OLIMPIADA MATEMATICA ARGENTINA - OMA -

Leñitas Geométricas

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

Nº 4 - 11 de abril de 2019

para el Fogón Matemático de los Festivales

"Entender las matemáticas es demostrar formalmente lo que se ve intuitivamente, y ver intuitivamente lo que se demuestra formalmente". *George Polya*

EN LA PRÁCTICA DOCENTE

El documento "Marco Nacional para la Mejora del aprendizaje en Matemática" destaca que "las ciencias usan herramientas matemáticas para interpretar los hechos, conjeturar, anticipar, estimar o predecir. Para hacerlo construyen un modelo que les permita utilizar métodos matemáticos para resolver la problemática. Los científicos, por lo general, tienen que resolver problemas. Lo que hacen entonces es evaluar cuáles son las variables que intervienen en dicha situación, la recortan y seleccionan aquellas que son significativas, descartando algunas y resaltando otras. Una vez recortada la situación estudiada, buscan relaciones entre las variables, eligen las formas de representarlas (algebraicas, gráficas, etc.), y las usan para resolver la situación".

A nuestro parecer esto marca el estilo y el modo operativo del profesor de matemática, de ciencias y de tecnología. Sabemos que nuestra percepción es prioritariamente visual. Por eso no es de extrañar el apoyo continuo de lo visual en las tareas de modelización, no solo en aquellos temas como la geometría, que se refieren más directamente a la exploración del espacio, sino también en otras, como el análisis, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales.

Aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que acompañan adquiriendo lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que facilita extraordinariamente una visión unitaria para su manipulación, una percepción directa de la situación relativa a las partes del objeto de estudio. Un ejemplo clásico son los Diagramas de Venn.

La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, por supuesto, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático.

La Visualización como Método de Resolución de Problemas

Buscando estrategias: observarlas en los resultados clásicos

La fórmula de Herón es uno de los tesoros de la geometría clásica. Está claro que las longitudes de los tres lados de un triángulo determinan inequívocamente su área; no hay sorpresas allí. Lo que sí es sorprendente, sin embargo, es la complejidad de la fórmula y la necesidad de explicar esto con detalle.

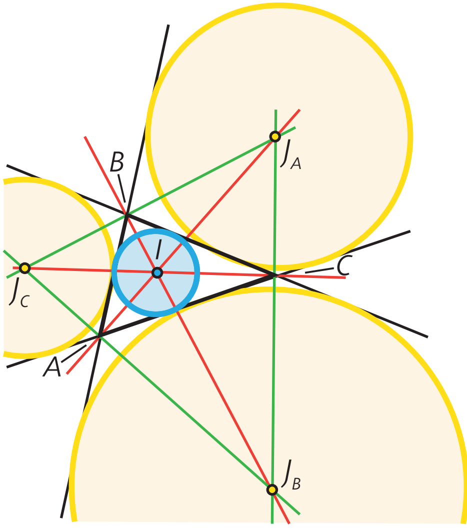
En algún momento del siglo II, Herón de Alejandría demostró que el área de un triángulo cuyas longitudes de los lados son a, b y c está dada por $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo s el semiperímetro ya mencionado en Leñitas Geométricas. Esta parece una fórmula irracionalmente complicada para una idea tan básica, pero tales son las peculiaridades de la geometría euclidiana.

La prueba de Herón era asombrosamente intelegible. Él comenzó inscribiendo un círculo dentro de su triángulo. La construcción de una multitud de líneas auxiliares, invocando hechos conocidos sobre cuadriláteros inscritos en círculos, y haciendo uso repetido de triángulos semejantes, le parecía a todo el mundo que estaba matemáticamente a la deriva. Sin embargo, juntó todo en el último momento para demostrar su resultado. Los lectores se quedaron atónitos al ver con asombro lo que equivale a una verdadera sorpresa final.

Problema. ¿Podrías encontrar un argumento simple para la fórmula de Herón?

Otros resultados interesantes en la geometría del triángulo y del círculo

Las bisectrices concurren en un punto *I* (incentro) y sus consecuencias más importantes son el círculo inscrito y los exinscritos, distancias de los vértices a los puntos de contacto.

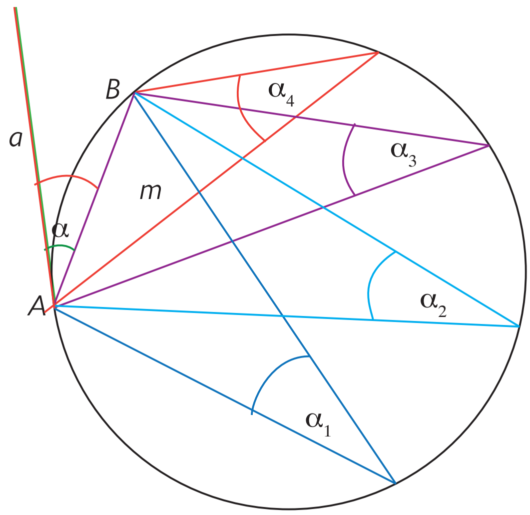


En la circunferencia inscrita en el triángulo *ABC* de incentro *I* y las tres circunferencias exinscritas trazadas a partir de los exincentros J_A, J_B, J_C, todos estos resultados son una fuente inagotable para crear problemas de construcciones geométricas por plegado, o con regla y compás, o usando GeoGebra.

Recordemos sus propiedades: el exincentro siempre está fuera del triángulo. El exincentro es centro de la circunferencia exinscrita. También pasa por el exincentro la bisectriz interior opuesta al lado al que es tangente la circunferencia exinscrita.

Modelos para las construcciones geométricas

Hallar el lugar geométrico de todos los puntos desde los que se ve un segmento dado $\overline{AB}$ bajo un ángulo fijo α dado. Evidentemente está formado por el arco capaz con extremo en *A* y *B* de una circunferencia y por el arco simétrico respecto de la recta que contiene el segmento $\overline{AB}$.



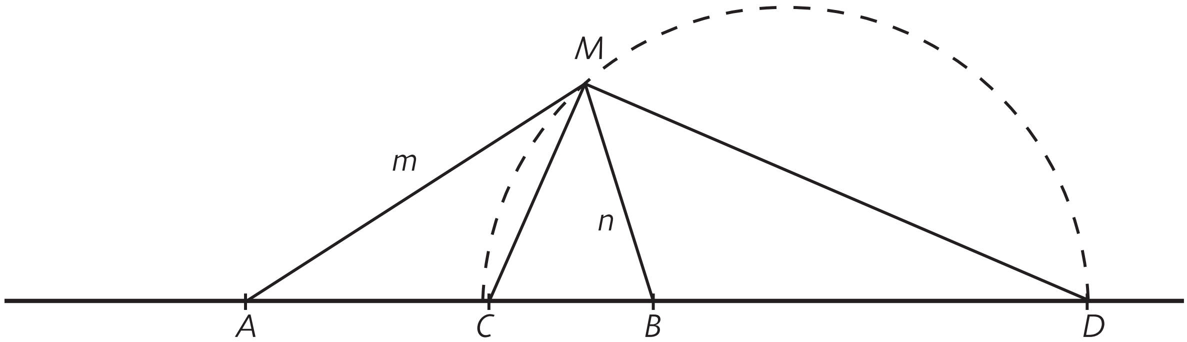
¿Cómo construirlo teniendo en cuenta los resultados comentados? ¿Cuál sería tu estrategia y cuál es el plan para construir la figura?

La figura sugiere su construcción, pues dado *AB* y α, si lo construimos en el extremo *A*, entonces α será semi-inscripto al arco. Si trazamos la perpendicular al lado tangente de *a* por *A* y la intersectamos con la mediatriz de *AB* obtenemos el centro del arco de la circunferencia que pasará por *A* y *B*. En la figura falta el arco simétrico.

Remarcamos, entonces, que las construcciones geométricas ayudan a la visualización de importantes resultados y que estos son las herramientas para usar cuando las dificultades nos desafían.

Otro modelo

Hallar el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyas distancias a los puntos *A* y *B* dados están en una relación dada por la razón $\frac{m}{n}$. Como veremos, es una circunferencia. Piensa cómo construirla.



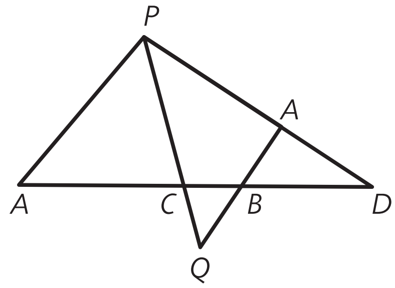
Seguramente trazarías una recta y ubicarías los puntos fijos *A* y *B*, con un radio igual o proporcional a *m* trazas un arco con centro en *A* y con otro igual o proporcional a *n* y con centro en *B* cortas al anterior, determinando el punto *M* que está en el lugar buscado.

Las bisectrices de los ángulos interior y exterior de *AMB* cortan a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en dos punto *C* y *D*, que también pertenecen al lugar porque tienen

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{m}{n}.$$

Como el ángulo *CMD* es recto, el punto *M* pertenece al arco capaz y por lo tanto es el lugar geométrico buscado en una circunferencia con diámetro $\overline{CD}$.

Observa que los puntos *C* y *D* dividen armónicamente al segmento $\overline{AB}$ según la relación $\frac{m}{n}$.



Los puntos *C* y *D* podemos hallarlos del modo siguiente: se trazan por *A* y *B* dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{RQ}$, de manera tal que se verifique: $\frac{\overline{AP}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{QB}} = \frac{m}{n}$. Las rectas $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ determinan los puntos buscados *C* y *D*.

Volvamos a los experimentos geométricos

Miguel se jactaba de dibujar mal y de no utilizar en sus esquemas regla o compás; apoyaba la idea de Gass: "La matemática es el arte de pensar bien sobre figuras mal hechas". También nosotros pensamos que es bueno impulsar a los alumnos a trabajar en esa dirección para alcanzar el poder de la visualización.

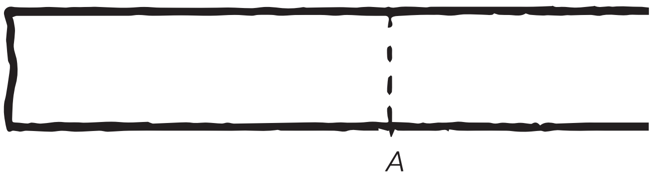
Es pertinente traer aquí el pensamiento de Atiyah, Sir Michael. Special Article: Mathematics in the 20th Century." ... "Comprender y dar sentido al mundo que tenemos es una parte muy importante de nuestra evolución. Por lo tanto, la intuición espacial o la percepción espacial es una herramienta enormemente poderosa, y es por eso que la geometría es, en realidad, una parte importante de la matemática, no solo para las cosas que son obviamente geométricas, sino incluso para las cosas que no son; pues, tratamos de ponerlas en forma geométrica, porque nos permite usar nuestra intuición".

"Es decir: es bastante claro que nuestra intuición es la más magnífica de nuestras herramientas, y la pone a prueba, cuando tratas de explicarle un tema de matemática a un alumno o colega. Si tienes un argumento largo y difícil, y finalmente el estudiante entiende. ¿Qué dice este estudiante? El alumno dice: '¡Ya lo veo!' Ver es sinónimo de comprensión, y usamos la palabra 'percepción' para referirnos a ambas cosas también. Al menos esto es cierto en el idioma inglés. Sería interesante comparar esto con otros idiomas".

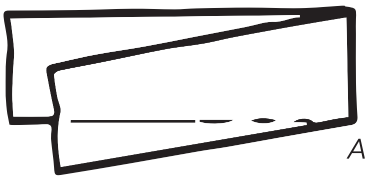
"Creo que es muy importante que la mente humana haya evolucionado con esta enorme capacidad para absorber una gran cantidad de información, mediante la acción visual instantánea, y los matemáticos lo tomaron y lo perfeccionaron".

La tira de geometría en la tira de papel

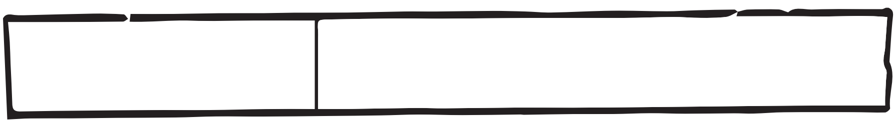
Volvemos al plegado.



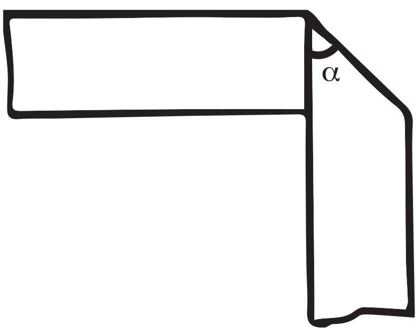
Hazte, si puedes, con un buen trozo de esos rollos de papel que se emplean en las máquinas registradoras de cobrar dinero. O hazte tú mismo una tira de papel larga, como de 4 cm de anchura, pegando tiras cortadas de una hoja de papel. Procúrate unas tijeras y papel celo. Porque vamos a hacer la tira de geometría con tu tira de papel.



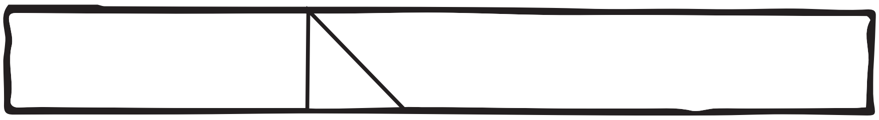
Para empezar, piensa un poco. ¿Cómo te harías un cuadrado con tu tira solamente plegando?... Fácil, ¿no?



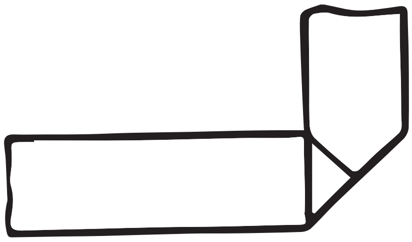
Pliega por *A* y así resulta un pliegue perpendicular. Queda del modo siguiente



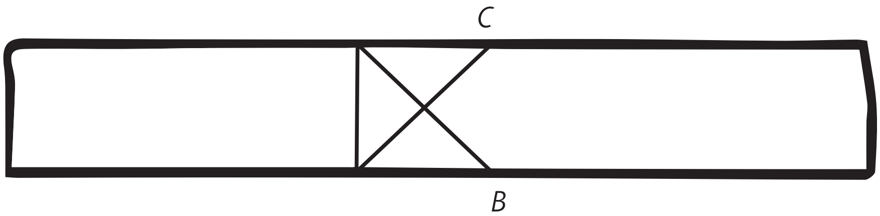
Al desplegar resulta marcado el pliegue perpendicular.



Pliega ahora así:



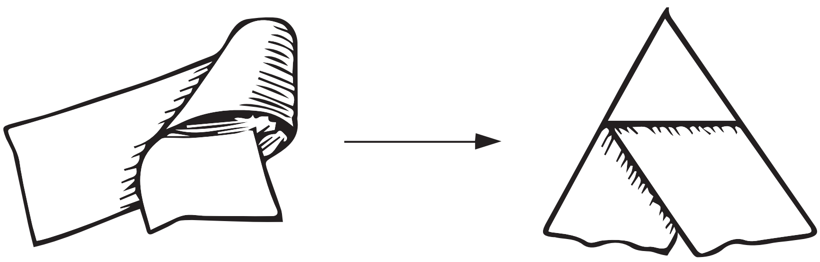
Observa que el ángulo es de 45º.



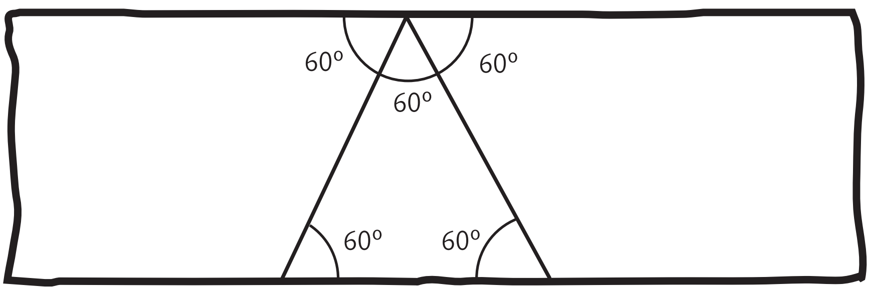
Pliegas por los puntos *B* y *C* y te resulta el cuadrado.

Queremos un triángulo equilátero, ¿cuál es la manera de construirlo?

Ahora piensa otra vez. ¿Cómo hacerte con un triángulo equilátero? Seguro que se te ocurre, pues ya sabes cómo dividir un ángulo en tres partes iguales plegando el papel. Tanteando un poco puedes formar primero un cucurucho y luego dos pliegues, con lo que la tira te va a quedar así:

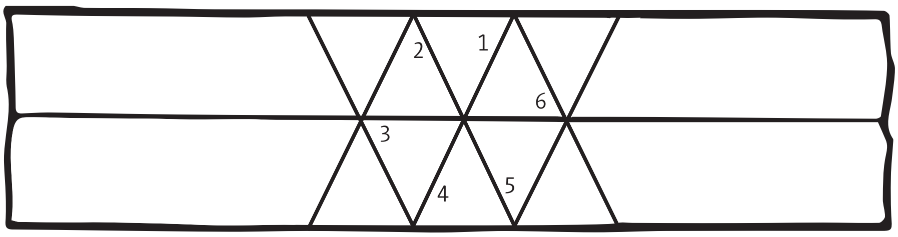


Observa que en la tira plegada hay dos pliegues que determinan (por coincidir tres ángulos iguales alrededor del vértice). Al desplegar queda la cosa así:



Y por la igualdad de ángulos determinados por paralelas, resulta que los ángulos señalados por los pliegues en la parte baja de la tira son también de 60º. Así obtienes un triángulo equilátero.

Ya tienes el cuadrado, el triángulo equilátero... ¿más polígonos regulares? El hexágono es fácil, una vez que tienes el triángulo equilátero. Mira el hexágono después de los dobleces ¿Cómo lo hizo?



Para visualizar

1. Hallar el punto X equidistante de tres rectas dadas $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, que no pasan todas por un mismo punto.

2. Construir un triángulo ABC conociendo A, $\bar{a}$ y m_a.

3. Construir una circunferencia que pase por un punto A y sea tangente a otra circunferencia C, en un punto M dado.

4. Determinar sobre una circunferencia un punto que esté a la distancia m de la recta $\overleftrightarrow{XY}$ dada.

5. Construir una circunferencia que pase por un punto A y sea tangente a una recta $\vec{m}$ en un punto M dado.