Sugerencias a los directores:

Los *"Problemas Semanales"* fueron pensados para que durante ese tiempo estén expuestos a la vista de los alumnos en el patio escolar; pasado ese tiempo serán reemplazados por los nuevos. Sería bueno que en ese período los directores averigüen quiénes los resolvieron y los alienten, con el apoyo de sus profesores a encontrar la solución más original o la más corta o la que usa recursos más elementales o ingeniosos. Este es el camino que conduce a la Olimpíada de Matemática y disfrutar de una tarea creativa ampliamente valorada.

¡¡¡Difunda los Problemas!!!

Problemas Semanales

de Patricia Fauring y Flora Gutiérrez

Fecha: 02/10/2017

Primer Nivel

129. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\widehat{C}=90^{\circ}$. Los puntos D y E en la hipotenusa AB son tales que $AD=AC$ y $BE=BC$. Los puntos P y Q en AC y BC respectivamente son tales que $AP=AE$ y $BQ=BD$. Sea M el punto medio del segmento PQ. Demostrar que M es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo ABC y calcular la medida del ángulo $A\widehat{M}B$.

Segundo Nivel

229. Nico quiere escribir alrededor de una circunferencia los 100 números enteros del 1 al 100 en algún orden y sin repeticiones, para que tengan la siguiente propiedad: al recorrer la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, la suma de las 100 distancias entre cada número y su siguiente sea igual a 198. Determinar de cuántas maneras se pueden ordenar los 100 números para que Nico logre su objetivo.
ACLARACIÓN: La distancia entre dos números a y b es igual al valor absoluto de su resta: $|a-b|$.

Tercer Nivel

329. Agustín y Lucas, por turnos, marcan cada vez una casilla que aun no ha sido marcada en un tablero cuadriculado de 101×101. Agustín comienza el juego. No se puede marcar una casilla que ya tenga dos casillas marcadas en su fila o su columna. El que no puede hacer su movida pierde. Decidir cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora.

Fecha: 09/10/2017

Primer Nivel

130. En cada casilla de un tablero de 17×17 hay que escribir un número natural de 1 a n inclusive de modo que se usen todos estos números (se pueden repetir). Si una fila contiene dos casillas A y B con el mismo número k y A está a la izquierda de B entonces no hay números k en las casillas de la columna de A que estén por encima de A.
El número n es el menor posible.
Determinar el valor de n y mostrar un tablero con esas condiciones.

Segundo Nivel

230. Se tiene un tablero con n filas y 12 columnas. Cada casilla del tablero contiene un 1 o un 0. El tablero tiene las siguientes propiedades:
(a) Cada dos filas son distintas.
(b) Cada fila contiene exactamente 4 casillas con 1.
(c) Para cada 3 filas hay una columna que las interseca en tres casillas con 0.
Hallar el mayor n para el que existe un tablero con estas tres propiedades.

Tercer Nivel

330. Hallar los ángulos de un cuadrilátero convexo $ABCD$ tal que $A\widehat{B}D = 29^\circ$, $A\widehat{D}B = 41^\circ$, $A\widehat{C}B = 82^\circ$ y $A\widehat{C}D = 58^\circ$.

Fecha: 16/10/2017

Primer Nivel

131. Se consideran los 100 números $199, 199^2, 199^3, 199^4, ..., 199^{100}$. A cada uno de ellos se le calcula la suma de sus dígitos. Determinar el valor mínimo que se obtiene al hacer estas 100 cuentas.

Segundo Nivel
231. Para cada par a, b de números naturales coprimos sea $d_{a,b}$ el máximo común divisor de $51 \cdot a + b$ y $a + 51 \cdot b$. Hallar el máximo valor posible de $d_{a,b}$.
ACLARACIÓN: a y b son coprimos si su máximo común divisor es igual a 1.

Tercer Nivel

331. Sean a y b números racionales tales que $a + b = a^2 + b^2$. Supongamos que el valor común $s = a + b = a^2 + b^2$ no es entero, y escribámoslo como fracción irreducible: $s = \frac{m}{n}$. Sea p el menor divisor primo de n. Hallar el mínimo valor de p.

Fecha: 23/10/2017

Primer Nivel

132. Alex y Bibi juegan al siguiente juego. Alex elige un número natural k menor o igual que 1000. Luego Bibi elige una colección B que contiene más de k números enteros entre 0 y 1000 inclusive y en la que puede haber repeticiones. Ahora Alex puede aplicar reiteradas veces la siguiente operación en B: elige k números de B y los cambia del siguiente modo. Al número elegido b lo reemplaza por $b+1$ si b es menor que 1000 y lo reemplaza por 0 si $b=1000$.
Alex gana si mediante varias operaciones logra que todos los números de B sean iguales a 0; si él fracasa entonces gana Bibi. Hallar todos los k que garantizan a Alex una victoria, no importa la colección B que elija Bibi.

Segundo Nivel

232. Se marcan en una circunferencia 999 puntos negros que la dividen en 999 arcos de longitud 1. Hay que colocar sobre la circunferencia d arcos de longitudes $1,2,...,d$ de modo que cada arco comience y termine en dos puntos negros y ninguno de los d arcos esté contenido en otro de los d arcos. Hallar todos los valores de d para los cuales esta construcción es posible.
ACLARACIÓN: Dos arcos pueden tener uno o más puntos comunes.

Tercer Nivel

332. Sea AB un segmento de longitud 1. Varias partículas comienzan a moverse simultáneamente a velocidades constantes desde A hasta B. Tan pronto como una partícula alcanza B, da vuelta y se dirige a A; cuando llega a A, comienza a moverse nuevamente hacia B, y así indefinidamente.
Hallar todos los números racionales $r>1$ tales que existe un instante t con la siguiente propiedad: Para cada $n\geq 1$, si $n+1$ partículas con velocidades constantes $1,r,r^2,...,r^n$ se mueven como se describió, en el instante t todas ellas se encuentran en un mismo punto interior del segmento AB.