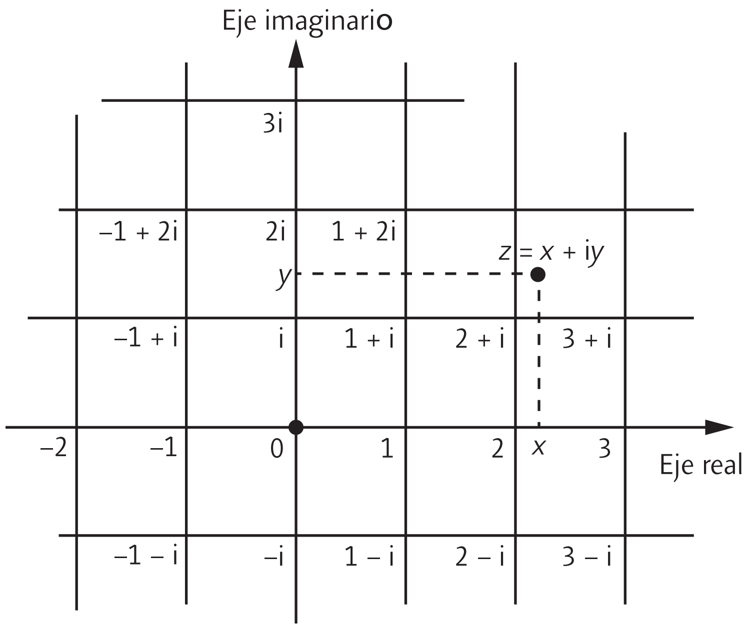
La demostración del teorema fundamental del álgebra dada por Gauss en su tesis se basa en parte en consideraciones geométricas, lo que no resultaba del todo satisfactorio. Años más tarde, en 1816, publicó dos nuevas demostraciones, así como otra en 1850, pugnando siempre por encontrar una prueba puramente algebraica.

Las contribuciones Wessel. En mayo de 1782, Wessel fue liberado de su trabajo con la Real Academia Danesa para que pudiera realizar un estudio trigonométrico del ducado de Oldenburg. Wessel trabajó en el estudio de Oldenburg hasta el verano de 1785, cuando regresó a su puesto en la Real Academia Danesa. Él fue desarrollando métodos matemáticos cada vez más sofisticados, los cuales explicó plenamente en un informe que escribió en 1787. Este informe ya contenía la brillante aportación matemática de Wessel, es decir, la interpretación geométrica de los números complejos.

En 1796, Wessel había terminado la triangulación de Dinamarca y utilizó los datos obtenidos para elaborar el primer mapa exacto del país. En el mismo año escribió su primer y único documento matemático, en el cual expresaba la interpretación geométrica de los números complejos, y lo presentó en una reunión de la Real Academia Danesa el 10 de marzo de 1797. Este documento no fue publicado hasta 1799.

EL PLANO COMPLEJO DE CASPAR WESSEL

Para ver lo que está pasando aquí, será importante utilizar la ahora estándar representación geométrica de los números complejos en el plano euclídeo. Caspar Wessel en 1797, Jean Robert Argand en 1806 –quien fue un contable y tenedor de libros y un talentoso matemático autodidacta francés nacido en Suiza que describió en 1806, mientras trabajaba en una tienda de libros en París, la representación geométrica de los números complejos, publicando la idea de lo que se conoce como *plano de Argand*–, John Warren en 1828 y Carl Friedrich Gauss mucho antes de 1831 dieron todos ellos, de forma independiente, con la idea del *plano complejo*, graficado a continuación,



El plano complejo de $z = x + iy$. En coordenadas cartesianas (x, y), el eje x dirigido horizontalmente hacia la derecha es el eje real; el eje y dirigido verticalmente hacia arriba es el eje imaginario.

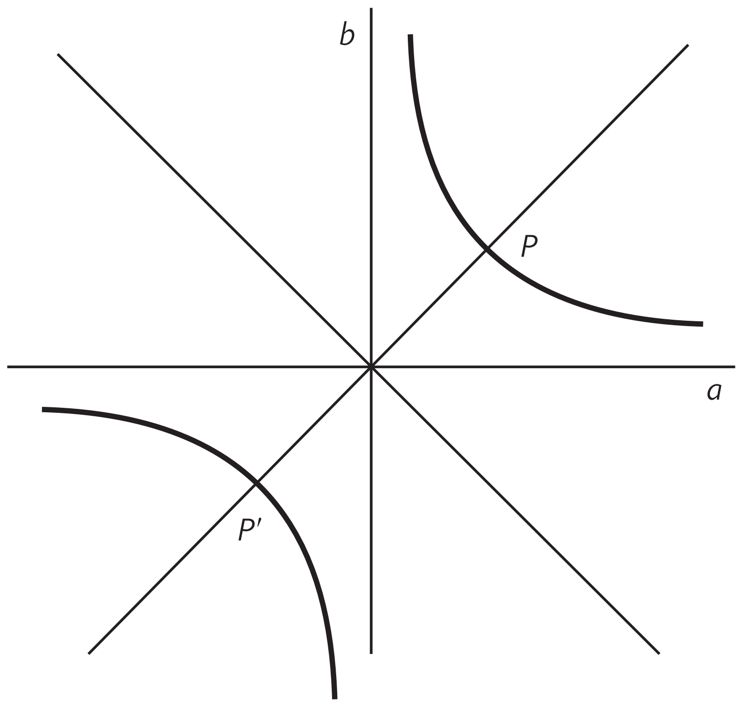
en el que ofrecieron interpretaciones geométricas claras de las operaciones de adición y multiplicación de números complejos. En la figura se utilizan ejes cartesianos estándar, con el eje x apuntando horizontalmente hacia la derecha y el eje y apuntando verticalmente hacia arriba. El número complejo

$$z = x + iy$$

viene representado como el punto del plano con coordenadas cartesianas (x, y).

Ahora tenemos que considerar un número real *x* como un caso particular del número complejo $z = x + iy$ en el que $y = 0$. Así pues, debemos contemplar que el eje *x* de nuestro diagrama representa la recta real (es decir, la totalidad de los números reales, ordenados linealmente a lo largo de una recta). El plano complejo nos da así una representación gráfica directa de cómo se amplía el sistema de los números reales para convertirse en el sistema completo de los números complejos. Esta recta real se suele conocer como el *eje real* en el plano complejo. En correspondencia, el eje *y* se conoce como el *eje imaginario*. Consiste en todos los múltiplos de *i* por un número real.

Volvamos ahora a nuestras dos funciones que hemos estado tratando de representar en términos de series de potencias. Tomábamos estas como funciones de la variable real *x*, a saber, $(1 - x^2)^{-1}$ y $(1 + x^2)^{-1}$, pero ahora vamos a extender dichas funciones de modo que se aplican a una variable compleja *z*.



Representación de estas funciones analizadas más arriba.

No hay ningún problema en hacer esto: simplemente escribimos estas funciones ampliadas como $(1 - x^2)^{-1}$ y $(1 + x^2)^{-1}$,respectivamente. En el caso de la primera función real $(1 - x^2)^{-1}$ somos capaces de reconocer dónde empezaban los problemas de "divergencia", puesto que la función es singular (en el sentido de que se hace infinita) en los dos lugares $x = -1$ y $x = +1$; pero con $(1 + x^2)^{-1}$ no vimos ninguna singularidad en estos lugares *y*, de hecho, ninguna singularidad real en absoluto. Sin embargo, en términos de la variable compleja *z*, vemos que estas dos funciones son mucho más parecidas. Hemos advertido las singularidades de $(1 - z^2)^{-1}$ en dos puntos $z = \pm 1$ a distancia unidad del origen a lo largo del eje real; pero ahora vemos que $(1 + z^2)^{-1}$ tiene también singularidades, a saber, en los dos lugares $z = \pm i$ (puesto que entonces $1 + z^2 = 0$), siendo estos los dos puntos situados a distancia unidad del origen en el eje imaginario.

Pero, **¿qué tienen que ver estas singularidades complejas con la cuestión de la convergencia o divergencia de la serie de potencias correspondiente?**

Hay una respuesta sorprendente a esta pregunta. Ahora debemos considerar nuestras series de potencias como funciones de la variable compleja *z*, en lugar de la variable real *x,* y podemos preguntar por aquellas localizaciones de *z* en el plano complejo para las que la serie converge y aquellas para las que diverge.

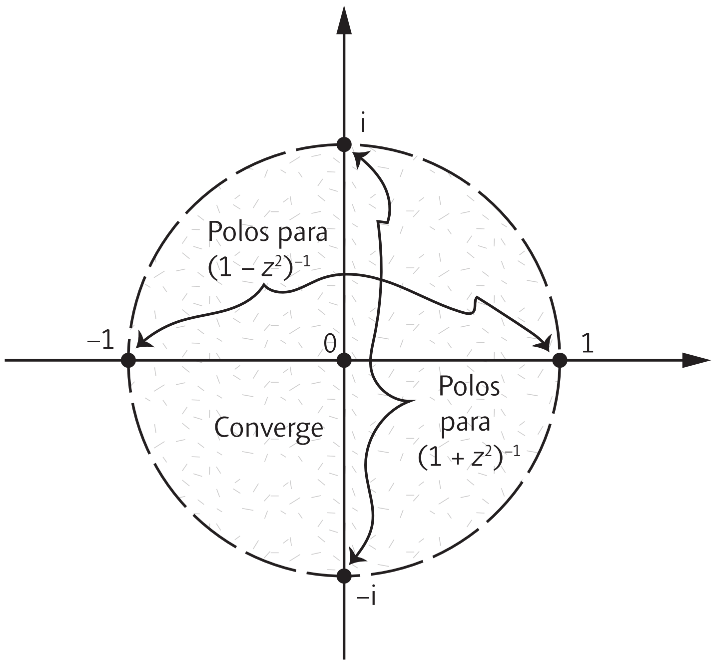
La notable respuesta general para cualquier serie de potencias

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

es que existe un círculo en el plano complejo, centrado en 0, llamado círculo de convergencia, con la propiedad de que si el número complejo *z* está estrictamente dentro del círculo, entonces la serie converge para dicho valor de *z*, mientras que si *z* está estrictamente fuera del círculo, entonces la serie diverge para dicho valor de z. (Si la serie converge o no cuando z está exactamente sobre el contorno del círculo es realmente una cuestión algo delicada en la que no entraremos ahora, pero tiene cierta relevancia para las cuestiones a que llegaremos más adelante.)

En este enunciado estamos incluyendo las dos situaciones límite: aquella para la que la serie diverge para todos los valores no nulos de z, cuando el círculo de convergencia se ha contraído hasta un radio cero, y aquella en que converge para todo z, en cuyo caso el círculo se ha dilatado hasta un radio infinito. Para encontrar dónde está realmente el círculo de convergencia para una función dada, miramos en qué parte del plano complejo están localizadas las singularidades, y dibujamos el círculo más grande con centro en el origen $z = 0$ y que no contenga ninguna singularidad en su interior (esto es, lo dibujamos de forma que pase por la singularidad más próxima al origen).

En los casos particulares $(1 - z^2)^{-1}$ y $(1 + z^2)^{-1}$ que hemos estado considerando, las singularidades son de un tipo simple denominado *polos* (que surgen donde se anula un polinomio que aparece como divisor en una expresión). Aquí todos estos polos están a distancia unidad del origen, y vemos que el círculo de convergencia es, en ambos casos, el círculo unidad alrededor del origen. Los lugares donde dicho círculo corta al eje real son los mismos en ambos casos, a saber, los dos puntos $z = \pm 1$, como se ve en la figura siguiente.

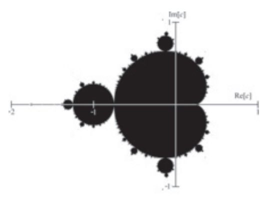


En el plano complejo, las funciones $(1 - z^2)^{-1}$ y $(1 + z^2)^{-1}$ tienen el mismo círculo de convergencia, habiendo polos para la primera en $z = \pm 1$ y polos para la segunda en $z = \pm i$, todos ellos a la misma distancia (unidad) del origen.

Esto explica por qué las dos funciones convergen y divergen en las mismas regiones, un hecho que no era manifiesto simplemente a partir de sus propiedades como funciones de variables reales. Así pues, los números complejos nos ofrecen ideas profundas sobre el comportamiento de series de potencias, ideas que sencillamente no están disponibles a partir de la consideración de su estructura en variable real.

CÓMO SE CONSTRUYE EL CONJUNTO DE MANDELBROT

El conjunto de Mandelbrot es un famoso fractal definido en el plano complejo. Se crea iterando la fórmula $z = z^2 + c$, donde c es un número complejo fijo. Los puntos en el plano complejo que producen secuencias acotadas al iterar la fórmula pertenecen al conjunto de Mandelbrot. El conjunto de Mandelbrot es el más estudiado de los fractales. Se conoce con ese nombre en honor al matemático Benoît Mandelbrot (1924-2010), que investigó sobre este conjunto.



Para terminar el tema del plano complejo, consideremos otro tipo de cuestión convergencia/divergencia. Es la que subyace en la construcción de esa configuración extraordinaria, ya mencionada y mostrada, conocida como el conjunto de Mandelbrot. De hecho, este es solo un subconjunto del plano complejo de Wessel, que puede definirse de un modo notablemente simple si lo comparamos con la extrema complicación de dicho conjunto.

Todo lo que tenemos que hacer es examinar las aplicaciones repetidas del reemplazamiento

$$z \rightarrow z^2 + c,$$

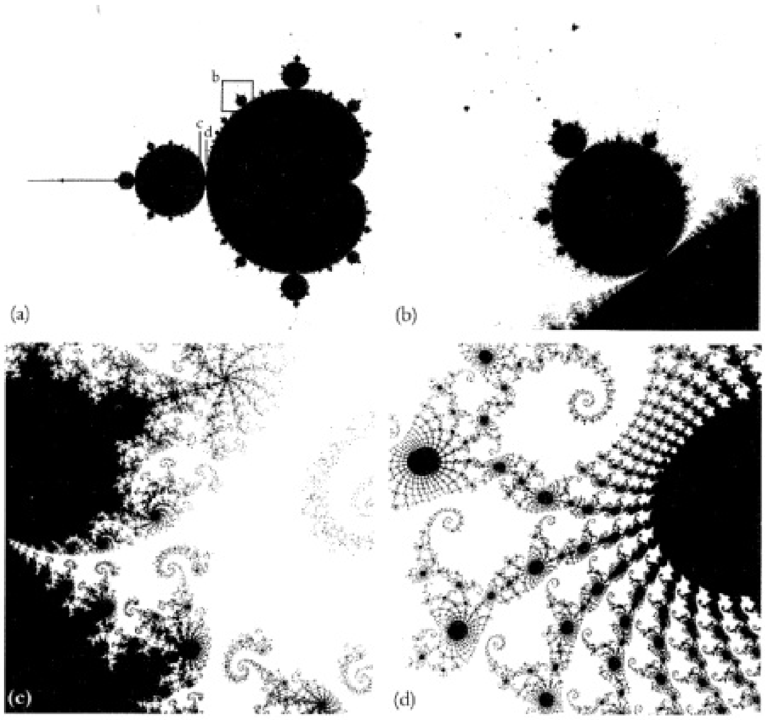
donde c es un número complejo escogido. Consideremos c como un punto en el plano complejo y empecemos con $z = 0$. Entonces, *iteramos* esta transformación (es decir, la aplicamos repetidamente una y otra vez) y vemos cómo se comporta el punto z en el plano complejo. Si escapa al infinito, entonces el punto c se marca en color blanco. Si z se mueve por cierta región restringida sin llegar nunca al infinito, entonces c se marca en color negro. ¡La región negra nos da el *conjunto de Mandelbrot*!

Describamos este procedimiento con un poco más de detalle. ¿Cómo procede la iteración? En primer lugar, fijamos c. Luego, tomamos algún punto z y aplicamos la transformación, de modo que z se convierte en $x^2 + c$. Después la aplicamos otra vez, de modo que ahora reemplazamos la "z" en $z^2 + c$ por $z^2 + c$ y obtenemos $(z^2 + c)^2 + c$. A continuación, reemplazamos la "z" en $z^2 + c$ por $(z^2 + c)^2 + c$, de modo que nuestra expresión se convierte en $((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$. Luego continuamos reemplazando la "z" en $z^2 + c$ por $((z^2 + c)^2 + c)^2 + c$, y obtenemos $(((z^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c$, y así sucesivamente.

Veamos ahora qué sucede si empezamos en $z = 0$ e iteramos de esta manera. (Simplemente ponemos $z = 0$ en las expresiones anteriores.) Obtenemos la secuencia

$$0, \qquad c, \qquad c^2 + c, \qquad (c^2 + c)^2 + c, \qquad ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \qquad \ldots$$

Esto nos da una sucesión de puntos en el plano complejo. (Si trabajáramos con una computadora, no utilizaríamos las expresiones algebraicas anteriores, sino que procederíamos de forma puramente numérica para cada elección individual del número complejo c. Resulta mucho más "barato" computacionalmente hacer la aritmética desde el principio cada vez.) Ahora, para cualquier valor dado de c, puede suceder una de dos cosas: (i) los puntos de la secuencia se alejan a distancias cada vez mayores, es decir, la secuencia no está acotada; o (ii) cada uno de los puntos yace a una distancia del origen menor que cierto valor dado (es decir, dentro de cierto círculo alrededor del origen) en el plano complejo, o sea, la secuencia está acotada. Las regiones blancas de la figura siguiente



(a) El conjunto de Mandelbrot. (b), (c) y (d) Algunos detalles que ilustran ampliaciones de las regiones correspondientemente marcadas en la figura (a), aumentadas por factores lineales respectivos 11,6, 168,9 y 1 042.

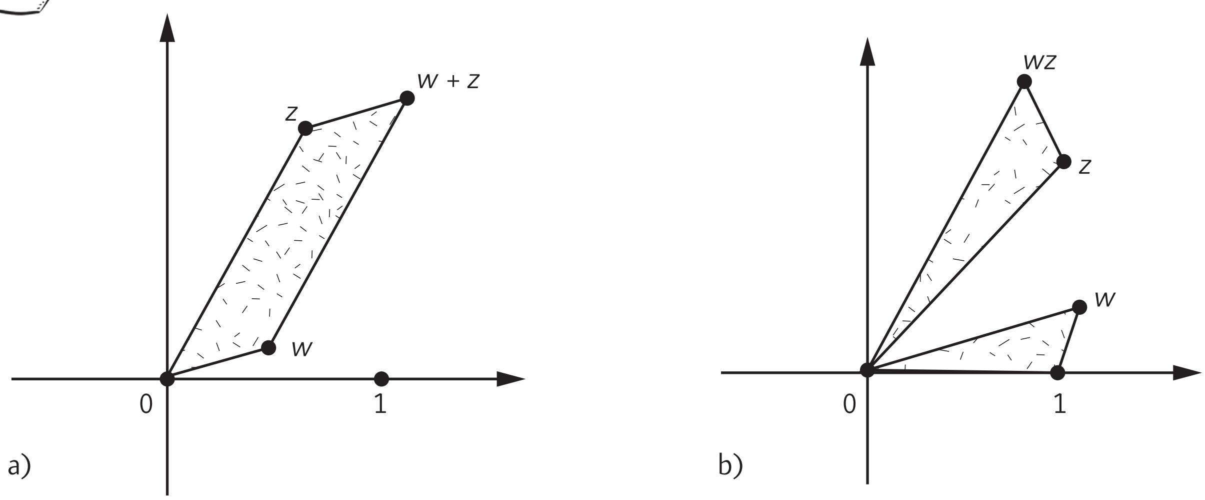
son las localizaciones de c que dan una secuencia no acotada (i), mientras que las regiones negras son las localizaciones de c para las que se da el caso (ii); el conjunto de Mandelbrot propiamente dicho es la totalidad de la región negra. En las imágenes del conjunto de Mandelbrot generadas por computadora (tales como la que estamos analizando), podemos computar indefinidamente para asegurar que una secuencia en apariencia acotada está realmente acotada. Es habitual "cortar" la iteración al cabo de un número apropiado de pasos. Sin embargo, retrasar simplemente el corte no mejora necesariamente la apariencia exacta de una imagen, porque los filamentos tienden a desaparecer.

La complejidad del conjunto de Mandelbrot surge del hecho de que la secuencia iterada puede permanecer acotada de muchas maneras diferentes, y a veces muy complicadas. Puede haber combinaciones de ciclos y "casi" ciclos de varios tipos, que puntean el plano de diversas formas complicadas, pero nos llevaría demasiado lejos tratar de entender en detalle cómo surge la extraordinaria complejidad de este conjunto, donde están implicadas cuestiones sutiles de análisis complejo y teoría de números.

Geometría de logaritmos, potencias y raíces

LA GEOMETRÍA DEL ÁLGEBRA COMPLEJA

Los aspectos de la magia de los números complejos discutidos anteriormente implican muchas sutilezas, de modo que retrocedamos un poco y consideremos algunos otros fragmentos de magia más elemental, aunque igualmente enigmáticos e importantes. En primer lugar, veamos cómo se representan geométricamente en el plano complejo las reglas para la suma y la multiplicación que encontramos. Podemos presentarlas como la ley del *paralelogramo* y la ley del *triángulo semejante*, respectivamente, que se muestran en las figuras que siguen.



Descripción geométrica de las leyes básicas del álgebra de los números complejos.
(a) Ley del paralelogramo de la adición: 0, w, $w + z$, z dan los vértices de un paralelogramo.
(b) Ley del triángulo semejante de la multiplicación: los triángulos con vértices 0, 1, w y 0, z, wz son semejantes.

En concreto, para dos números complejos generales w y z, los puntos que representan $w + z$ y wz vienen determinados por las respectivas afirmaciones:

los puntos 0, w, $w + z$, z son los vértices de un paralelogramo

y

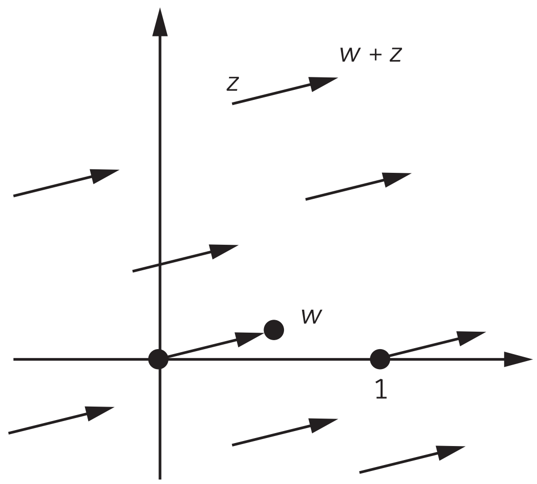
los triángulos con vértices 0, 1, w y 0, z, wz son semejantes.

(Aquí se han adoptado los convenios usuales sobre ordenamientos y orientaciones. Por eso, se entiende que recorremos el paralelogramo cíclicamente, de modo que el segmento de recta que va de w a $w + z$ es paralelo al que va de 0 a z, etc.; más aún, la relación de semejanza entre los dos triángulos no incluye "reflexión". Además, hay casos especiales en que los triángulos y el paralelogramo degeneran de varias maneras.) Podemos examinar las distintas posibilidades. Podemos probar estas reglas por trigonometría y cálculo directo. Sin embargo, hay otra manera de considerar estas cosas, que evita el cálculo detallado y proporciona intuiciones mayores.

Consideremos la suma y la multiplicación en términos de diferentes *aplicaciones* (o *transformaciones*) que conciernen el plano complejo entero en sí mismo. Cualquier número complejo w dado define una *aplicación* *suma* y una *aplicación multiplicación*. Estas son las operaciones que, cuando se aplican a un número complejo arbitrario z, sumarán w a z y harán el producto de w por z, respectivamente; es decir,

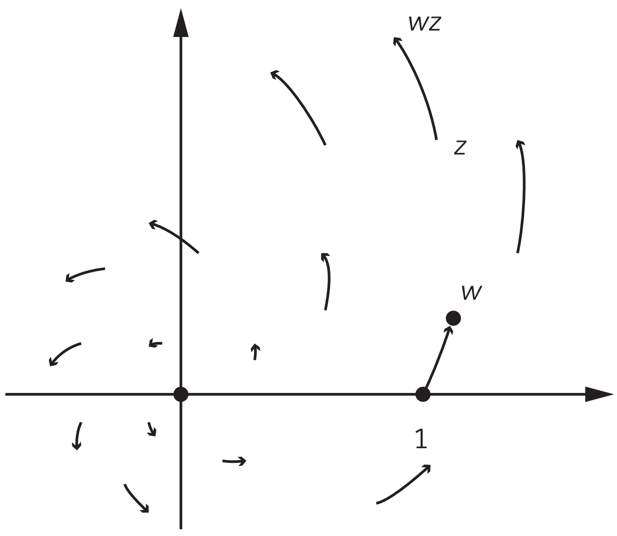
$$z \rightarrow w + z \text{ y } z \rightarrow wz.$$

Es fácil ver que la aplicación suma desliza simplemente el plano complejo sin rotación ni cambio de tamaño o forma –un ejemplo de una traslación– desplazando el origen 0 al punto w (ver la figura siguiente).



La aplicación suma "+ w" proporciona una traslación del plano complejo, que envía 0 a w.

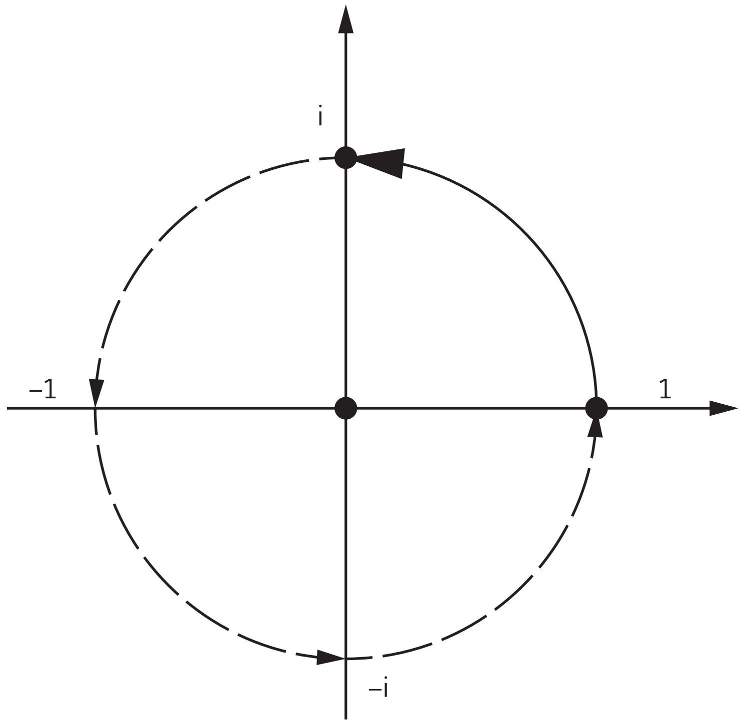
La ley del paralelogramo es básicamente una reformulación de esto. Pero, ¿qué pasa con la aplicación multiplicación? Esta proporciona una transformación que deja el origen fijo y conserva las formas –y que envía 1 al punto w–. En el caso general combina una rotación con una dilatación (o contracción) uniforme (ver la figura siguiente).



La aplicación multiplicación "× u" proporciona una rotación con dilatación (o contracción)
del plano complejo en torno a 0, que envía 1 a w.

Sugerimos probar esto sin cálculo detallado, y sin trigonometría. (**Indicación:** Esto es una consecuencia de la "ley distributiva" $w(z_1 + z_2) = wz_1 + wz_2$, que muestra que se conserva la estructura *lineal* del plano complejo, y $w(iz) = i(wz)$, que muestra que se conserva la rotación de un ángulo recto, es decir, se conservan los ángulos rectos.)

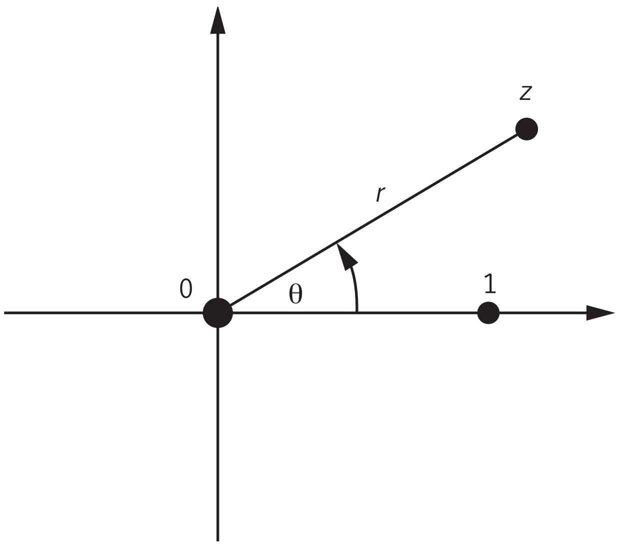
La ley del triángulo semejante muestra esto de modo efectivo. Esta aplicación tendrá una especial importancia para nosotros. En el caso particular $w = i$, la aplicación multiplicación es simplemente una rotación a izquierdas (o sea, en sentido contrario a las agujas del reloj) de un ángulo recto $\left(\frac{1}{2}\pi\right)$. Si aplicamos esta operación dos veces, obtenemos una rotación de π, que es simplemente una reflexión respecto del origen; en otras palabras, es la aplicación multiplicación que hace corresponder a cada número complejo z su negativo. Esto nos proporciona una realización gráfica de la "misteriosa" ecuación $i^2 = -1$, que se muestra en la figura siguiente.



La operación concreta "multiplicar por i" se realiza en el plano complejo, como la transformación geométrica "rotar un ángulo recto". Se visualiza así la "misteriosa" ecuación $i^2 = -1$.

La operación "multiplicar por i" queda realizada como la transformación geométrica "rotar un ángulo recto". Visto de este modo, no parece tan misterioso que el "cuadrado" de esta operación (es decir, hacerla dos veces) produzca el mismo efecto que la operación de "tomar el negativo". Por supuesto, esto no elimina la magia y el misterio de por qué el álgebra compleja funciona tan bien, ni nos habla de un papel físico claro para estos números. Podríamos preguntarnos, por ejemplo: ¿por qué rotar solo en un plano? ¿Qué pasa en tres dimensiones? Más adelante abordaremos diferentes aspectos de esta cuestión.

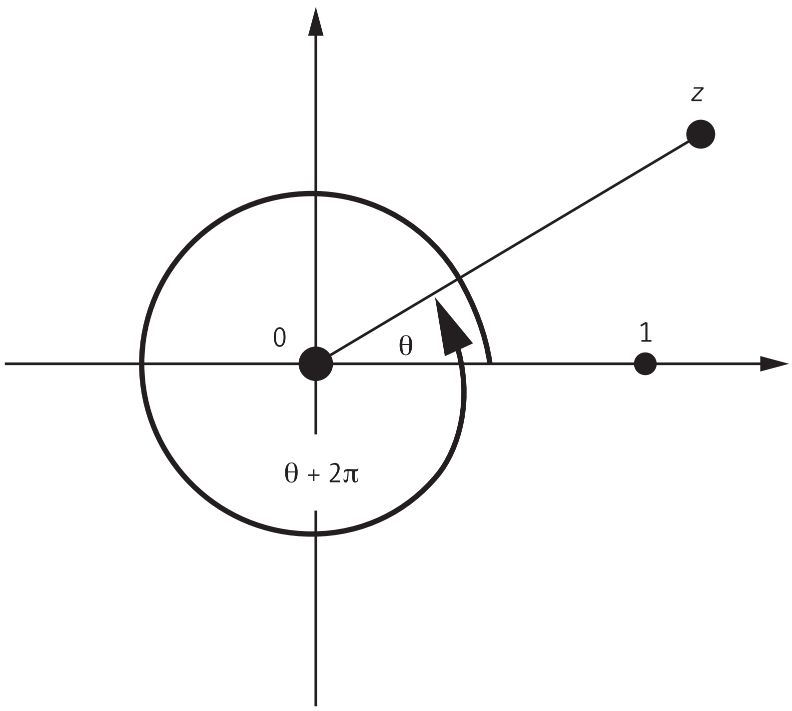
En nuestra descripción de un número complejo en el plano utilizábamos las coordenadas cartesianas estándar (x, y) para un punto en el plano, pero alternativamente podríamos utilizar las coordenadas polares $[r, \theta]$. Aquí, el número real positivo r mide la distancia al origen y θ mide el ángulo que forma la recta que une el origen y el punto z con el eje real, medido dicho ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj (ver la figura de la página siguiente).



Al pasar de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares $[r, \theta]$, tenemos $z = x + iy = re^{i\theta}$.
El módulo $r = |z|$ es la distancia al origen y el argumento θ es el ángulo que forma la recta que va del origen a z con el eje real, medido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

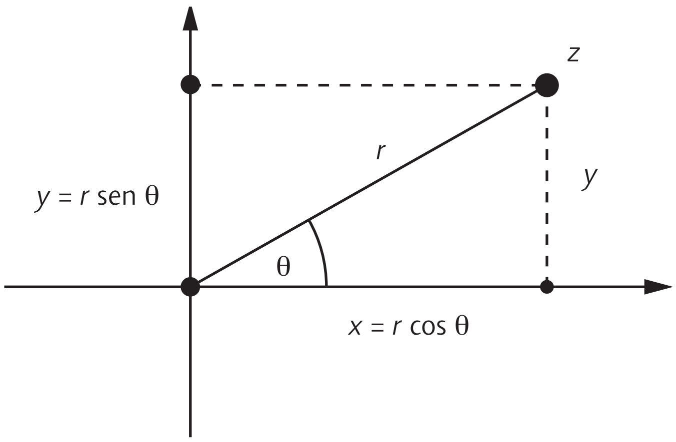
La cantidad r se conoce como el *módulo* del número complejo z, que solemos escribir como $r = |z|$, y θ como su argumento (o, en teoría cuántica, se conoce a veces como su *fase*). En el caso $z = 0$, no tenemos que preocuparnos por θ, pero podemos seguir definiendo r como la distancia al origen, que en este caso da simplemente $r = 0$.

Para ser más precisos, podríamos insistir en que θ esté comprendido en un intervalo concreto, tal como $-\pi < \theta \leq \pi$ (que es el convenio estándar). Alternativamente, podemos considerar simplemente el argumento como algo con la ambigüedad de que está permitido añadirle múltiplos enteros de 2π sin que nada se vea afectado. Se trata solo de que, cuando medimos el ángulo, podemos dar tantas vueltas alrededor del origen como queramos y en cualquier sentido, como se ve en la figura siguiente.



Si no insistimos en $-\pi < \theta \leq \pi$, podemos permitir que z dé muchas vueltas alrededor del origen, sumando cualquier múltiplo entero de 2π a θ.

(Este segundo punto de vista es en realidad el más profundo, y enseguida tendrá algunas implicaciones para nosotros.) A partir de la figura siguiente y la trigonometría elemental, vemos que $x = \mathrm{r} \cos \theta$ e $y = r$ sen θ:



Relación entre las formas cartesiana y polar de un número complejo: $x = r \cos \theta$, e $y = r \operatorname{sen} \theta$, donde recíprocamente $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \tan^{-1} (y/x)$.

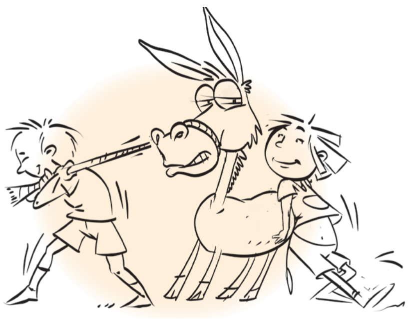
y recíprocamente que

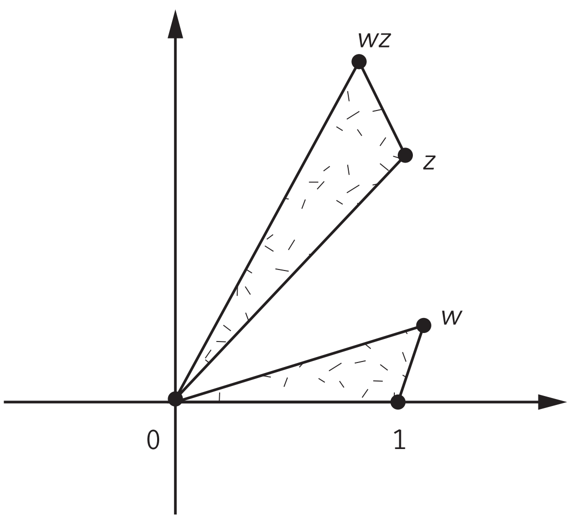
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\text{ y }\; \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

donde $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ significa un valor concreto de la función multivaluada $\tan^{-1}$. Para aquellos que han olvidado la trigonometría, las dos primeras fórmulas simplemente reexpresan las definiciones del seno y el coseno de un ángulo en términos de un triángulo rectángulo: "el coseno de un ángulo es igual al lado adyacente dividido por la hipotenusa" y "el seno de un ángulo es igual al lado opuesto dividido por la hipotenusa", siendo r la hipotenusa; las dos siguientes expresan el teorema de Pitágoras y, en forma inversa, "la tangente de un ángulo es igual al lado opuesto dividido por el lado adyacente". Asimismo, habría que advertir que "$\tan^{-1}$" es la *función inversa* de "tan", y no el recíproco, de modo que la ecuación anterior $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ representa $\tan \theta = y/x$. Finalmente, existe una ambigüedad en $\tan^{-1}$, pues puede añadirse a θ cualquier múltiplo entero de 2π y la relación seguirá siendo válida. En la misma dirección deberíamos señalar que las funciones trigonométricas $\cot \theta = \cos \theta/\operatorname{sen} \theta = (\tan \theta)^{-1}$, $\sec \theta = (\cos q)^{-1}$ y $\operatorname{cosec} \theta = (\operatorname{sen} \theta)^{-1}$ así como las versiones "hiperbólicas" de las funciones trigonométricas $\operatorname{senh} t = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$, $\cosh t = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)$, $\tanh t = \operatorname{senh} t/\cosh t$, etc. Nótese también que las inversas de estas operaciones se denotan por $\cot^{-1}$, senh^{-1}, etc.

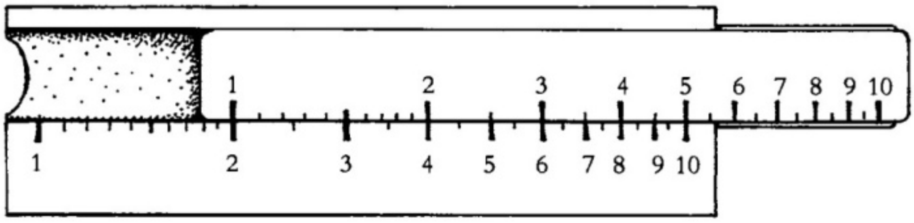
LA IDEA DEL LOGARITMO COMPLEJO

Ahora, la *ley del triángulo semejante* de la multiplicación de dos números complejos, que se ilustra en la figura siguiente,





puede reformularse en términos del hecho de que cuando multiplicamos dos números complejos sumamos sus argumentos y multiplicamos sus módulos. Adviértase aquí el hecho notable de que, por lo que respecta a la regla para los argumentos, hemos convertido la multiplicación en suma. En esto se basa el uso de los logaritmos (el logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de sus logaritmos log ab = log a + log b), como se manifiesta en la regla de cálculo, y esta propiedad fue de fundamental importancia para la práctica del cálculo en épocas pasadas.



Las reglas de cálculo muestran números en una escala logarítmica, posibilitando con ello que la multiplicación se exprese por la suma de distancias, de acuerdo con la fórmula $\log_b (p \times q) = \log_b p + \log_b q$. (Se ilustra la multiplicación por 2.)

Los logaritmos fueron introducidos en 1614 por John Napier y utilizados con fines prácticos por Henri Briggs en 1624.

Ahora utilizamos calculadoras electrónicas que hacen las multiplicaciones por nosotros. Aunque esto es mucho más rápido y exacto que el uso de una regla de cálculo o de unas tablas de logaritmos, perdemos algo muy importante para nuestra comprensión si no extraemos ninguna experiencia directa de la bella y muy importante operación logarítmica. Veremos que los logaritmos desempeñan un papel profundo en relación con los números complejos. De hecho, el argumento de un número complejo es realmente un logaritmo, en un sentido muy transparente. Trataremos de entender cómo se produce esto.

Recordemos también que tomar raíces de números complejos es básicamente una cuestión de comprender los logaritmos complejos. Encontraremos que existen algunas relaciones sorprendentes entre logaritmos complejos y trigonometría. Tratemos de ver cómo se combinan todas estas cosas.

En primer lugar, recordemos algo sobre los logaritmos ordinarios. Tomar un logaritmo es la operación inversa de "elevar un número a una potencia", o de la exponenciación. "Elevar a una potencia" es una operación que convierte suma en multiplicación. ¿Por qué es esto? Tomemos cualquier número b. Notemos entonces la fórmula (que convierte suma en multiplicación)

$$b^{m+n} = b^m \times b^n,$$

que es obvia si m y n son enteros positivos, porque cada miembro representa simplemente $m + n$ copias del número b, todas ellas multiplicadas.

Lo que tenemos que hacer es encontrar una manera de generalizar esto de modo que m y n no tengan que ser enteros positivos, sino que puedan ser números complejos cualesquiera. Para ello necesitamos encontrar la definición correcta de "b elevado a la potencia z", para z complejo, y queremos que la misma fórmula anterior, a saber $b^{(w+z)} = b^w \times b^z$, sea válida cuando los exponentes w y z son complejos.

De hecho, el procedimiento para hacer esto refleja, en cierta medida, la historia misma de generalizar, paso a paso, desde los enteros positivos a los números complejos, como se hizo partiendo de Pitágoras por la obra de Eudoxo, pasando por Brahmagupta hasta llegar a la época de Cardano y Bombelli (y más tarde), tal como lo hemos hecho. Primero, la noción de "b^z" es inicialmente entendida cuando z es un número positivo, simplemente como $b \times b \times b \times \ldots \times b$, con b multiplicadas z veces como factor; en particular, $b^1 = b$. Luego (siguiendo a Brahmagupta), permitimos que z sea cero, advirtiendo que para conservar $b^{(w+z)} = b^w \times b^z$ tenemos que definir $b^0 = 1$.

A continuación, permitimos que z sea negativo y advertimos, por la misma razón, que para el caso $z = -1$ debemos definir b^{-1} como el recíproco de b (es decir, $1/b$), y que b^{-n} para un número natural n debe ser la n–ésima potencia de b^{-1}. Luego, tratamos de generalizar a situaciones en que z es una fracción, empezando con el caso $z = 1/n$, donde z es un entero positivo.

La aplicación repetida de $b^w \times b^z = b^{(w+z)}$ nos lleva a concluir que $(b^z)^n = b^{zn}$; así pues, haciendo $z = 1/n$, llegamos a que $b^{1/n}$ es una raíz n–ésima de b.

Podemos hacer esto dentro del dominio de los números reales, con tal de que el número b se haya tomado positivo. Entonces podemos tomar $b^{1/n}$ como la única raíz n–ésima positiva de b (cuando n es un entero positivo) y podemos continuar definiendo unívocamente b^z para cualquier número racional $z = m/n$ como la m-ésima potencia de la raíz n-ésima de b y de aquí pasar (utilizando un proceso de paso al límite) a cualquier número real z.

Pero si se permite que b sea negativo, entonces tropezamos con un problema en $z = 1/2$, puesto que $\sqrt{b}$ requiere entonces la introducción de i y caemos en la pendiente resbaladiza hacia los números complejos. En el fondo de dicha pendiente encontramos nuestro mágico mundo complejo, de modo que agarrémonos y sigamos hasta abajo. Necesitamos una definición de b^p tal que para todos los números complejos p, q y b (con $b \neq 0$), tengamos:

$$b^{p+q} = b^p \times b^q.$$

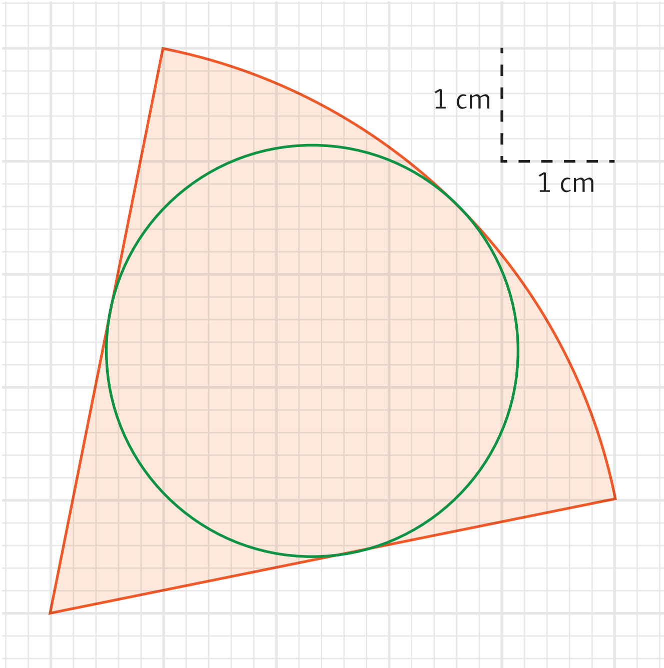
Podríamos confiar entonces en definir el *logaritmo en base b* (la operación denotada por "$\log_b$") como la inversa de la función definida por $f(z) = b^z$, es decir, $z = \log_b w$ si $w = b^z$.

Entonces esperaríamos

$$\log_b (p \times q) = \log_b p + \log_b q,$$

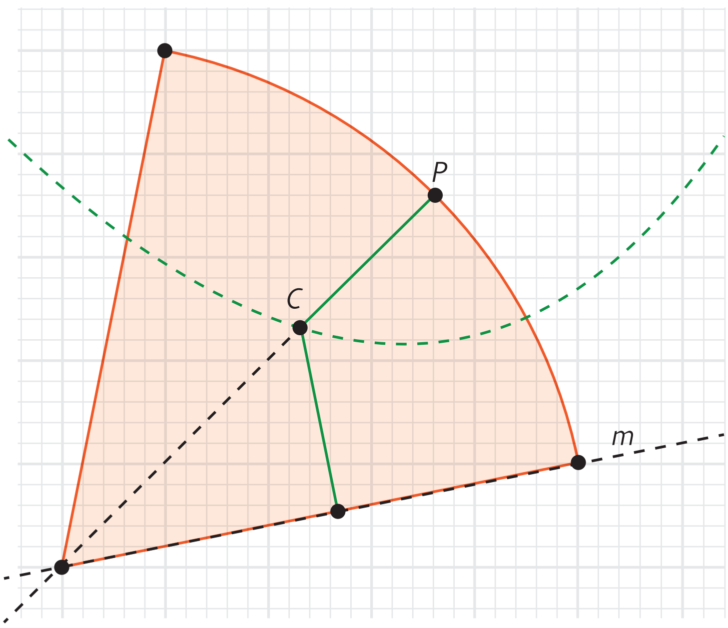
de modo que esta noción de logaritmo convertiría realmente la multiplicación en suma.

Usando GeoGebra, reproducir la siguiente figura, luego hallar la longitud del radio de la circunferencia inscripta en el sector circular.



Solución

Seleccionamos ***Sector circular*** y marcamos los puntos sobre la cuadrícula para obtener un sector circular como el de la figura en el enunciado. El centro C de la circunferencia debe estar sobre la bisectriz del ángulo, la que corta al arco del sector en el punto P. Además, la distancia desde C a P debe ser igual a la distancia de C a la recta m dada por la prolongación de uno de los lados del sector; por lo tanto, C debe estar en el lugar geométrico de los puntos que equidistan de P y de m, pero esto es una parábola.

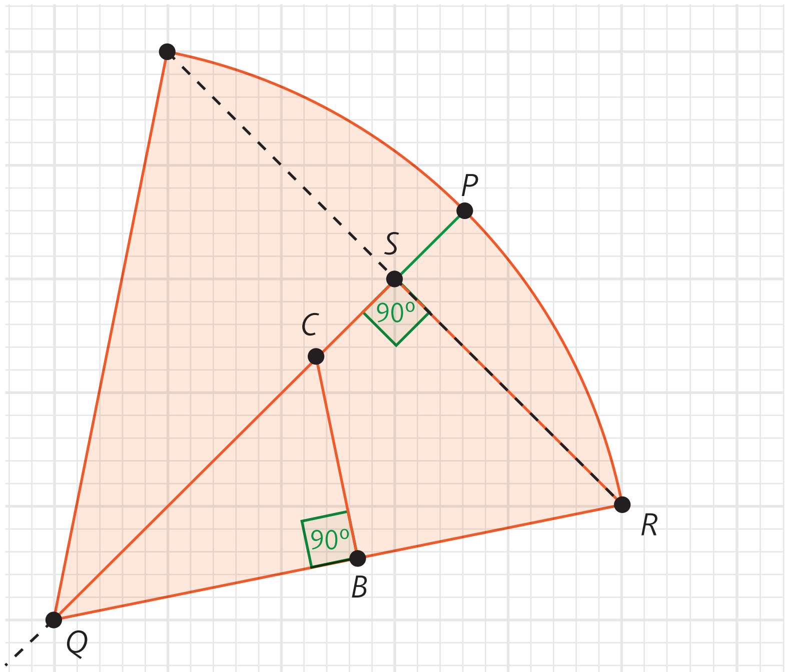


Para obtener la presente figura, se han usado los recursos: ***Bisectriz***, ***Intersección***, ***Recta***, ***Parábola***, ***Perpendicular*** y ***Segmento***.

Ahora, la figura del enunciado puede conseguirse trazando la circunferencia con centro C que pasa por P (***Circunferencia centro punto***) y ocultando los objetos auxiliares.

Para calcular la longitud del radio r de la circunferencia, usaremos semejanza de triángulos rectángulos QCB y QRS indicados en la siguiente figura y las igualdades:

$$QC = QR - r,\, CB = r,\, SR = 2\sqrt{2},\, QR = \sqrt{26}.$$



Por la semejanza se tiene:

$$\frac{CB}{QC} = \frac{SR}{QR}$$

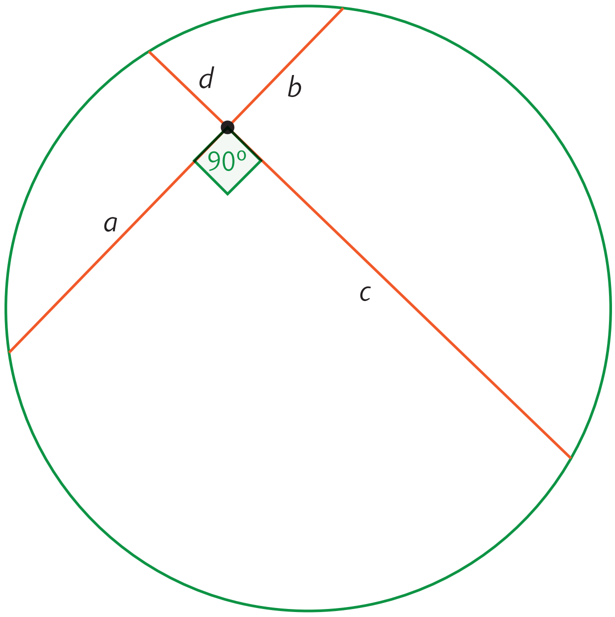
o sea:

$$\frac{r}{\sqrt{26} - r} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{26}},$$

operando resulta:

$$r = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{26}}{2\sqrt{2} + \sqrt{26}} \text{ cm } = \frac{4\sqrt{13}}{2\sqrt{2} + \sqrt{26}} \text{ cm}.$$

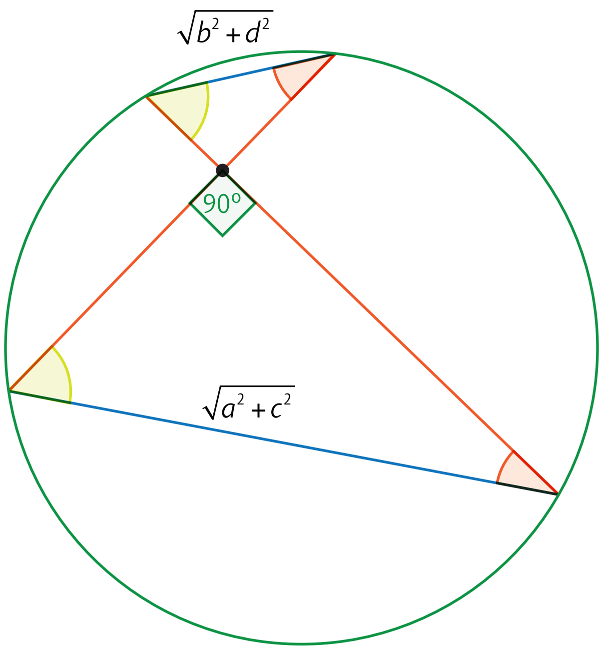
En la circunferencia de la figura, dos cuerdas perpendiculares se cortan formando cuatro segmentos de longitudes a, b, c y d.



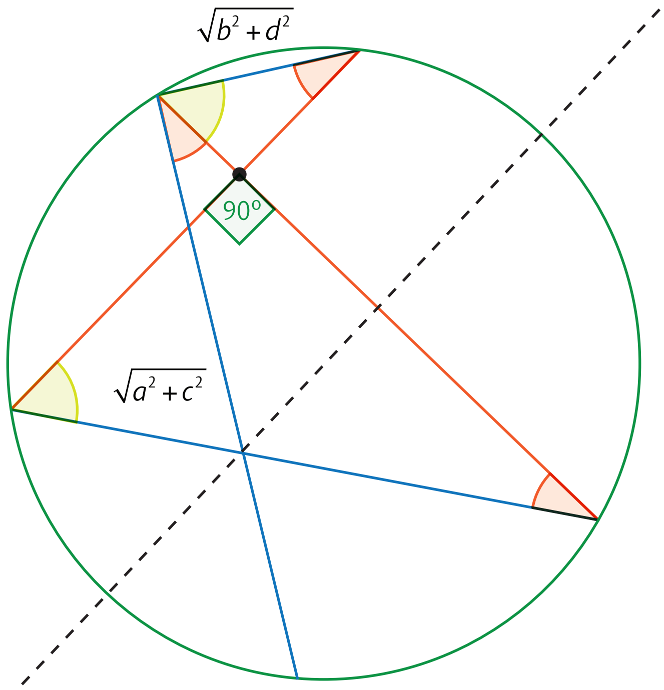
Mostrar que la longitud del diámetro de la circunferencia es igual a $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Solución

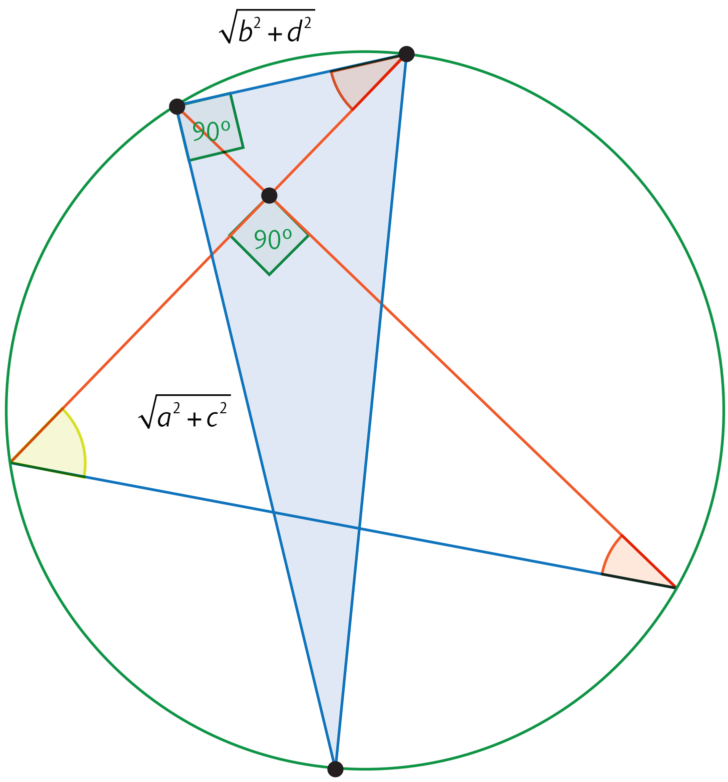
Por el *teorema de Pitágoras*, las longitudes de las cuerdas marcadas en azul en la siguiente figura están dadas por $\sqrt{a^2+c^2}$ y $\sqrt{b^2+d^2}$; además, por ángulo inscripto, los ángulos que se muestran con un mismo color son de igual medida, mientras que dos ángulos de distintos colores son complementarios.



Trazamos la mediatriz de una de las cuerdas y consideramos el simétrico de una cuerda azul respecto de la mediatriz trazada, por ejemplo, como en la siguiente figura:



De este modo, se ha inscripto un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{a^2+c^2}$ y $\sqrt{b^2+d^2}$:



Por el *teorema de Pitágoras* se concluye que la longitud del diámetro de la circunferencia está dada por la expresión $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Usando GeoGebra, calcular:

$$\sqrt{\left(6+\sqrt{2}+\sqrt{10}-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(6+\sqrt{2}-\sqrt{10}+4\sqrt{5}\right)\cdot\left(6-\sqrt{2}+\sqrt{10}+4\sqrt{5}\right)\cdot\left(-6+\sqrt{2}+\sqrt{10}+4\sqrt{5}\right)}.$$

Solución

Este problema es una excusa para presentar la *fórmula de Brahmagupta* para el cálculo del área de un cuadrilátero cíclico, es decir, inscriptible.

Esta fórmula generaliza la *fórmula de Herón* a cuadriláteros cíclicos y se enuncia como sigue:

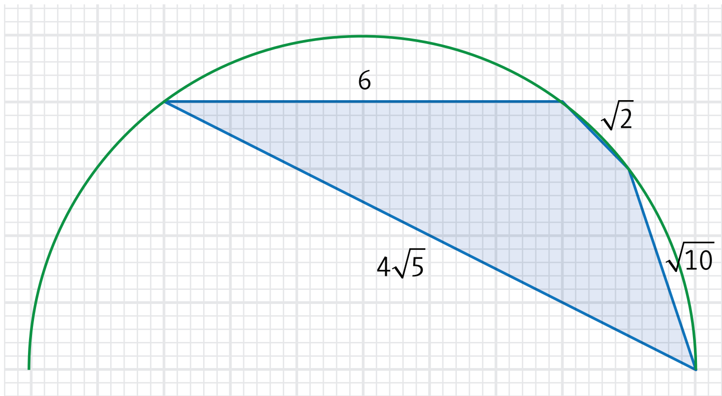
Si a, b, c y d son las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico, entonces el área del mismo está dada por la expresión:

$$\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

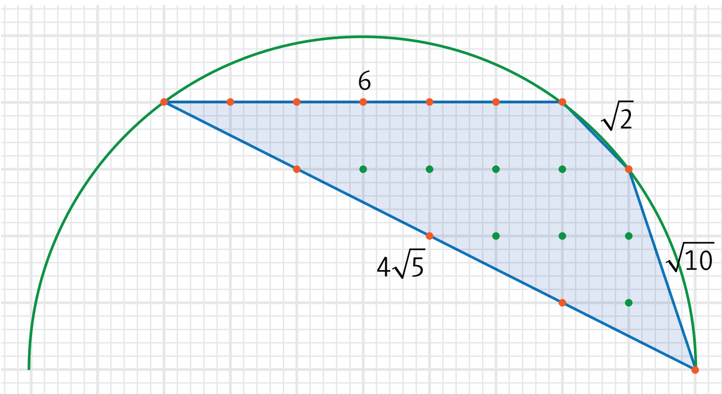
o, en forma equivalente:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)\cdot(a-b+c+d)\cdot(-a+b+c+d)}.$$

Usando la cuadrícula con cuadrados de 1 × 1 cm, podemos ver que la expresión del problema representa el área del cuadrilátero cíclico dado en la siguiente figura.



El valor numérico de la expresión del enunciado del problema será igual a 4 veces el área del cuadrilátero, que puede calcularse con la *fórmula de Pick*.



El resultado es:

$$4\cdot\left(8+\frac{12}{2}-1\right)=52.$$