Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

3ª época ✈ Nº 10
12 de agosto de 2021

"… más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

A. CÓMO PRESENTAR LO IMPORTANTE. LAS FRACCIONES CONTINUAS

Aventuras interesantes en el territorio de los números fraccionarios

El objetivo de pensar las fracciones como aproximación a un número real mediante el método de las fracciones continuas y de las fracciones equivalentes está orientado a que los estudiante, antes de llegar a los quince años, comprendan la idea de infinitésimos y de infinitésimos de orden superior para comenzar a desarrollar los métodos del cálculo diferencial e integral.

(Continúa de la *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época, Sección A)

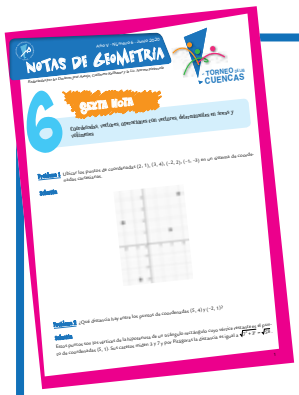
Para pensar con alumnos de 12 a 14 y lograr fluidez

11. El algoritmo de Euclides

En el párrafo anterior, publicado en *Leñitas Geométricas* 3.9, 3a época, hemos conocido el algoritmo del desarrollo de un número real en fracción continua. Este algoritmo se compone de dos pasos que se alternan: 1) separación de la parte entera del número; 2) representación del resto (menor que la unidad) como un número inverso al otro número (mayor que la unidad). Dicho algoritmo constituye un caso particular del llamado *algoritmo de Euclides* ampliamente usado en la matemática.

Primero mostraremos cómo funciona el algoritmo de Euclides mediante el ejemplo de obtener el *MCD* (máximo común divisor) de dos números reales.

Sean p y q números naturales. El algoritmo de Euclides consta de los siguientes pasos (supuesto que $p < q$ entonces $a_0 = 0$):



Ya podés pedir la

SEXTA NOTA DE GEOMETRÍA,

sobre coordenadas, vectores, operaciones con vectores, determinantes en áreas y volúmenes.

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.
¡Hacé tu pedido!

red olímpica

Pedidos a fenchu@oma.org.ar
11 4826 8976 y (por WhatsApp) +54 9 11 5035 7537

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

Dividimos	Cociente	Resto
p por q	a_0	r_0
q por r_0	a_1	r_1
r_0 por r_1	a_2	r_2
…	…	…

Lo escribiremos mediante las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} p &= a_0 q + r_0 \quad (0 < r_0 < q);\\ q &= a_1 r_0 + r_1 \quad (0 < r_1 < r_0);\\ r_0 &= a_2 r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1);\\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2);\\ &\cdots\cdots\\ r_{s-3} &= a_{s-1} r_{s-2} + r_{s-1} (0 < r_{s-1} < rs - 2);\\ r_{s-2} &= a_s r_{s-1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

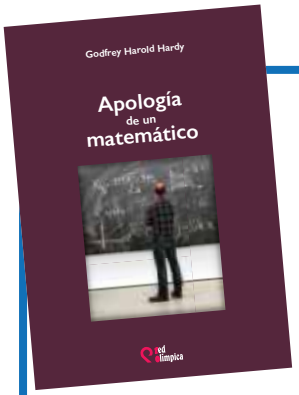
Aclaración. Si se dividen números enteros el resto puede resultar cero. Entonces, ¿por qué excluimos el signo de igualdad en el primer término, es decir, por qué, por ejemplo, escribimos $0 < r_1 < r_0$ en lugar de $0 \le r_1 < r_0$?

Porque si resulta que $r_1 = 0$, esta igualdad será la última. El algoritmo obligatoriamente se interrumpirá ya que los restos r_0, r_1, r_2, … son números enteros no negativos, y cada número consecuentemente es rigurosamente menor que el anterior. Por lo tanto, en cierto paso el resto será igual a cero.

Las igualdades (2.1) pueden transformarse del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q};\\ \frac{q}{r_0} &= a_1 + \frac{r_1}{r_0};\\ \frac{r_0}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1};\\ &\cdots\cdots\\ \frac{r_{s-3}}{r_{s-2}} &= a_{s-1} + \frac{r_{s-1}}{r_{s-2}};\\ \frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} &= a_s \end{aligned}\right\}$$

r_{s-1} es precisamente el *MCD* de los números p y q.



Apología de un matemático

de Godfrey Harold Hardy.

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". *Miguel de Guzmán*

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.
¡Hacé tu pedido!

red olímpica

Pedidos a fenchu@oma.org.ar

11 4826 8976 y (por WhatsApp) +54 9 11 5035 7537

Cada una de estas igualdades (excepto la última) representa una fracción impropia bajo la forma de suma de un número entero y una fracción propia. Observemos que el primer miembro de cada igualdad, a partir de la segunda, es inverso de la fracción propia que figura en la igualdad anterior. Por esta razón, se pueden excluir sucesivamente todos los r_i. Sustituimos en la primera igualdad la fracción $\frac{r_0}{q}$ por su expresión en la segunda igualdad:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}}$$

En la igualdad obtenida sustituimos la fracción $\frac{r_1}{r_0}$ por su expresión en la tercera igualdad:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}}$$

Si continuamos este proceso, al final obtenemos el desarrollo de $\frac{p}{q}$ en fracción continua. No obstante, no hay ninguna razón para realizar cada vez este proceso de sustitución. Es que acabamos de revelar que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ en realidad son elementos de la fracción continua buscada. Nos queda solamente retener en lo memoria la siguiente regla:

Para desarrollar $\frac{p}{q}$ en fracción continua hace falta aplicar para los números p y q el algoritmo de Euclides. Los cocientes obtenidos como resultado de las operaciones de división consecutivas son, en realidad, elementos de una fracción continua.

Ejemplo. Desarrollar $\frac{61}{27}$ en fracción continua.

$$\frac{61}{27}\left|\frac{27}{2}\,\frac{27}{6}\right\|\frac{7}{3}\,\frac{7}{1}\left\|\frac{6}{1}\,\frac{6}{0}\right|\frac{1}{6}.$$

Por lo tanto, $\frac{61}{27} = |2;3,1,6|$.

12. Ejemplos de la aplicación del algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides puede aplicarse no solo para hallar el *MCD* de dos números naturales. Sean p y q elementos de cualquier conjunto en el cual está determinada la división entera. [Esto significa que a cada par ordenado de elementos p y q (p es el dividendo y q, el divisor) le corresponde un par ordenado a y r (a es cociente y r, el resto) que satisface dos condiciones: $p = aq + r$, $r < q$. Está claro que en este conjunto deben determinarse la operación de multiplicación y el concepto "menor"]. Entonces puede usarse el algoritmo de Euclides.

Por ejemplo, si p y q son segmentos de una recta, entonces, el algoritmo de Euclides puede utilizarse para buscar su medida común. Si p y q son conmensurables, el algoritmo de Euclides se interrumpe y el segmento r_{s-1} [véanse las fórmulas (2.1)] será precisamente su medida común.

En realidad, la última igualdad (2.1) demuestra que r_{s-1} se contiene en r_{s-2} un número entero de veces. Al sustituir el valor r_{s-2} en la penúltima igualdad, obtendremos

$$r_{s-3} = a_{s-1}a_s r_{s-1} + r_{s-1} = (a_{s-1}a_s + 1)r_{s-1}.$$

Por lo tanto r_{s-1} se contiene también en r_{s-3} un número entero de veces. Subiendo de tal manera, en el sistema de fórmulas (2.1), cada vez un escalón, llegaremos a las dos primeras filas, es decir, demostraremos que r_{s-1} contiene un número entero de veces también en p y en q, o sea, r_{s-1} es la medida común para p y q.

Además, el algoritmo de Euclides nos proporciona los elementos de la fracción continua correspondiente a la relación $\frac{p}{q}$. Esto también sucedería en el caso de que los segmentos p y q fueran inconmensurables. El algoritmo de Euclides resultará infinito y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots$ serán elementos de una fracción continua infinita correspondiente a la relación $\frac{p}{q}$.

El algoritmo de Euclides puede aplicarse para polinomios de una **x**. Dado este caso, "menor" debe significar "en grado menor". Aprovechando este algoritmo puede hallarse el *MCD* de dos polinomios, pero esto no tiene ninguna relación directa con el tema que tratamos.

13. Resultados

En este momento hemos conocido el algoritmo (en dos variantes) que permite desarrollar todo número real α en una fracción continua; es decir, hallar la fracción continua correspondiente al número α.

Si α es un número racional, le corresponde una fracción continua finita. En este caso se pueden realizar los cálculos en dirección contraria, o sea, hallar el valor de la fracción continua. Por ejemplo,

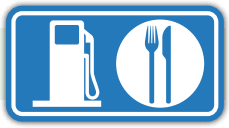
$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{6}{7}}=2+\frac{7}{27}=\frac{61}{27}$$

Por esta razón, en lugar de decir "al número 61/27 le corresponde la fracción continua [2; 3, 1, 6]" puede decirse "el número 61/27 es igual a la fracción continua [2; 3, 1, 6]". Hablando de una manera más precisa, esto significa que $\frac{61}{27}$ y [2; 3, 1, 6] constituyen dos anotaciones diferentes de un mismo número.

Totalmente de otro modo resulta si α es irracional. En este caso la correspondencia entre α y la fracción continua está determinada solamente en una dirección: al número α le corresponde una fracción continua infinita y no al revés. No podemos calcular una fracción continua infinita por el mismo procedimiento que utilizamos al calcular [2; 3, 1, 6]. El sentido de la fracción continua infinita hasta ahora nos es desconocido.

Resolveremos este problema más adelante cuando mostremos el sentido de la fracción continua infinita, por ahora consideramos que las fracciones continuas apuntan al cálculo infinitesimal y a la idea de infinitésimos de infinitésimos de orden superior.

¿Cómo empezaron las fracciones continuas y para qué?



John Wallis (Ashford, 23 de noviembre de 1616-Oxford, 28 de octubre de 1703) fue un matemático inglés a quien se atribuye en parte el desarrollo del cálculo moderno. Fue un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo {∞} para representar la noción de infinito). Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte real. Fue también uno de los fundadores de la Royal Society y profesor en la Universidad de Oxford.

En 1655, Wallis publicó un tratado sobre secciones cónicas en el que las define analíticamente. Este fue el primer libro en el que estas curvas se consideraron y definieron como curvas de segundo grado. Además, contribuyó a eliminar algunas de las dificultades y oscuridades presentes en los trabajos de René Descartes sobre geometría analítica.

En 1656 se publicó *Arithmetica Infinitorum*, el trabajo más importante de Wallis. En este tratado, los métodos de análisis de Descartes y Cavalieri fueron ampliados y sistematizados, aunque algunas ideas recibieron críticas. Tras un corto periodo centrado en las secciones cónicas, comenzó a desarrollar una notación estándar para las potencias, ampliándola desde los números enteros positivos hasta los números racionales.

Mientras que Cavalieri había llegado al resultado ampliamente comentado en *Leñitas Geométricas* 4, 3ª época:

$$\int_0^a x^m\,dx=\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

logrado por medio de un laborioso método de correspondencia biunívoca entre los indivisibles geométricos en un paralelogramo con los de uno de los dos triángulos en que lo divide una diagonal, Wallis abandonó el marco geométrico después de haber asociado valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras.

Si se quieren comparar, por ejemplo, los cuadrados de los indivisibles en el triángulo con los cuadrados de los indivisibles en el paralelogramo, se puede tomar la longitud del primer indivisible en el triángulo como cero,

la del segundo como uno, la del tercero como dos, y así sucesivamente hasta el último, de longitud $n - 1$, si hay en total n indivisibles. La razón de las sumas de los cuadrados de los indivisibles en las dos figuras sería entonces

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

si hubiera solo dos indivisibles en cada figura, o

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

si hubiera tres, o

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{14}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

si hubiera cuatro. En general, para el caso en que hubiera $n + 1$ indivisibles, la razón sería

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+\ldots+n^2+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

y, para n infinito, la razón sería obviamente igual a $\frac{1}{3}$ (pues para n infinito el término complementario $\frac{1}{6n}$ se convierte en $\frac{1}{\alpha}$ o cero. Wallis fue el primero en utilizar, en este contexto, nuestro bien conocido símbolo del "lazo del amor" (lemniscata) para representar el infinito.

Esto resulta equivalente a decir que

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

Desde luego, Wallis extendió este mismo método a potencias enteras y positivas de x más altas, concluyendo por inducción incompleta que

$$\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1}$$

para todo m natural.

Fermat criticó, con toda razón, la inducción que hacía Wallis, puesto que carece absolutamente del rigor del método de inducción completa que utilizaron frecuentemente tanto Fermat como Pascal. Por otra parte, Wallis adoptó como válido un principio de interpolación todavía más cuestionable, en virtud del cual "deducía" que su resultado seguía siendo correcto para valores de m fraccionarios e incluso negativos (excepto para $m = -1$).

Wallis tuvo incluso la osadía de admitir que la fórmula anterior era válida también para potencias irracionales, en lo que constituye la primera afirmación de la historia del cálculo relativa a lo que ahora llamaríamos una "función trascendente de orden superior". El uso de la notación exponencial para potencias fraccionarias y negativas resultaba una generalización importante de sugerencias anteriores, tales como las que formularon Oresme y Stevin.

Pero Wallis no ofreció ninguna base lógica en la que fundamentar su extensión de la exponenciación cartesiana. Lo único que hizo fue dar algunos ejemplos particulares de varios casos, como el de que un término o número con índice –2 multiplicado por el mismo término o número con índice –3 da como resultado dicho término con índice –5; o que un término con índice –3 multiplicado por él mismo con índice 2 da el mismo término con índice –1. A continuación, afirma alegremente: "Y lo mismo ocurrirá en cualquier otro caso de este tipo, y por lo tanto la proposición queda demostrada". Wallis era, parafraseando al clásico, largo en descubrimientos, pero en rigor corto, tal como se apresuraron a advertir los matemáticos franceses.

Las fórmulas de Wallis o las funciones maravillosas

Wallis fue, sin lugar a duda, el más importante de los matemáticos ingleses anteriores a Newton, y sus contribuciones principales a la matemática lo fueron en el campo del cálculo infinitesimal. Entre ellas hay una en la que, al intentar calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$$

anticipó parte de la obra posterior de Euler sobre la función gamma o los factoriales generalizados. Wallis sabía, por la obra de Cavalieri y Fermat, entre otros, que esta integral representa el área bajo la semicircunferencia $y=\sqrt{x-x^2}$, y que esta área es, por lo tanto, igual a $\frac{\pi}{8}$; pero el problema era el siguiente: **¿cómo se podría obtener la respuesta correcta por medio de una evaluación directa de la integral por métodos infinitesimales?**

Wallis no consiguió responder a esta cuestión, pero su peculiar método de inducción e interpolación dio lugar a un resultado interesante. Después de calcular los valores de la integral

$$\int_0^1 \left(x-x^2\right)^n dx$$

para varios valores de *n* enteros positivos, Wallis llegó a la conclusión, por el procedimiento habitual de inducción incompleta, de que el valor de esta integral es $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

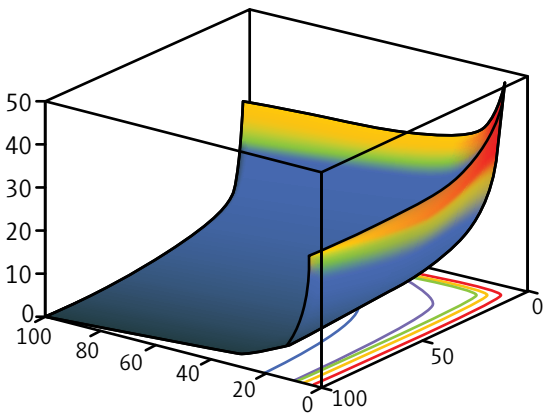
Suponiendo (¡que ya es suponer!) que la misma fórmula es válida también para valores de *n* fracciones, Wallis llega a la conclusión de que

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}$$

luego $\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}!\right)^2$ o bien $\frac{1}{2}!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Este es, como se sabe, un caso especial de la función beta euleriana o integral de Euler de primer orden

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

donde $m=\frac{3}{2}$ y $n=\frac{3}{2}$.



Thomas Hobbes (1588-1679) fue probablemente el más importante de los críticos de la aritmetización de la geometría llevada a cabo por Wallis, oponiéndose enérgicamente a "todo el rebaño de los que aplican su álgebra a la geometría", refiriéndose a la *Arithmetica infinitorum* como "una costra de símbolos". Sin embargo, Hobbes tenía más vanidad que capacidad matemática, insistiendo en que había logrado la cuadratura del círculo y en que había resuelto los otros problemas geométricos de los antiguos.

Así pues, Wallis podía permitirse muy bien no hacer el menor caso de Hobbes y continuar con sus descubrimientos. Entre los más conocidos de sus resultados está la fórmula del producto infinito para π:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots}$$

Esta expresión se puede obtener fácilmente, en términos modernos, del teorema

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n+1} x\,dx} = 1$$

y de las fórmulas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

para m impar y

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx = \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}$$

para m par. (El símbolo $m!!$ representa el producto $m(m-2)(m-4)\ldots$ que termina en 1 o en 2, según sea m impar o par, respectivamente). Por este motivo, a las dos últimas expresiones anteriores se las conoce con el nombre de "fórmulas de Wallis". Sin embargo, el método que utilizó realmente Wallis para obtener su expresión del producto infinito para $\frac{2}{\pi}$ se basaba, de hecho, en sus inevitables principios de inducción e interpolación, aplicados esta vez a la integral por no disponer del teorema binomial. De este mismo contexto precisamente partiría Newton para obtener el teorema binomial.

Durante los años 1650 y 1660 se desarrollaron una gran variedad de métodos infinitos, incluido el método de la fracción continua infinita para π que había dado William Brouncker (1620-1684), el primer presidente de la Royal Society. Los primeros pasos en la teoría de fracciones continuas se dieron mucho antes, y tuvieron lugar en Italia, donde Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), de Bolonia, había expresado ya raíces cuadradas de esta forma que operamos más arriba. Brouncker, de alguna manera, se vio conducido a la expresión:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2+\ldots}}}}$$

B. DIALOGANDO CON LOS MAESTROS

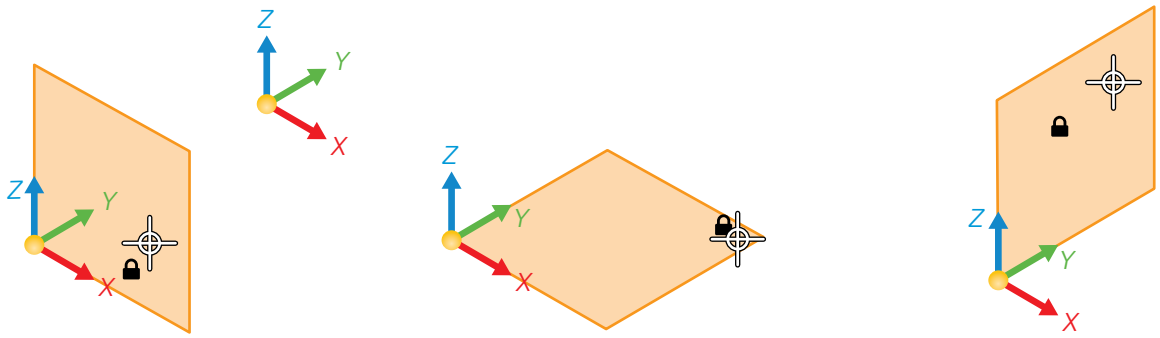
Aventuras interesantes con el método de coordenadas

(Continúa de *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época, Sección B)

Los ejes y los planos coordenados

Introducción

Como ahora sabemos algo del método de coordenadas, podemos conversar sobre algunas cosas interesantes que están estrechamente relacionadas con la matemática moderna.



1b. Algunas ideas generales

El álgebra y la geometría que son consideradas ahora por la mayoría de los escolares como ciencias absolutamente distintas están en realidad muy próximas. Mediante el método de coordenadas, empleando solo los números y las operaciones algebraicas, y sin hacer ningún dibujo –como decía el recordado Ing. Orlando Villamayor–, se podría exponer todo el curso escolar de geometría. El curso de planimetría comenzaría con estas palabras: "Se llama punto al par de números (x, y), …". Después se podría definir la circunferencia como el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. La línea recta sería el conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación $ax + by + c = 0$. Muchas otras figuras se podrían caracterizar asimismo mediante sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Con esto, todos los teoremas geométricos se transformarían en unas cuantas relaciones algebraicas. En las siguientes publicaciones les contaremos detalladamente cómo se hace esto.

El establecimiento de la relación existente entre el álgebra, por una parte, y la geometría, por otra, representó una revolución en las matemáticas. Esto convirtió a las matemáticas en una ciencia única, en la cual no existe "una muralla china" entre cada una de sus partes.

El filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) es considerado el creador del método de coordenadas. En la última parte del gran tratado de filosofía de Descartes, editado en el año 1637, se ofrece una descripción del método de coordenadas y su aplicación a la solución de problemas geométricos. El desarrollo de las ideas de Descartes dio origen a una rama especial de la matemática: la geometría analítica.

La denominación misma expresa la idea fundamental de la teoría. La geometría analítica es aquella parte de la matemática que resuelve problemas geométricos por medios analíticos (o sea, algebraicos). Aunque la geometría analítica es ahora una parte de la matemática totalmente desarrollada y terminada, las ideas contenidas en sus fundamentos dieron origen a nuevas ramas de la matemática.

También surge y se desarrolla la geometría algebraica, que estudia las propiedades de las líneas y de las superficies expresadas mediante ecuaciones algebraicas. De ninguna manera se puede considerar terminada esta parte de la matemática, ya que justamente en los últimos años se han obtenido nuevos resultados fundamentales, los cuales han ejercido una gran influencia en otras ramas.

2b. La geometría nos ayuda a contar

Cuando se resuelven problemas geométricos aparece en primer plano un aspecto del método de coordenadas: la explicación analítica de los conceptos geométricos, o sea, la traducción al lenguaje de los números de las relaciones y figuras geométricas. Sin embargo, el otro aspecto del método de coordenadas, la interpretación geométrica de los números y de las relaciones numéricas, adquirió un valor no menos significativo. El eminente matemático Herman Minkowski (1864-1909) empleó un enfoque geométrico en la resolución de ecuaciones con números enteros. Los matemáticos de su tiempo quedaron asombrados ya que algunos problemas de la teoría de números que antes parecían muy difíciles resultaron tan simples y evidentes.

Veamos un ejemplo absolutamente sencillo que demuestra cómo la geometría ayuda a resolver problemas algebraicos.

Problema. Consideremos la desigualdad

$$x^2 + y^2 \leq n$$

donde, n es un número entero positivo cualquiera. La pregunta es: ¿cuántas soluciones en números enteros N tiene esta inecuación?

Resolución. Es fácil responder a esta pregunta para valores pequeños de n. Por ejemplo, para $n = 0$, se tiene una sola solución: $x = 0$, $y = 0$. Para $n = 1$ hay que agregar a esta solución otras cuatro soluciones: $x = 0$, $y = 1$; $x = -1$, $y = 0$; $x = 0$, $y = -1$ y; $x = -1$, $y = 0$; por consiguiente, se tendrán en total cinco soluciones.

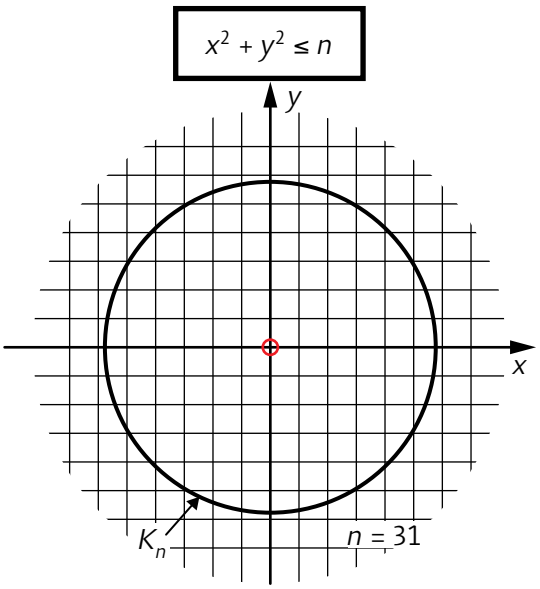
Para $n = 2$, además de las soluciones señaladas, se tienen otras cuatro soluciones: $x = 1$, $y = 1$; $x = -1$, $y = 1$; $x = 1$, $y = -1$; $x = -1$, $y = -1$. Para $n = 2$ se tienen en total nueve soluciones. Continuando de este modo se puede construir una tabla.

n	*N*	*N/n*
0	1	–
1	5	5
2	3	4,5
3	9	3
4	13	3,25
5	21	4,2
10	37	3,7
20	69	3,45
50	161	3,22
100	317	3,17

Vemos, pues, que el número de soluciones N aumenta al aumentar n, pero es bastante difícil hallar una ley exacta para la variación de N. Observando la columna derecha de la tabla, podemos suponer que la razón $\frac{N}{n}$ tiende a un número determinado cuando crece n.

Mediante la interpretación geométrica demostraremos en seguida que, en efecto, la razón $\frac{N}{n}$ tiende al conocido número $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Consideremos el par de números (x,y) como un punto en el plano (con abscisa x y ordenada y). La desigualdad $x^2 + y^2 \leq n$ expresa que el punto (x, y) pertenece al círculo K_n con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{n}$.



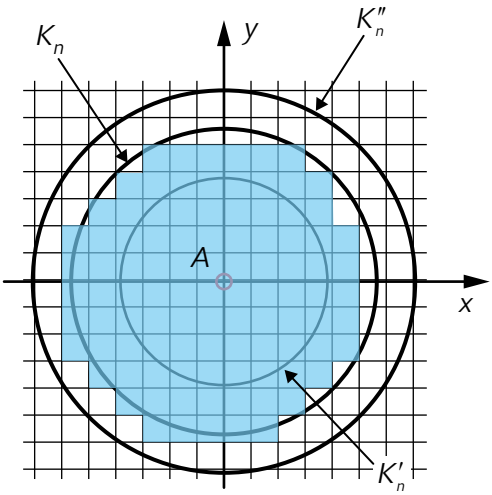
en la cual se ha considerado $n = 31$. Por lo tanto, nuestra inecuación tiene tantas soluciones en números enteros, como puntos con coordenadas enteras estén contenidos en el interior del círculo K_n o en su contorno.

Es geométricamente evidente que los puntos con coordenadas enteras "están uniformemente distribuidos en el plano" y que en una unidad de área está contenido un solo punto. Por esto queda claro que el número de soluciones debe ser aproximadamente igual al área del círculo. Así, pues, obtenemos la fórmula aproximada:

$$N \approx \pi n.$$

He aquí una demostración abreviada de esta fórmula. Dividamos el plano, por medio de rectas paralelas a los ejes de coordenadas, en pequeños cuadrados unitarios y supongamos que los puntos correspondientes a los números enteros son los vértices de estos cuadrados. Supongamos que en el interior del círculo K_n resultaron N

puntos de los números enteros (para abreviar, llamaremos puntos enteros a aquellos cuyas coordenadas son números enteros); a cada uno de estos puntos le hacemos corresponder el cuadradito unitario para el cual el punto considerado es el vértice superior derecho. Designemos con A_n la figura formada por estos pequeños cuadrados.



Es evidente que el área de A_n es igual a N (es decir, al número de cuadraditos que componen esta figura).

Comparemos el área de esta figura con el área del círculo K_n. Veamos simultáneamente con el círculo K_n, otros dos círculos con centro en el origen de coordenadas: el círculo K'_n de radio $\sqrt{n}-\sqrt{2}$ y el círculo K''_n de radio $\sqrt{n}+\sqrt{2}$. La figura A_n está totalmente contenida en el círculo K'_n y comprende en su interior al círculo K''_n (demuestre esto aplicando el teorema: "En un triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de los otros dos").

Por esto, el área de A_n es mayor que el área de K'_n y menor que el área de K''_n, es decir,

$$\pi\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}\right)^2 < N < \pi\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)^2.$$

De esto se deduce nuestra fórmula de aproximación $N \approx \pi n$, con la estimación del error:

$$\left|N-\pi n\right| < 2\pi\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Estudiemos ahora un problema similar, pero con tres incógnitas. ¿Cuántas soluciones en forma de números enteros tiene la inecuación $x^2 + y^2 + z^2 \le n$?

Si aplicamos de nuevo la interpretación geométrica, la respuesta se obtiene inmediatamente. El número de soluciones enteras es aproximadamente igual al volumen de una esfera de radio $\sqrt{n}$, es decir $\frac{4}{3}\pi n\sqrt{n}$. Sería difícil obtener este resultado por medios puramente algebraicos.

3b. Es necesario introducir el espacio de cuatro dimensiones

¿Cómo proceder si se necesita encontrar el número de soluciones en forma de números enteros de la inecuación

$$x^2 + y^2 + z^3 + t^2 \le n,$$

la cual contiene cuatro incógnitas?

Cuando resolvíamos este problema para dos y tres incógnitas aplicábamos una interpretación geométrica. La solución de la inecuación con dos incógnitas, o sea, el par de números, se interpretaba como un punto en el plano; la solución de la inecuación con tres incógnitas, o sea, el conjunto de tres números, como un punto en el espacio.

¿Se podrá seguir aplicando este procedimiento? En ese caso, sería necesario considerar a los cuatro números (x, y, z, u) como un punto de un espacio que tiene cuatro dimensiones (de un espacio de cuatro dimensiones). Entonces se puede considerar que la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le n$ implica que el punto (x, y, z, t) está contenido en el interior de una esfera de cuatro dimensiones con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{n}$. Después sería necesario dividir el espacio de cuatro dimensiones en cubitos de cuatro dimensiones y, finalmente, necesitaríamos calcular el volumen de una esfera de cuatro dimensiones. En otras palabras, debíamos comenzar a desarrollar la geometría del espacio de cuatro dimensiones.

Al menos por ahora no nos ocuparemos de la deducción de la fórmula para calcular el volumen de una esfera de cuatro dimensiones; sin embargo, daremos su fórmula, el volumen de una esfera de cuatro dimensiones es igual a $\frac{\pi^2 R^4}{2}$. Para comparar, señalemos además que el volumen de la esfera de cinco dimensiones es igual a $\frac{8\pi^2 R^5}{15}$, el de seis dimensiones es igual a $\frac{\pi^3 R^6}{6}$, el de siete, es igual a $\frac{16\pi^3 R^7}{107}$.

Por el momento, solo entreabriremos un poco la puerta del espacio de cuatro dimensiones y presentaremos en él la figura más simple del cubo de cuatro dimensiones.

Por supuesto, nos interesan las siguientes preguntas: ¿hasta qué punto se puede hablar seriamente de este espacio imaginario de cuatro dimensiones? ¿Hasta dónde se puede desarrollar una geometría de este espacio, similar a la geometría corriente, y cuáles serán las similitudes y diferencias entre la geometría tridimensional y la de cuatro dimensiones?

Al estudiar estas preguntas los matemáticos obtuvieron las siguientes respuestas: sí, es posible desarrollar una geometría tal que en muchos aspectos se parezca a la geometría corriente. Además, esta geometría comprende de la geometría corriente como una parte integrante de ella, así como la estereometría (la geometría del espacio) contiene a la planimetría. Por supuesto, la geometría de cuatro dimensiones tendrá muchas diferencias esenciales con la geometría corriente.

Algunas singularidades muy interesantes del mundo de cuatro dimensiones las narraba en uno de sus relatos el escritor de novelas de ficción científica Herbert G. Wells.

Pero ahora demostraremos que en realidad estas singularidades se parecen mucho a aquellas que diferencian la geometría del espacio tridimensional de la geometría del espacio bidimensional.

4b. Singularidades del espacio de cuatro dimensiones

Dibuje un círculo en el plano y figúrese que es un ser imaginario del mundo bidimensional, que puede moverse por el plano, pero no tiene derecho a salir al espacio (inclusive, no sabe que existe el espacio y, por lo tanto, no puede imaginárselo). De tal modo que el contorno del

círculo, la circunferencia, le será una barrera invencible y no podría salir del círculo, porque la circunferencia en todas partes le cerrará el paso.

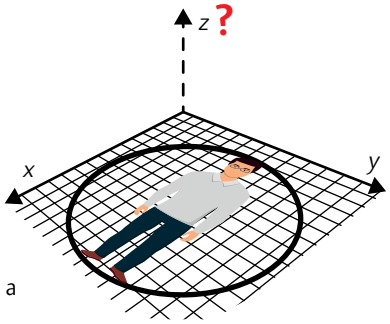


Figura a

Imagínese ahora que este plano, con el círculo dibujado, se introduce en un espacio tridimensional y que puede intuir la existencia de la tercera dimensión; por supuesto, ahora sin ninguna dificultad saldrá de los límites del círculo, por ejemplo, simplemente, atravesará la circunferencia.

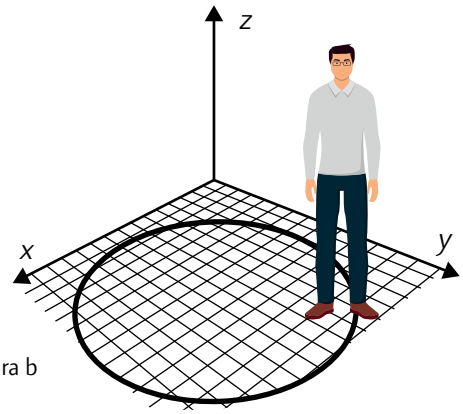


Figura b

Supongamos que ahora es un ser del mundo tridimensional y que se encuentra en el interior de una esfera, cuya frontera es impenetrable; entonces, no podrá salir de los límites de esta esfera. Pero si la esfera está situada en un espacio de cuatro dimensiones y captó la existencia de esta cuarta dimensión, entonces sin ningún esfuerzo podrá salir de los límites de la esfera.

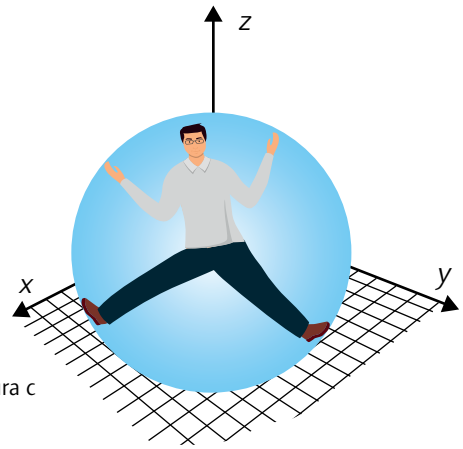


Figura c

En esto no hay nada particularmente místico, sino que sencillamente la frontera de la esfera tridimensional no divide en dos partes el espacio de cuatro dimensiones, a pesar de que divide el espacio tridimensional. Esto es absolutamente análogo al caso de la frontera del círculo (la circunferencia), la cual no divide en dos partes el espacio tridimensional, a pesar de que divide el plano (al cual ella pertenece).

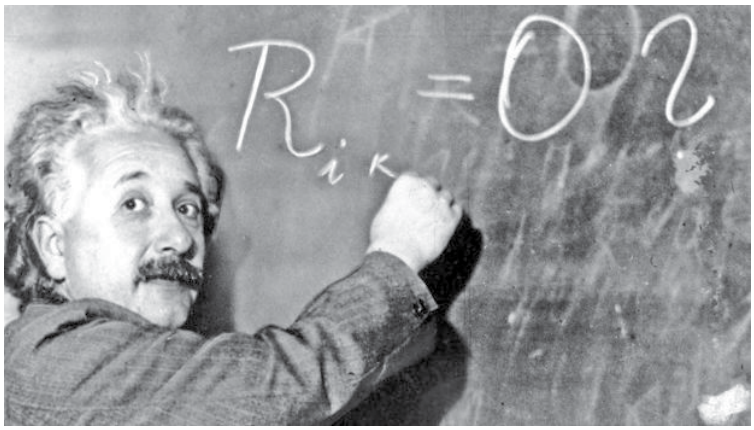
He aquí otro ejemplo: es evidente que no se pueden hacer coincidir dos figuras simétricas entre sí en el plano, si solo se pueden mover sin salirse de los límites del plano. Sin embargo, una mariposa en reposo puede plegar las alas, haciéndolas salir del plano horizontal al vertical. Así mismo, no se pueden hacer coincidir en el espacio tridimensional figuras simétricas espaciales. Por ejemplo, ya puede dar las vueltas que quiera a un guante izquierdo, no lo convertirá en derecho, a pesar de ser figuras geométricas iguales.

Sin embargo, las figuras simétricas tridimensionales se pueden hacer coincidir en un espacio de cuatro dimensiones del mismo modo que se hacen coincidir las figuras simétricas planas si se ponen en un espacio tridimensional.

Por esto, no tiene nada de asombroso que el héroe del relato antes mencionado de Wells, después de su viaje por el espacio de cuatro dimensiones, resultara totalmente cambiado, pero en forma simétrica consigo mismo; por ejemplo, el corazón le resultó a la derecha. Esto sucedió porque al salir al espacio de cuatro dimensiones se volvió al lado contrario (en forma similar, el guante izquierdo se transformaría en el derecho si se le volviera al revés).

5b. Algo interesante sobre física

La geometría de cuatro dimensiones resultó ser un aparato extraordinariamente útil e insustituible en la física moderna. Sin el aparato de la geometría imaginaria de varias dimensiones sería muy difícil explicar y aplicar una rama tan esencial de la física moderna como es la teoría de la relatividad de Albert Einstein.



Cualquier matemático puede envidiar a Minkowski, quien después de aplicar con tanto éxito la geometría a la teoría de los números supo nuevamente aclarar dificilísimos problemas matemáticos referentes a la teoría de la relatividad, por medio de consideraciones geométricas intuitivas. Uno de los fundamentos de la teoría de la relatividad es el concepto de la unión inquebrantable del espacio y del tiempo. Por esto, es propio considerar el momento de tiempo en el cual ha transcurrido algún suceso como la cuarta coordenada de este suceso junto con las tres primeras que determinan el punto del espacio en el que tiene lugar este suceso.

El espacio de cuatro dimensiones obtenido se llama *espacio de Minkowski*. Hoy en día, un curso cualquiera de teoría de la relatividad comienza con una descripción de este espacio. El descubrimiento de Minkowski consiste en que las fórmulas básicas de la teoría de la relatividad, *las fórmulas de Lorentz*, expresadas en el lenguaje de las coordenadas de este espacio de cuatro dimensiones, son extraordinariamente simples.

De este modo, para la física moderna fue una gran suerte que, cuando se descubrió la teoría de la relatividad, los matemáticos ya hubieran preparado la geometría de varias dimensiones, un aparato cómodo, compacto y bello, el cual en muchos casos simplifica considerablemente la resolución de problemas.

El espacio de cuatro dimensiones

Finalmente, como habíamos prometido, le contaremos algo de la geometría del espacio de cuatro dimensiones.

Cuando construimos la geometría de la recta, del plano y del espacio tridimensional tenemos dos alternativas: exponer el material mediante representaciones intuitivas (este procedimiento es característico en el curso escolar, por lo cual es difícil imaginarse un texto de geometría sin dibujos), o exponerlo analíticamente (el método de coordenadas nos da esta posibilidad), llamando, por ejemplo, en el curso de planimetría, al punto del plano, *par de números* (las coordenadas de este punto) y al punto del espacio, *un conjunto de tres números*.

Cuando se introduce el espacio de cuatro dimensiones, la primera posibilidad no existe. No podemos emplear directamente representaciones geométricas intuitivas, pues el espacio sensible que nos rodea solo tiene tres dimensiones; sin embargo, tenemos abierto el segundo camino.

En efecto, hemos definido el punto de la recta como un número, el punto del plano como un par de números y el punto del espacio tridimensional como un conjunto de tres números. Por esto, es absolutamente propio construir la geometría del espacio de cuatro dimensiones definiendo el punto de este espacio imaginario como un conjunto de cuatro números.

Se deberá comprender por figura geométrica en tal espacio a un cierto conjunto de puntos (por cierto, igual que en el caso de la geometría corriente). En el próximo número de *Leñitas Geométricas* precisaremos algunas definiciones.

C. LA VISUALIZACIÓN ISOMÓRFICA EN EL UNIVERSO DE MINKOWSKI

Aventuras posibles en el ámbito del algebra lineal

(Continúa de *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época, Sección C)

13. Medida de ángulos en el plano seudoeuclídeo

La representación de las magnitudes de los ángulos en el plano seudoeuclídeo tenemos que desarrollarla partiendo de la definición analítica general de ángulo entre vectores por la fórmula (1.30) en *Leñitas Geométricas*

$$\cos\left(\widehat{a,b}\right)=\frac{\langle a,b\rangle}{\sqrt{\langle a,a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle}}.$$

Para tropezar inmediatamente con el carácter extraordinario de las nuevas representaciones, vamos a aplicar esta fórmula a un vector no isótropo cualquiera

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0,$$

y al vector isótropo

$$q_0^+ = e_1 + e_2:$$

$$\cos\left(\widehat{a, q_0^+}\right) = \frac{\left\langle a, q_0^+ \right\rangle}{|a| \cdot |q_0^+|} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cdot 0} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{0} = \infty$$

(aquí $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ en virtud de la condición de no isotropía $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ del vector a). El resultado obtenido destruye las limitaciones acostumbradas que se imponen al valor del coseno de un ángulo en el plano euclídeo propio ($-1 \leq \cos(\widehat{a,b}) \leq 1$).

Se comprende que esta infracción de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski proviene de la resignación del 4° axioma del producto escalar de vectores [véase (1.33) en *Leñitas Geométricas* 6, 3ª época]. Al prescindir de la condición del 4° axioma acordamos analizar vectores cuya longitud se expresa no solo con números reales, sino también con imaginarios, lo cual, como es natural, introduce cambios en el carácter de la medida de los ángulos y en las funciones trigonométricas del ángulo.

Al salirnos de ese modo de los límites del conjunto de los números reales, tendremos que tomar en consideración las funciones de argumento complejo. En la teoría de las funciones de variable compleja se estudia la prolongación analítica de las funciones trigonométricas en la región de los números complejos y se demuestra que en esta región se conservan las relaciones principales entre las funciones trigonométricas de argumento real.

La prolongación indicada se expresa por medio de las conocidas fórmulas de Euler:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \operatorname{sen} z,$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \cdot \operatorname{sen} z, \qquad (2.34)$$

en las que $z = (x; y) = x + iy$ es cualquier número complejo; x e y son números reales, e $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Sumando las ecuaciones (2.34) entre sí, obtenemos la expresión del coseno del argumento complejo mediante la función exponencial

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (2.35)$$

En el caso general, el coseno del argumento complejo toma valores expresados por números complejos, pero en dos casos particulares el coseno toma solo valores reales. El primer caso es cuando el argumento del coseno es un número real ($z = (x; 0) = x$). Esta es la función real cos x que todos conocemos.

El segundo caso es aquel en que el argumento del coseno es un número imaginario. Haciendo la sustitución $z = (0; y) = iy$ en (2.35), se obtiene

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \qquad (2.36)$$

Las funciones exponenciales e^y y e^{-y} del argumento real toman solamente valores reales; por consiguiente, el coseno del argumento imaginario cos (iy) toma también valores solamente reales. En este caso $\cos(iy) \to \infty$ cuando $y \to \pm\infty$. Por lo tanto, el resultado $\cos\left(\widehat{a, q_0^+}\right) = \infty$ no carece de sentido desde el punto de vista de la matemática. Es más, permite enunciar dos hipótesis que necesitan ser confirmadas.

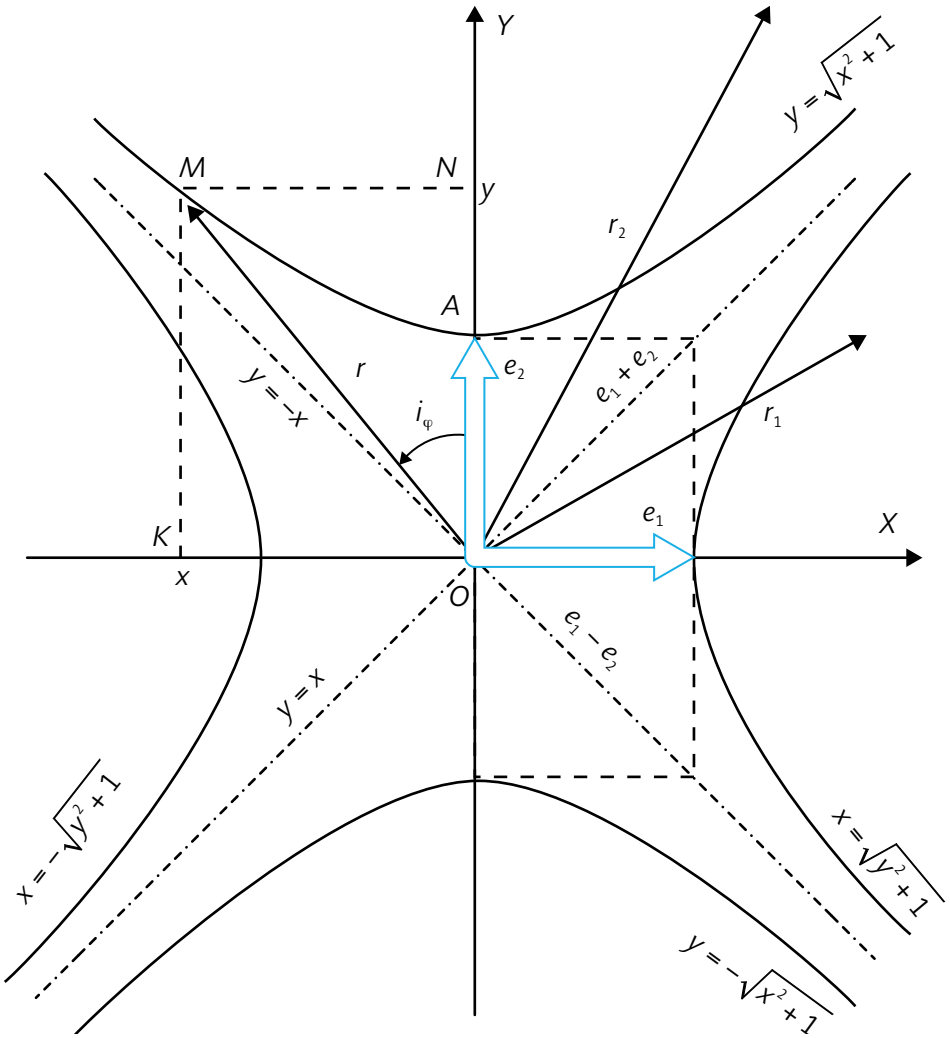
Primera, la magnitud de un ángulo en el plano seudoeuclídeo se expresa, por lo visto, con un número imaginario.

Segunda, esta magnitud puede tener un valor finito determinado solo para los vectores pertenecientes a un mismo sector, ya que si los vectores a y b pertenecen a sectores distintos hay entre ellos, por lo menos, una isótropa, con la cual cada uno de los vectores forma un ángulo infinito. A propósito, conviene advertir que el coseno del ángulo entre dos direcciones isótropas q_0^+ y q_0^- del plano seudoeuclídeo [véase (2.25) en *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época] también es infinito:

$$\cos\left(\widehat{q_0^+, q_0^-}\right) = \frac{\langle e_1 - e_2; e_1 + e_2 \rangle}{|q_0^-| \cdot |q_0^+|} = \frac{\langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_2, e_2 \rangle}{0 \cdot 0} = \frac{1 - (-1)}{0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Por ahora vamos a limitarnos al sector superior del plano seudoeuclídeo. (Recordemos la figura siguiente del número anterior de *Leñitas Geométricas*). El ángulo entre el versor e_2 y cualquier radio vector r perteneciente a dicho sector

$r = xe_1 + ye_2,\ x^2 - y^2 < 0,\ y > 0$



se determina por la relación

$$\cos\left(\widehat{e_2,r}\right) = \frac{\langle e_2, xe_1 + ye_2\rangle}{|e_2|\cdot|r|} = \frac{x\langle e_2,e_1\rangle + y\langle e_2,e_2\rangle}{i\cdot\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x\cdot 0 + y\cdot(-1)}{i\cdot\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{-y}{i\cdot\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{iy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

La última expresión muestra que en el plano seudoeuclídeo el coseno del ángulo tiene el mismo sentido geométrico que en el plano euclídeo propio.

Efectivamente, en el triángulo OMN de la figura de análisis, los lados $\overline{MN}$ y $\overline{ON}$ son perpendiculares entre sí en sentido seudoeuclídeo (puesto que $\overline{MN}$ es paralelo al versor e_1 y $\overline{ON}$ es paralelo al versor e_2) y pueden llamarse *catetos*. La longitud del cateto $\overline{ON}$, perteneciente al ángulo $\widehat{NOM} = \widehat{e_2,r}$, se expresa con el número imaginario iy, y la longitud de la hipotenusa $\overline{OM}$ es el imaginario $|r| = \sqrt{x^2-y^2} = |\overline{OM}|$ (en el sector superior $x^2 - y^2 < 0$). La relación de estas longitudes es un número real, igual al coseno del ángulo $\widehat{ONM}$:

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OM}|} = \frac{iy}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{iy}{i\cdot\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} = \cos\left(\widehat{e_2,r}\right). \qquad (2.37)$$

Si el vector r es colineal del versor e_2 ($r = ye_2$, $x = 0$), el $\cos\left(\widehat{e_2,r}\right) = 1$. Pero si el vector r no es colinear del versor e_2, es decir, si $x \neq 0$, entonces $\sqrt{x^2-y^2} < y$, y el coseno del ángulo $\widehat{e_2,r}$ es mayor que la unidad. Este coseno tiende a infinito cuando $x^2 \to y^2$, es decir, cuando la dirección del vector r tiende a una de las direcciones isótropas. Subrayamos el notable sentido geométrico del hecho de que el coseno de un ángulo en el plano seudoeuclídeo sea mayor que la unidad. Eso significa que **la magnitud de la proyección de un segmento es mayor que la longitud del propio segmento proyectado.**

La magnitud del ángulo $\widehat{e_2,r}$, desde el punto de vista analítico, no es más que el argumento de la función $\cos\left(\widehat{e_2,r}\right)$. Esta función, de acuerdo con (2.37), toma cualesquiera valores reales del intervalo $[1; +\infty[$,

exactamente igual que el coseno del argumento imaginario [véase (2.36)]. Ahora hay que aclarar el contenido geométrico de la medida del ángulo en el plano seudoeuclídeo.

En el plano euclídeo propio la magnitud de un ángulo se determina valiéndose de una circunferencia de radio R arbitrario, cuyo centro se encuentra en el vértice del ángulo. Como magnitud del ángulo φ se toma la razón entre la longitud l del arco de circunferencia que comprenden sus lados y el radio de dicho arco: $\varphi = \frac{l}{R}$. Veamos a qué conduce el intento de determinar por un procedimiento análogo la magnitud del ángulo en el plano seudoeuclídeo.

Como se demostró en el apartado **12**, un radio trazado a cualquier punto de una circunferencia seudoeuclídea es perpendicular a la tangente de la circunferencia en dicho punto. Los radios de todos los puntos de una rama de la circunferencia seudoeuclídea pertenecen a un mismo sector. Supongamos, por ejemplo, que este sea el sector superior y, por lo tanto, $|r|$ será un número imaginario.

En este caso las tangentes a la circunferencia en todos los puntos de esta rama serán rectas pertenecientes a los sectores reales (en virtud de su perpendicularidad a los radios imaginarios). La longitud de cada segmento de tangente y del pequeño trozo de arco adyacente a ella se expresará con un número real. Por consiguiente, la longitud de una parte cualquiera de la rama superior de la circunferencia seudoeuclídea también será real. La razón entre la longitud del arco de circunferencia, comprendido entre dos radios cualesquiera del sector superior, y la longitud del radio de dicho arco, será un número imaginario.

Para las ramas reales de la circunferencia, al contrario, la longitud del radio se expresará con un número real y la longitud del arco de circunferencia, con un número imaginario. La razón de estas longitudes será también un número imaginario.

De este modo, el lado cualitativo del problema lo hemos aclarado: si el ángulo entre los vectores del plano seudoeuclídeo se mide por la razón entre la longitud del arco comprendido entre ellos y el radio, la magnitud del ángulo se expresará con un número imaginario. Esto confirma la conclusión antes hecha, de que la magnitud del ángulo tiene valor finito determinado solo dentro de los límites de un sector, ya que la circunferencia seudoeuclídea tiene puntos de discontinuidad en las isótropas, que pasan por su centro, y ellas son las que dividen el plano en sectores.

Queda por examinar el problema desde el lado cuantitativo: ¿concuerda esta interpretación geométrica de la magnitud del ángulo con la continuación analítica (2.36) del coseno en la región de los valores imaginarios del argumento y con el sentido geométrico del coseno del ángulo como razón de la longitud del cateto adyacente a la longitud de la hipotenusa?

El pequeño elemento de arco de circunferencia seudoeuclídea que se confunde con el trozo de tangente se puede representar mediante la diferencial del radio vector (véase apartado **12**)

$$dr = e_1 dx + e_2 dy,$$

cuya longitud es

$$|dr| = |dl| = \sqrt{\langle dr, dr \rangle} = \sqrt{dx^2 - dy^2} \qquad (2.38)$$

Tomamos, para concretar, la rama superior de la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

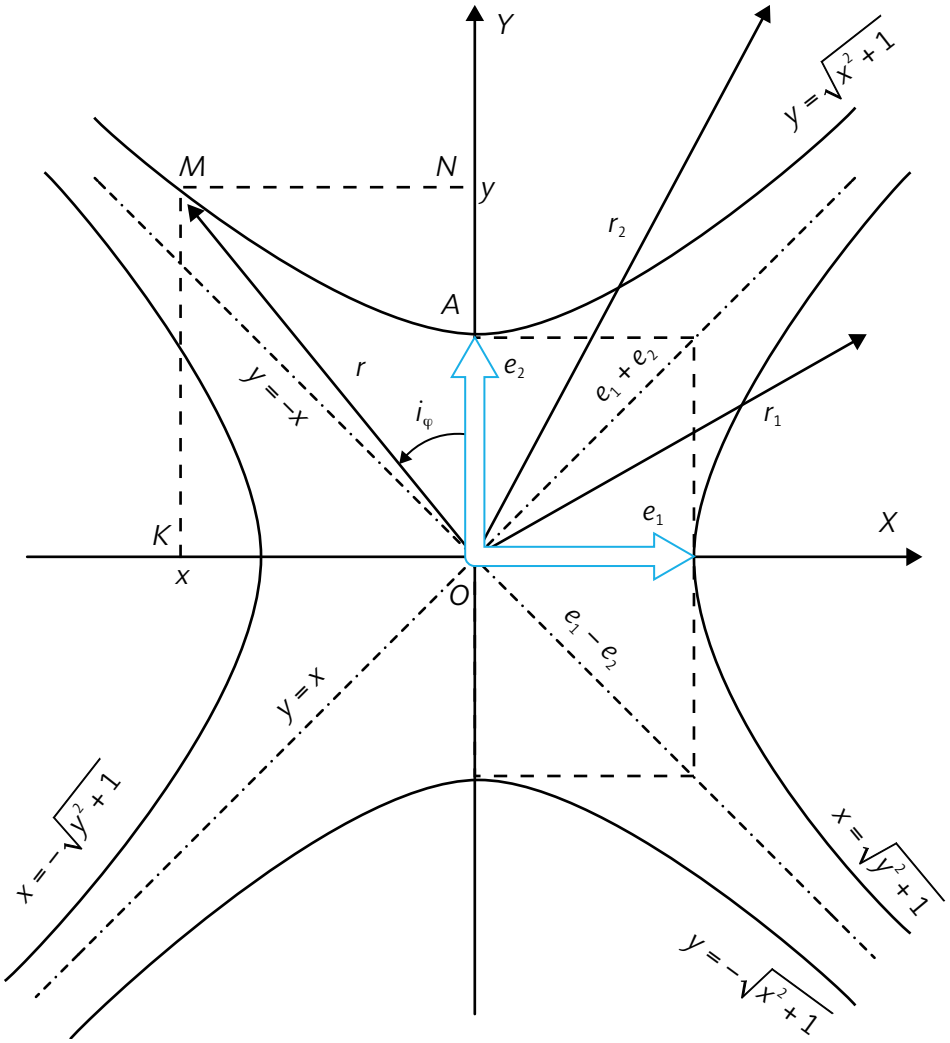
[que se obtiene de (2.30) cuando $y > 0$], y hallamos para ella la diferencial dy de la ordenada correspondiente al incremento dx de la abscisa:

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (2.38), obtenemos

$$dl = \sqrt{dx^2 - dy^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}\right) dx^2} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Consideremos el arco $\overset{\frown}{AM}$ de la circunferencia unitaria seudoeuclídea, veamos nuevamente la figura de análisis:



El punto A de intersección de la rama superior de la circunferencia con el eje $\overrightarrow{OY}$ tiene las coordenadas (0; 1), y un punto arbitrario M de esta rama, las coordenadas $(x; y)$. La longitud del arco $\overset{\frown}{AM}$ la calculamos por integración:

$$l_{\overset{\frown}{AM}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_0^x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| = \ln|x+y|$$

Como el radio del arco $\overset{\frown}{AM}$ es $|e_2| = i$, la magnitud del ángulo $\overset{\frown}{AOM}$ debe venir expresada por un número imaginario:

$$\overset{\frown}{AOM} = \frac{\ln|x+y|}{i} = -i\cdot ln|x+y| = i\varphi$$

donde con la letra φ se ha designado la magnitud real

$$\varphi = -ln|x+y| \qquad (2.39)$$

que de por sí no tiene sentido geométrico de ángulo.

El coseno del ángulo $\overset{\frown}{AOM}$ se puede hallar partiendo del triángulo OMN. Como $\overline{OM}$ es el radio de la circunferencia unitaria seudoeuclídea (en su rama superior), será $\overline{OM} = |e_2| = i$, y por la fórmula (2.37) hallamos

$$\cos(i\varphi) = \cos(e_2, r) = \frac{|ON|}{|OM|} = \frac{iy}{i} = y$$

De este modo, si de la relación (2.39) obtenemos la expresión de la ordenada y del punto M mediante el parámetro real φ, esto nos da la expresión buscada del coseno del ángulo imaginario mediante la magnitud de dicho ángulo.

Potenciamos la igualdad logarítmica (2.39):

$$e^{\varphi} = \frac{1}{|x+y|} \qquad (2.40)$$

Para todos los puntos de la circunferencia seudoeuclídea con centro en el origen de coordenadas se cumple la condición $|x+y|>0$, ya que entre ellos no hay puntos pertenecientes a la recta isótropa $y=-x$.

En la rama superior, además, $y>0$ e $|y|>|x|$. Por lo tanto

$$|x+y|=x+y$$

y la relación (2.40) se puede representar en la forma

$$e^{\varphi}=\frac{1}{x+y} \tag{2.41}$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{e^{\varphi}}=e^{-\varphi}=x+y \tag{2.42}$$

Calculamos la suma

$$e^{\varphi}+e^{-\varphi}=\frac{1}{x+y}+x+y=\frac{1+(x+y)^2}{x+y}=\frac{1+x^2+2xy+y^2}{x+y}=\frac{y^2+2xy+y^2}{x+y}=\frac{2y(x+y)}{x+y}=2y$$

En esta transformación hemos utilizado la ecuación (2.30) de las ramas imaginarias de la circunferencia

$$y^2=x^2+1.$$

De esta forma, obtenemos

$$\cos(i\varphi)=y=\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \tag{2.43}$$

Si se quiere tener la expresión del coseno mediante la magnitud imaginaria $i\varphi$ del ángulo, se puede escribir (2.43) en la forma

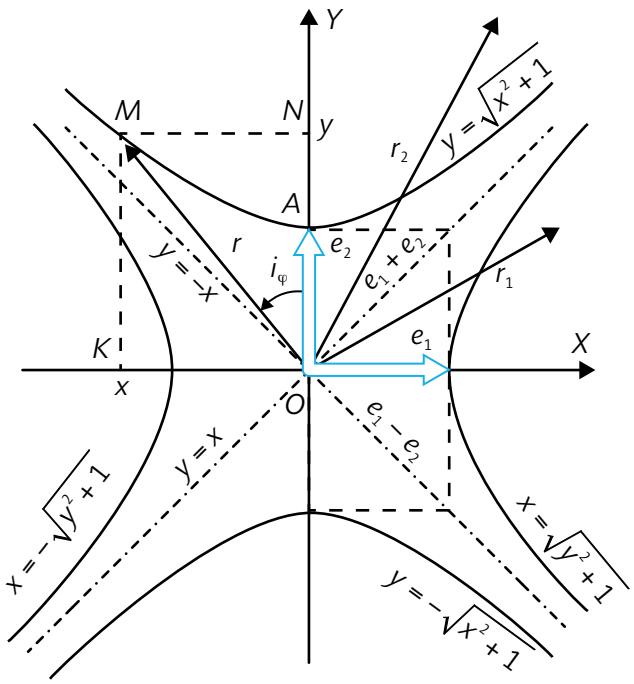
$$\cos(i\varphi)=y=\frac{e^{-i(i\varphi)}+e^{i(i\varphi)}}{2}$$

La fórmula (2.43), obtenida de los razonamientos geométricos, ha coincidido con la prolongación analítica del coseno en la región de los valores imaginarios del argumento [véase (2.36)]. Con esto se justifica la medida de los ángulos en el plano seudoeuclídeo por la razón de la longitud del arco de circunferencia al radio, de un modo análogo a como se acostumbra a medir el ángulo en el plano euclídeo propio.

Recurriendo a la relación (2.39), vamos a esclarecer qué valores puede tomar el ángulo $i\varphi$ entre el versor básico e_2 y cualquier radio vector del sector superior. Como quiera, la función logarítmica real toma valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el ángulo $i\varphi$ se puede expresar respectivamente, por cualquier número imaginario

$$-i\infty<i\varphi<+i\infty.$$

Si el punto $M(x;\,y)$ se aproxima en la rama superior de la circunferencia (volvamos nuevamente a la figura de análisis)



a la recta isótropa $y = x$ entonces

$$|x+y| \to \infty \text{ y } \ln|x+y| \to +\infty .$$

En este caso

$$\varphi = -\ln|x+y| \to -\infty .$$

De este modo, el ángulo entre el versor e_2 y el radio vector del segmento superior, que se aproxima a la isótropa $y = x$, se expresa por un número imaginario negativo que tiende a $-i\infty$. Por el contrario, si el punto $M(x; y)$ se aproxima, siguiendo la rama superior de la circunferencia, a la isótropa $y = -x$, entonces

$$|x+y| \to 0, \ln|x+y| \to -\infty .$$

Por lo tanto,

$$\varphi = -\ln|x+y| \to +\infty$$

y el ángulo $i\varphi$ se expresará por un número imaginario positivo que tenderá a $+\infty$ El ángulo entre la recta isótropa misma y el versor e_2 no tiene valor numérico determinado (se convierte en $-i\infty$ o en $+i\infty$). Es más, como el ángulo entre cualquier vector no isótropo del sector superior y el versor e_2 se expresa por medio de un número imaginario finito, se llega a la conclusión de que cualquier vector no isótropo de este sector forma un ángulo infinito con cada una de las direcciones isótropas.

Repitiendo los razonamientos sobre la medida de los ángulos (como vimos recientemente más arriba) para la rama derecha

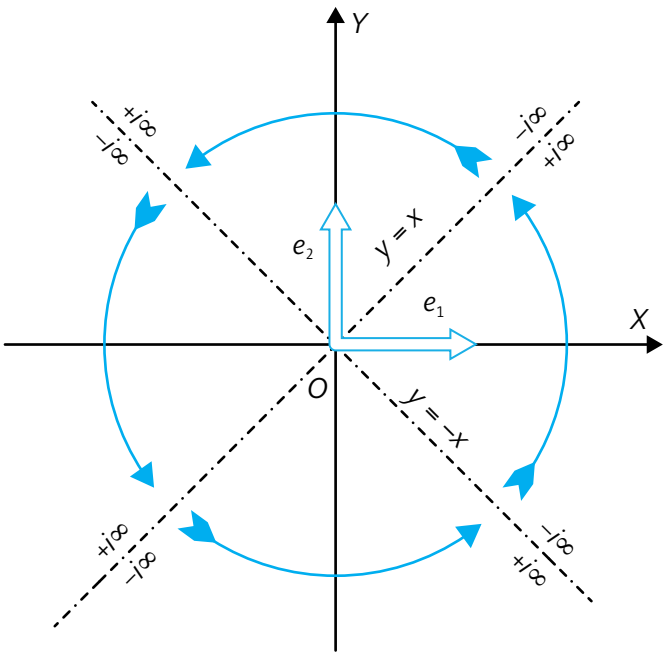
$$x = \sqrt{y^2+1}$$

de la circunferencia unitaria [véase (2.29) *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época], llegamos a la expresión

$$\varphi = +\ln|x+y| ,$$

que significa que el ángulo entre el versor e_1 y un radio vector del sector derecho que se aproxime a la isótropa $y = x$ es positivo, y el ángulo medido desde e_1 en dirección a la isótropa $y = -x$ es negativo.

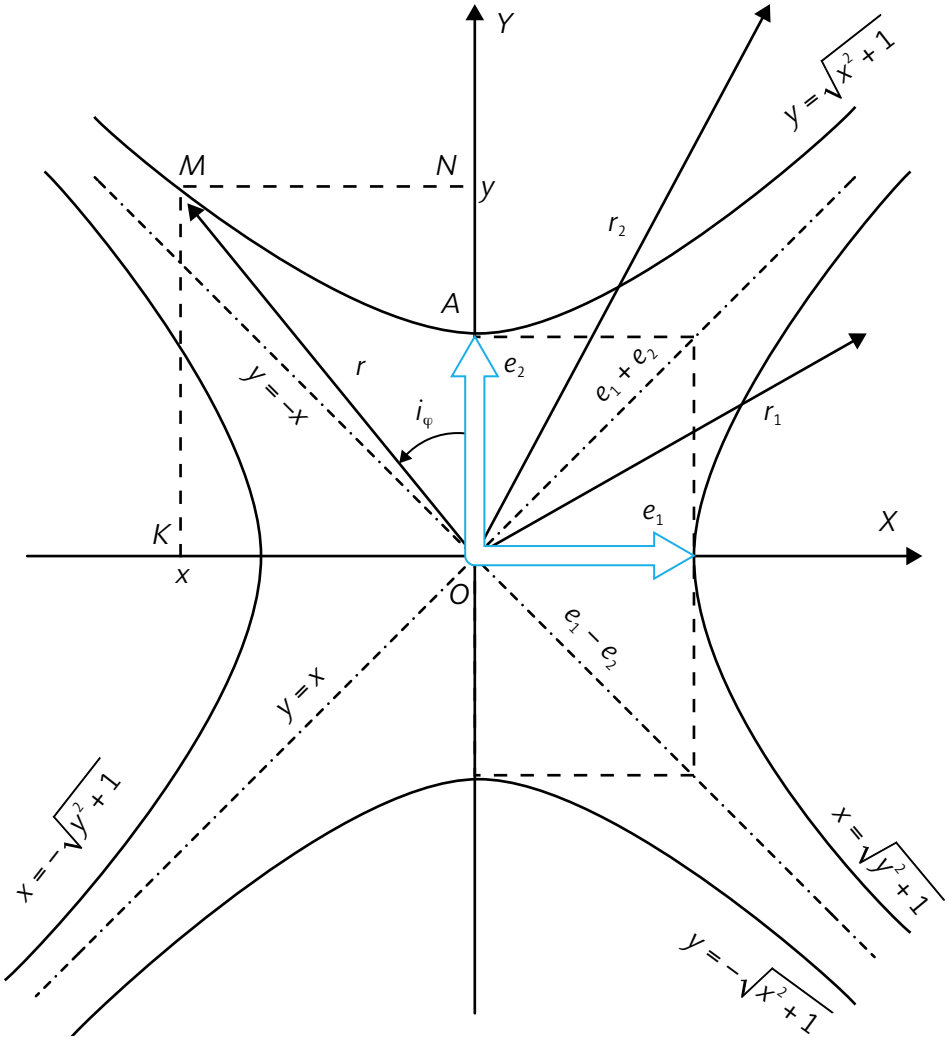
El diagrama de la figura



ilustra la dirección positiva y los intervalos de medidas de los ángulos en los cuatro sectores del plano seudoeuclídeo.

En todo el plano la dirección positiva de medición de los ángulos coincide con la dirección del giro más corto desde el primer vector básico hacía el segundo (durante el giro más corto, en ninguno de los estados intermedios se hace colineal el primer vector con el segundo).

Aunque en el plano seudoeuclídeo se puede construir un triángulo con dos lados perpendiculares entre sí (véase el triángulo *ONM* en la figura de análisis), a ese triángulo no se le puede llamar rectángulo, porque la relación de perpendicularidad en el plano seudoeuclídeo, en general, no está ligada con una magnitud determinada del ángulo, ya que las rectas perpendiculares entre sí pertenecen a sectores distintos. Tampoco tiene una magnitud determinada el ángulo entre la hipotenusa $\overline{OM}$ y el cateto $\overline{NM}$, porque pertenecen también a sectores diferentes. En el triángulo *ONM* de la figura de análisis, solo tiene valor determinado el ángulo $\widehat{NOM}$ entre los lados $\overline{ON}$ y $\overline{OM}$, que pertenecen a un mismo sector.



No obstante, el triángulo con dos lados perpendiculares en el plano seudoeuclídeo –al construir las funciones trigonométricas del ángulo– desempeña el mismo papel que el triángulo rectángulo en el plano euclídeo propio.

Ya hemos visto que para el coseno del ángulo en el plano seudoeuclídeo sigue siendo correcta su definición geométrica como razón entre la longitud del cateto adyacente y la longitud de la hipotenusa. Ahora vamos a demostrar que la razón entre la longitud del cateto opuesto y la longitud de la hipotenusa es el seno del ángulo en el plano seudoeuclídeo, puesto que coincide con la prolongación analítica de la función seno en la región de los valores imaginarios del argumento.

De la fórmula de Euler (2.34) hallamos

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \cdot \operatorname{sen} z\,, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.44}$$

Creemos que con este material las Secretarías Regionales de la Olimpiada podrán organizar **Festivales de Problemas** e invitar a los alumnos del profesorado y exolímpicos al desafío de encontrar más Leñitas Geométricas para el espectáculo.

Para los valores imaginarios del argumento $z = (0; y) = iy$ la fórmula (2.44) toma la forma

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-1(iz)}}{2} = -i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \qquad (2.45)$$

De acuerdo con (2.45), el seno del argumento imaginario tiene valores imaginarios, los cuales pueden ser positivos (para los valores positivos de y), negativos (para $y > 0$) o nulos (cuando $y < 0$). Al considerar la definición geométrica del seno hay que tener en cuenta esta variabilidad de su signo.

En el triángulo NOM de la figura de análisis, la hipotenusa $\overline{OM}$ es el radio de la rama superior de la circunferencia unitaria y, por eso, tiene la longitud $|\overline{OM}| = i$. La longitud del cateto $\overline{NM}$ opuesto al ángulo $i\varphi$ se expresa por el número real $|\overline{NM}| = |x|$. Por lo tanto, la magnitud absoluta del seno del ángulo $i\varphi$ es igual a la razón

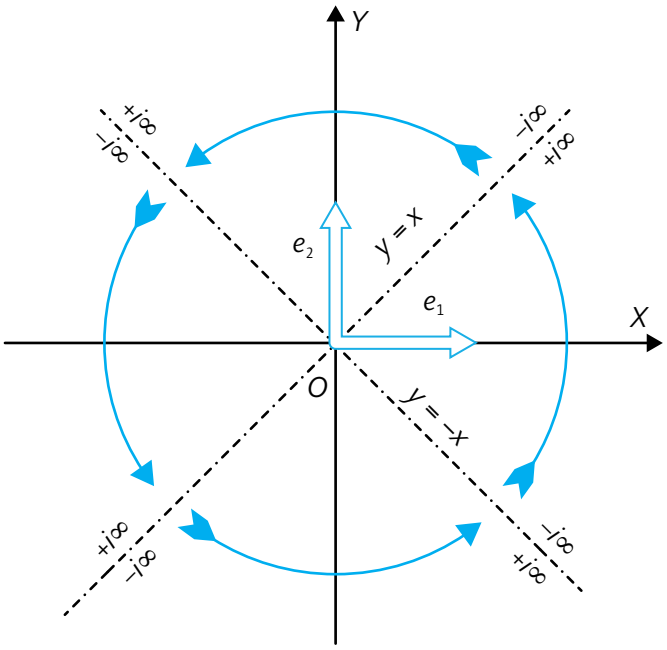
$$\frac{|\overline{NM}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|x|}{i} = -i|x| \qquad (2.46)$$

Si el punto M tiene la abscisa x positiva, el ángulo $\widehat{AOM}$ se expresa por el número imaginario negativo $i\varphi$ y, por consiguiente, el parámetro real φ es negativo. En este caso [véase (2.45)], la magnitud

$$i\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

también será negativa. Por lo tanto, para que la razón del cateto opuesto a la hipotenusa represente no solo la magnitud absoluta, sino también el signo del seno, en (2.46) hay que tomar la abscisa x con su signo, omitiendo la designación de módulo.

Entonces, para los ángulos positivos $i\varphi > i \cdot 0$,



la abscisa x del punto M será negativa y sen $(i\varphi)$ tomará un valor positivo en completo acuerdo con (2.45). Así, pues, la definición geométrica del seno del ángulo $\widehat{AOM} = \widehat{NOM}$ en el triángulo NOM de la figura de análisis debe ser la siguiente:

$$\operatorname{sen}(i\varphi) = \operatorname{sen}\left(\widehat{e_2, r}\right) = \frac{x}{i} = -ix \qquad (2.47)$$

La expresión de la abscisa x mediante el parámetro real φ la hallamos partiendo de las igualdades (2.41) y (2.42):

$$e^{\varphi} - e^{-\varphi} = \frac{1}{x+y} - 1(x+y) = \frac{1+(x+y)^2}{x+y} = \frac{1+x^2-2xy-y^2}{x+y} = \frac{1-x^2-2xy-y^2}{x+y} =$$

$$= \frac{-(y^2-1)-x^2-2xy}{x+y} = \frac{2x^2-2xy}{x+y} = \frac{-2x(x+y)}{x+y} = 2x$$

Aquí se ha utilizado la ecuación (2.30) (ver *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época) de las ramas imaginarias de la circunferencia $x^2 = y^2 - 1$.

De esta forma obtenemos

$$-x = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad -ix = i\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sen}(i\varphi) = i\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \tag{2.48}$$

Esta igualdad, obtenida de los razonamientos geométricos, coincide con la prolongación analítica (2.45) de la función seno en la región de los valores imaginarios del argumento.

Empleando las expresiones (2.43) y (2.48), hallamos la suma de los cuadrados del coseno y del seno del argumento imaginario:

$$\cos^2(i\varphi) + \operatorname{sen}^2(i\varphi) = \frac{\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2}{2} + i^2\frac{\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{2\varphi} + 2e^{\varphi}e^{-\varphi} + e^{-2\varphi}\right) - \left(e^{2\varphi} - 2e^{\varphi}e^{-\varphi} - e^{-2\varphi}\right)\right] = \frac{-2x^2 - 2xy}{x+y} = \frac{-2x(x+y)}{x+y} = -2x.$$

Así, pues, la conocida identidad trigonométrica también es justa para el argumento imaginario:

$$\cos^2(i\varphi) + \operatorname{sen}^2(i\varphi) = 1. \tag{2.49}$$

La tangente del argumento imaginario se determina analíticamente como la razón del seno al coseno:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = i\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \tag{2.50}$$

A esto corresponde de un modo evidente la definición geométrica de la tangente como la razón de la longitud del cateto opuesto al ángulo $i\varphi$ a la longitud del cateto adyacente. Para el triángulo *OMN* de la figura de análisis tenemos:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \operatorname{tg}\left(\widehat{NOM}\right) = \frac{\left|\overline{MN}\right|}{\left|\overline{ON}\right|} = \frac{\dfrac{\left|\overline{NM}\right|}{\left|\overline{OM}\right|}}{\dfrac{\left|\overline{ON}\right|}{\left|\overline{OM}\right|}} = \frac{|x|}{i|y|}$$

Para tener en cuenta el signo de la tangente vamos a tomar en la última relación las coordenadas del punto *M* no en valor absoluto, sino con sus signos:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{x}{iy} = \frac{-ix}{y} = \frac{\operatorname{sen}(i\varphi)}{\cos(i\varphi)}.$$

La tangente del argumento imaginario solo toma valores imaginarios.

En matemática hace ya mucho tiempo que se presta atención a las funciones notables del argumento real que se diferencian de las consideradas aquí del seno (2.48) y la tangente (2.50) del argumento imaginario solamente en que toman valores reales.

También se ha advertido su relación con la hipérbola y cierta analogía, aunque bastante formal para la geometría euclídea propia, con el seno y la tangente. A estas funciones se les han dado los nombres y las designaciones siguientes:

$$\text{seno hiperbólico } sh\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \tag{2.51}$$

$$\text{tangente hiperbólica } th\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \tag{2.52}$$

La función coseno hiperbólico se define en realidad por una fórmula semejante

$$ch\,\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \tag{2.53}$$

a la del coseno imaginario (2.43), pero se diferencia en que el argumento del coseno hiperbólico se considera un número real.

Solo eso impide que se pueda considerar el coseno hiperbólico *ch* φ como la prolongación analítica del coseno

en la región de los números imaginarios. Teniendo en cuenta la coincidencia de valores que toman las funciones, se pueden escribir las siguientes igualdades entre las funciones del argumento imaginario y las funciones del argumento real (φ es un número real):

$$\cos(i\varphi) = ch\varphi \qquad (2.54)$$

$$\text{sen}(i\varphi) = i\, sh\varphi \qquad (2.55)$$

$$th(i\varphi) = i\, th\varphi \qquad (2.56)$$

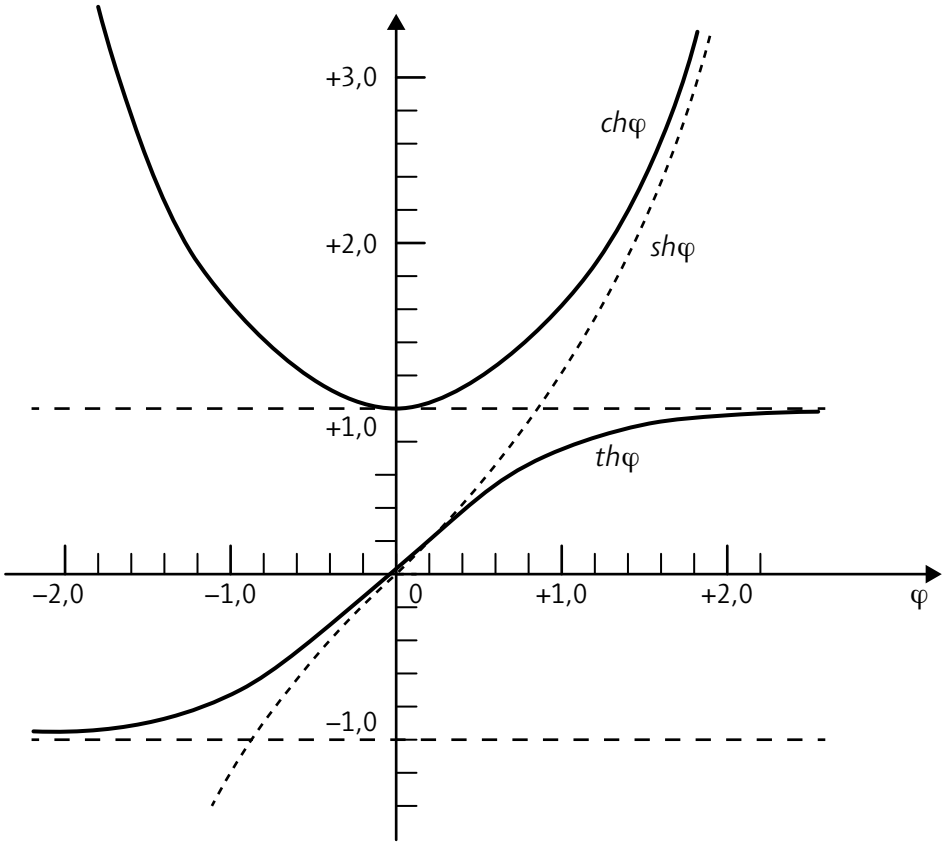
Señalemos también la relación

$$th\,\varphi = \frac{sh\,\varphi}{ch\,\varphi} \qquad (2.57)$$

Los valores imaginarios del seno y de la tangente están relacionados con los valores imaginarios de su argumento por la misma dependencia que los valores reales de las funciones hiperbólicas *sh* φ y *th* φ con el argumento real.

En virtud de eso, las funciones hiperbólicas conviene utilizarlas para ilustrar gráficamente las funciones trigonométricas del ángulo imaginario. Para construir la gráfica cos (*i*φ) tendríamos que utilizar un dibujo convencional, en el cual sobre un eje se marquen los valores imaginarios del argumento y, sobre el otro, los valores reales de la función.

En vez de eso, se construye la gráfica del coseno hiperbólico utilizando la igualdad (2.54). Es de apreciar la posibilidad de reunir las gráficas de las funciones *ch* φ, *sh* φ y *th* φ en un solo dibujo



cosa imposible de hacer en el caso de las funciones cos (*i*φ), sen (*i*φ) y tg (*i*φ). Hay que prestar atención al hecho de que los valores de la tangente hiperbólica están comprendidos en el intervalo de –1 a +1 y la *th* (φ) se aproxima asintóticamente a +1 cuando φ → +∞ y a –1 cuando φ → –∞ como resulta de las fórmulas (2.52) y (2.57).

En los términos de las funciones hiperbólicas, la identidad (2.49) toma la forma

$$ch^2\varphi + sh^2\varphi = 1, \quad \text{o} \quad ch^2\varphi - sh^2\varphi = 1 \qquad (2.58)$$

Nos va a hacer falta expresar *ch* φ y *sh* φ mediante *th* φ.

Dividimos los dos miembros de la igualdad (2.58) por *ch* φ (lo que siempre es posible, puesto que *ch* φ ≠ 0) y tomamos en consideración la relación (2.57):

$$1-\frac{sh^2\varphi}{ch^2\varphi}=\frac{1}{ch^2\varphi},\quad 1-th^2\varphi=\frac{1}{ch^2\varphi},\quad ch\,\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi}} \tag{2.59}$$

De donde hallamos

$$sh\,\varphi=th\,\varphi\cdot ch\,\varphi=\frac{th\,\varphi}{\sqrt{1-th^2\varphi}} \tag{2.60}$$

D. RETORNO A LA GEOMETRÍA CON LAS TRANSFORMACIONES

Aventuras entre las colinas de las reflexiones y rotaciones geométricas

El objetivo es trabajar el método de inducción matemática en el espacio sensible a los sentidos. Se denomina inducción matemática a todo razonamiento que comprende el paso de proposiciones particulares a generales, con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.

En la geometría, el método de inducción matemática encuentra su aplicación más natural (próxima a la aplicación de este método en la teoría de los números y en el álgebra) en la solución de problemas geométricos relacionados con el cálculo.

Tal como lo hemos venido haciendo en la preparación para los Festivales de Problemas, nuestro énfasis está puesto en mostrarles a los profesores en actividad la importancia de los métodos, y uno de los más necesarios en la formación matemática es el de inducción, como bien lo señalaba el doctor Enzo Gentile. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calcúlese el lado a_{2^n} de un 2^n-ágono regular inscrito en una circunferencia de radio R.

Solución

1°. Si $n = 2$, el 2^n-ágono regular es un cuadrado y para su lado tenemos $a_4 = R\sqrt{2}$. Ahora bien, empleando la fórmula de duplicación

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}},$$

encontramos $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ en el caso de un octágono regular, $a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ en el caso de un 16-ágono regular y

$$a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

en el caso de un 32-ágono regular. Por eso, podemos suponer que para $n \geq 2$ el lado de un 2^n-ágono regular inscrito es

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}. \tag{*}$$

2°. Supongamos que el lado de un 2^n-ágono regular inscrito se determina mediante la fórmula (*). Entonces, de acuerdo con la fórmula de duplicación, tenemos

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}{4}}}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}},$$

de donde resulta que la fórmula (*) es válida para todos los n.

De la fórmula (*) se deduce que la longitud $C = 2\pi R$ de una circunferencia de radio R es igual al límite de la expresión

$$2^n R\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

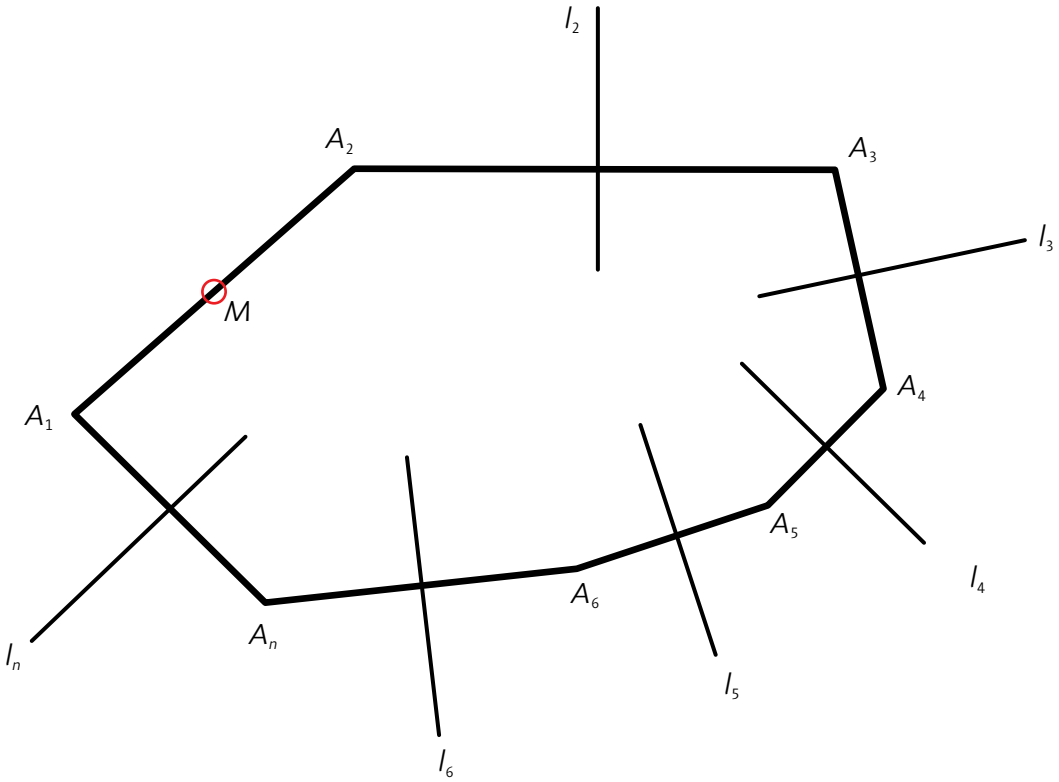
cuando n crece infinitamente y que, por consiguiente

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

Continuamos con los problemas de las trasformaciones.

Problema 40 (a)

Sean un punto M y $n-1$ líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$ dadas en el plano. Construya un n-ágono $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tal que el punto medio del lado $\overline{A_1A_2}$ coincida con el punto M, y las mediatrices de los lados restantes coincidan con las líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$.



Solución

Suponga que el problema se ha resuelto. Una media vuelta sobre el punto M llevará el vértice A_1 a A_2, una reflexión en la línea l_2 llevará el vértice A_2 a A_3, una reflexión en l_3 llevará A_3 a A_4, y así sucesivamente. Finalmente, una reflexión en l_n lleva A_n a A_1. Por lo tanto, A_1 es un punto fijo en la suma de media vuelta alrededor de M seguida de reflexiones en las líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$. Una media vuelta alrededor del punto M equivale a un par de reflexiones en las líneas. Consideraremos por separado dos casos.

Primer caso: n impar. En este caso, el problema se reduce a encontrar puntos fijos de la suma de un número par de reflejos en líneas. Esta suma es, en general, una rotación alrededor de algún punto O (que se puede construir desde el punto M y las líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$). Por lo tanto, para n impar, el problema tiene en general una solución única [compárese con el primer caso en la solución del problema 39 (a) en *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época]. Las únicas excepciones son los casos en que la suma del número par de reflejos en las líneas es una traslación –entonces el problema no tiene solución en absoluto–, o es la transformación de identidad –entonces el problema tiene muchas soluciones (porque la reflexión en una línea tiene infinitas líneas fijas)–.

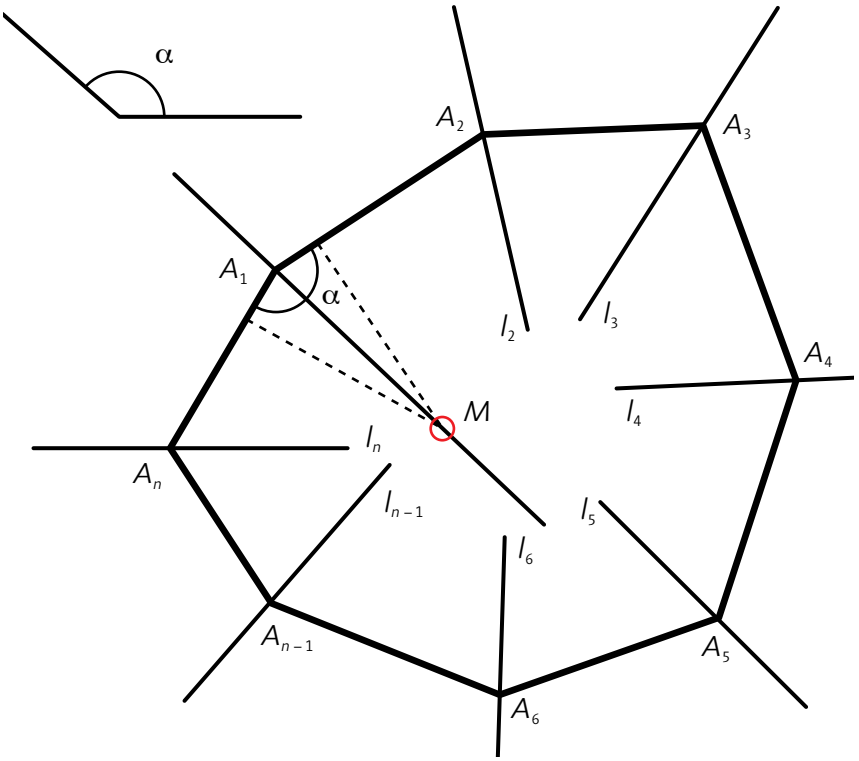
Segundo caso: n par. En este caso, el problema se reduce a encontrar los puntos fijos de un número impar de

reflejos en las líneas. En general, esta suma es una reflexión con deslizamiento y el problema no tiene solución (una reflexión con deslizamiento no tiene puntos fijos). En el caso especial en que la suma de las reflexiones sea en sí misma una reflexión en alguna línea l, el problema tendrá muchas soluciones (la reflexión en una línea tiene un número infinito de puntos fijos, es decir, todos los puntos de la línea l).

La construcción también se puede realizar de manera similar a la construcción en la primera solución del problema 39 (a) en *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época. El polígono obtenido como solución puede intersecarse a sí mismo.

Problema 40 (b)

Sean un punto M y $n-1$ líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$ dados en el plano; construya un n-ágono $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tal que el ángulo en A_1 tenga un valor dado α, su bisectriz pase por M, y las bisectrices de los ángulos en $A_2, A_3, \ldots, A_n$ coincidan con $l_2, l_3, \ldots, l_n$.



Solución

Suponga que el problema se ha resuelto. Una rotación de $180° - \alpha$ alrededor del punto M lleva la recta $\overline{A_1A_n}$ hacia $\overline{A_1A_2}$. Una reflexión en l_2 lleva $\overline{A_1A_2}$ a $\overline{A_2A_3}$, una reflexión en l_3 lleva $\overline{A_2A_3}$ a $\overline{A_3A_4}$, y así sucesivamente. Finalmente, una reflexión en l_n lleva $\overline{A_{n-1}A_n}$ a $\overline{A_nA_1}$. Así, $\overline{A_nA_1}$ es una línea fija de la transformación que consiste en la suma de una rotación de $180° - \alpha$ alrededor del punto M (que puede ser reemplazado por dos reflexiones en líneas) y $n-1$ reflexiones en las líneas $l_2, l_3, \ldots, l_n$. Consideremos dos casos por separado.

Primer caso: n par. La suma de un número impar de reflejos en líneas es, en general, una reflexión con deslizamiento; tiene una línea fija única, el eje de simetría l (que se puede construir), y por lo tanto el problema tiene una solución única. En el caso especial en que la suma de las reflexiones sea una reflexión en alguna línea, el problema tendrá infinitas soluciones (porque la reflexión en una línea tiene infinitas líneas fijas).

Segundo caso: n impar. En este caso la transformación que estamos considerando será la suma de un número par de reflexiones en líneas, lo que, en general, es una rotación. En este caso, el problema no tendrá solución. En casos especiales, sin embargo, esta suma de reflexiones puede ser una media vuelta sobre algún punto, una traslación o la transformación de la identidad; en cada uno de estos casos el problema tendrá más de una solución.

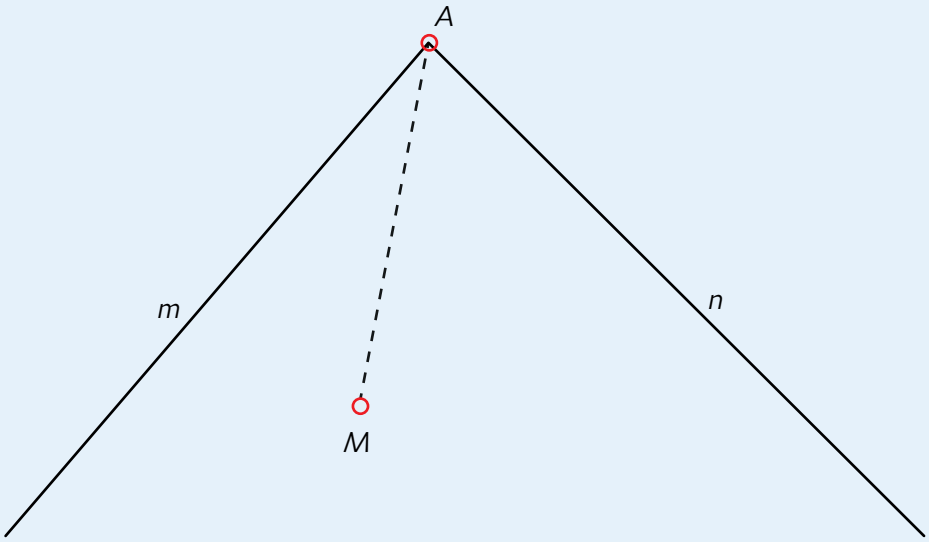
El polígono que se construyó para resolver el problema puede intersecarse; los ángulos de las rectas $l_2, l_3, \ldots, l_n$ bisecarán los ángulos exteriores o interiores. La construcción también se puede realizar de una manera similar a la de la primera solución del problema 39 (a) en *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época.

PARA RESOLVER

con imaginación e inteligencia

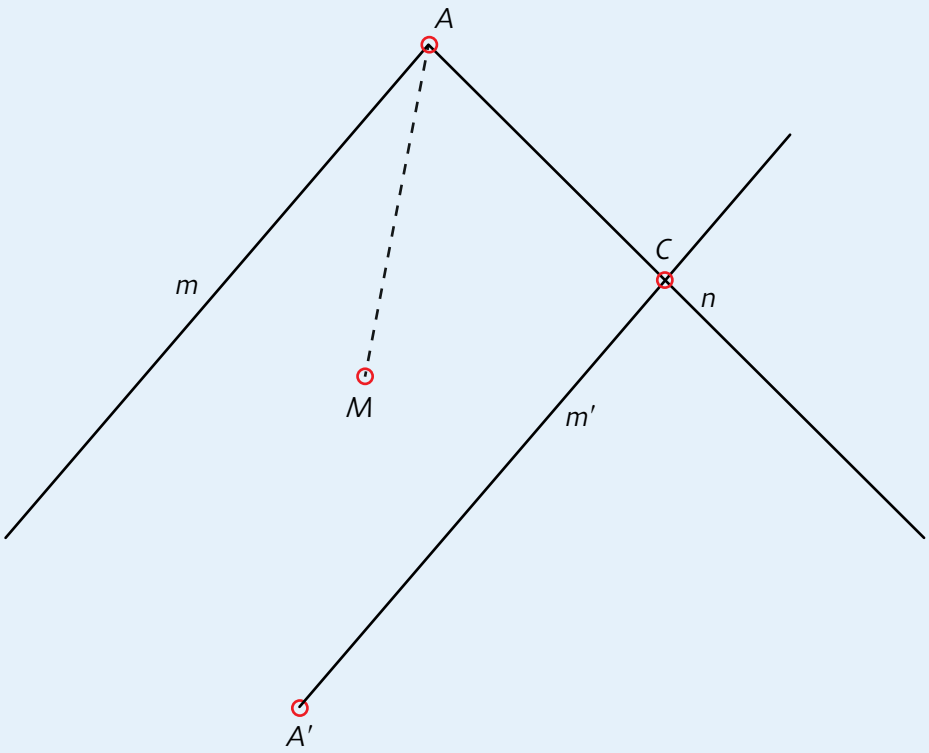
Respuesta del Nº 9

A partir de la figura, dibujar el triángulo *ABC* sabiendo que sus lados *AB* y *AC* están sobre las semirrectas *m* y *n*, respectivamente, y que el segmento *AM* es una mediana.

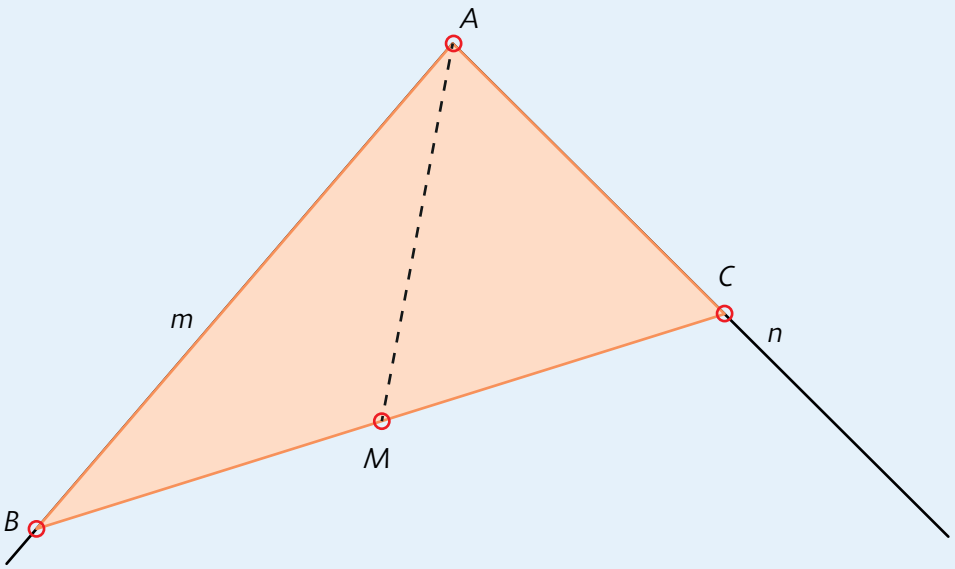
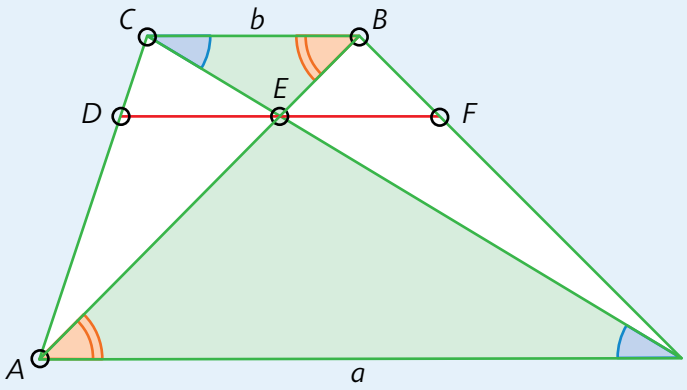


Solución

El vértice *C* es el simétrico del vértice *B* respecto del punto *M*. Por lo tanto, *C* se encuentra en la semirrecta *n* y en la semirrecta *m'*, simétrica de *m* respecto de *M*.



Así, podemos obtener el vértice *B* como el simétrico del vértice *C* respecto de *M*.



Fe de erratas: La solución del Problema 8 de esta sección, publicada en *Leñitas Geométricas* 9, 3ª época, de esta sección, incluyó un error en la pág. 28. Donde antes había una letra *A*, corresponde una *D*, tal como se muestra en el gráfico a continuación: