Leñitas Geométricas
para el Fogón Matemático de los Festivales
De OMA para Profesores y Maestros en actividad
Nº 3 - 28 de marzo de 2019

"Entender las matemáticas es demostrar formalmente lo que se ve intuitivamente, y ver intuitivamente lo que se demuestra formalmente". *George Polya*

EN LA PRÁCTICA DOCENTE

En el documento del Ministerio de Educación "Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática", al referirse a las capacidades que evalúa PISA, se lee: "La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar la matemática en contextos variados. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, verdades y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos, ayuda a los individuos a reconocer el papel que la matemática desempeña en el mundo, a hacer juicios bien fundados y a tomar decisiones necesarias para los ciudadanos reflexivos, comprometidos y constructivos. La competencia matemática se relaciona con un uso más amplio y funcional de la matemática; su dominio incluye la capacidad de reconocer y formular problemas matemáticos en diversas situaciones".

Los bajos resultados alcanzados en las evaluaciones nos obligan a estar alertas y proponer en nuestro medio una enseñanza de alta calidad, esto es, realizar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas. Una enseñanza efectiva de las matemáticas involucra a los estudiantes en actividades que implican conjeturar para resolver y luego discutir grupalmente los distintos procesos que ellos fueron desarrollando para establecer una valoración del proceso completo. Este estilo de trabajo permite que emerjan múltiples maneras de abordar los problemas y poner en juego una mayor variedad de estrategias de resolución.

La propuesta de Festivales de Problemas apunta en esta dirección, buscando un efecto contagio entre escuelas o entre barrios de una misma ciudad o distrito, pues necesitamos: 1. Eliminar las persistentes brechas en los logros por las diferencias de ingreso, de tal manera que todos los estudiantes tengan oportunidades y apoyo para alcanzar altos niveles en el aprendizaje de las matemáticas. 2. Incrementar el nivel de aprendizaje de la matemática y la destreza en su empleo en las otras disciplinas escolares. Debemos lograr que todos los estudiantes estén preparados para la universidad y el mundo laboral cuando se gradúen de la enseñanza secundaria. 3. Incrementar el número de estudiantes secundarios graduados, especialmente aquellos de grupos que habitualmente están poco interesados y preparados para las carreras de ciencias, tecnología, ingeniería y matemática. En resumen, necesitamos motivar y alentar el trabajo personal y grupal, aun extraescolar que involucre a la familia, para inducir a todos al autoaprendizaje y alcanzar así los niveles más altos posibles.

La Visualización como Método de Resolución de Problemas

Hay una amplia bibliografía para los maestros y profesores en actividad que seguramente les resultará útil.

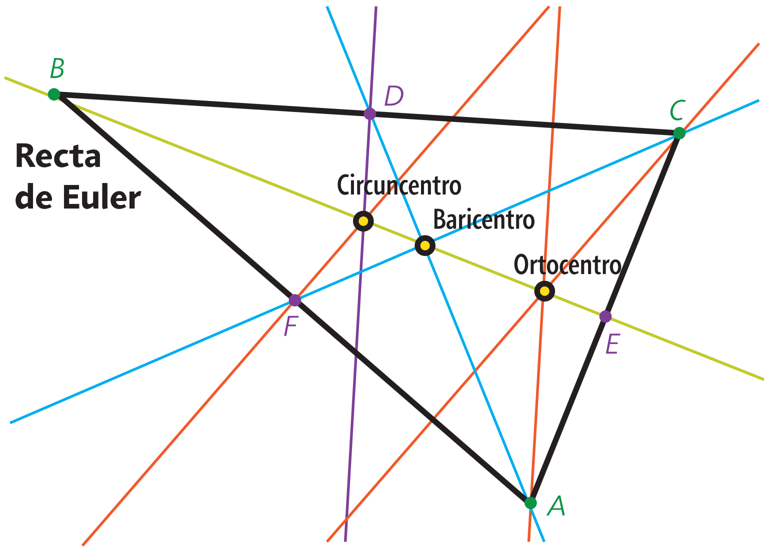
a. Algunas obras en castellano con ideas y actividades interesantes alrededor de la visualización:
Courant, R. y Robbins, H., *¿Qué es la matemática?* (Aguilar, Madrid, 1970).
García Arenas, J. y Bertrán i Infante, C., *Geometría y experiencias* (Alhambra, Madrid, 1988).
Guzmán, M. de, *Mirar y ver* (Red Olímpica, Buenos Aires, 1996; Madrid, 1975).
Guzmán, M. de, *Experimentos de geometría* (MEC, 1986).
Guzmán, M. de, *Cuentos con cuentas* (Labor, Barcelona, 1984).
Guzmán, M. de, *Aventuras matemáticas* (Pirámide, Madrid, 1994).
Guzmán, M. de, *El rincón de la pizarra* (Pirámide, Madrid, 1996).
Rademacher, H. y Toeplitz, O., *Sobre números y figuras* (Alianza, Madrid, 1970).
Steinhaus, H., *Instantáneas matemáticas* (Salvat, Barcelona, 1986).

b. Algunas obras útiles para la resolución de problemas en geometría:
Barbeau, Klamkin, Moser, *500 Mathematical Challenges* (Mathematical Association of America, 1995).
F.G.-M., *Exercices de Geometrie* (Maison-Gigord, Tours-Paris, 1912).
Guzmán, M. de, *Para pensar mejor* (Pirámide, Madrid, 1995).
Guzmán, M. de y Hernández, E., *Optimización* (Material experimental para la autoformación científica y

didáctica del profesorado de matemáticas de enseñanza secundaria. Proyecto CIDE, J. Colera, M. de Guzmán, E. Hernández, V. Riviere, Madrid 1994).
Petersen, J., *Métodos y teorías para la resolución de los problemas de construcciones geométricas* (Giner, Madrid, 1955).
Polya, G., *Mathematical Discovery* (2 vols.), (Wiley, New York, 1962).
Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 vols.), (Princeton University Press, Princeton, 1954).

Algunos resultados que ayudan a hacer matemática

Vimos algunos resultados interesantes **de la geometría del triángulo y del círculo,** como: las **mediatrices** concurren en un punto ***O*** (circuncentro); las **bisectrices** concurren en un punto ***I*** (incentro); las **medianas** concurren en un punto ***G* o centroide** (baricentro); las **alturas** concurren en un punto ***H*** (ortocentro). Estos resultados serán importantes para elaborar estrategias en la resolución de los problemas de lugares geométricos, de las transformaciones geométricas o para las construcciones auxiliares.

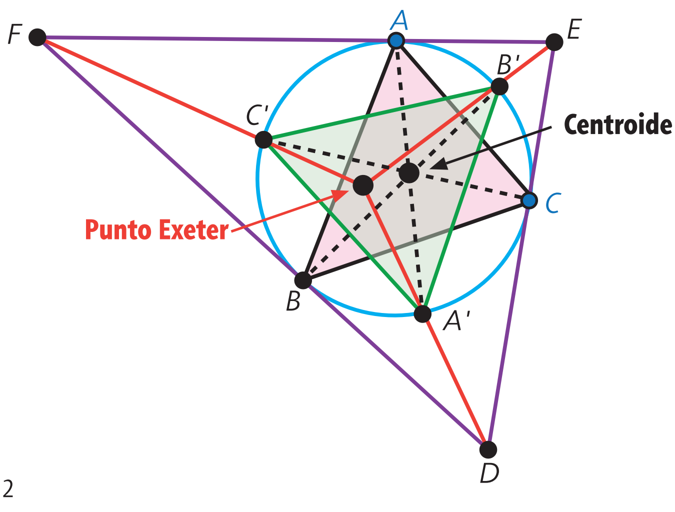


Como vimos, **la recta de Euler de un triángulo** es una recta en la que están situados el ortocentro *H*, el circuncentro *O* y el baricentro *M* de un triángulo; incluye al punto de Exeter y al centro de la circunferencia de los nueve puntos notables de un triángulo escaleno. Se denomina así en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien demostró la colinealidad de los mencionados puntos notables de un triángulo en 1765.

Experimenta y busca regularidades, aquellas cosas que no cambian

La construcción de la recta de Euler mediante el uso de GeoGebra nos muestra la colinealidad usando el movimiento; algo que podemos ver incluso por internet. Dado que Euler no disponía de esta tecnología, seguramente con su poderosa intuición imaginaba lo que hoy todos podemos ver gracias al movimiento asociado a las construcciones geométricas.

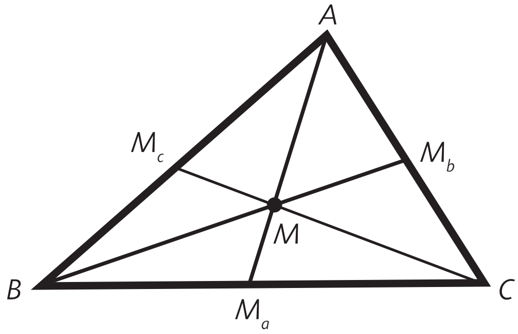
Problema. Construir el Punto Exeter definido como: "Sea *ABC* un triángulo cualquiera dado. Trácense las medianas a través de los vértices *A, B* y *C*; conocida la circunferencia circunscrita del triángulo *ABC*, se obtienen sus intersecciones *A', B'* y *C'* con las medianas. Se construye el triángulo *DEF*, formado por las tangentes en *A, B* y *C* a la circunferencia anterior"



(siendo D el vértice opuesto al lado formado por la tangente en el vértice A, E el vértice opuesto al lado formado por la tangente en el vértice B y F el vértice opuesto al lado formado por la tangente en el vértice C). Las líneas a través de DA', EB' y FC' son concurrentes, y su punto de intersección es el **punto de Exeter del triángulo** ABC. ¿El punto de Exeter pertenece a la recta de Euler?

Sigamos experimentando

Por plegado en un triángulo obtuvimos una figura como la siguiente:



Si tienes por ahí una regla, haz unas cuantas medidas:

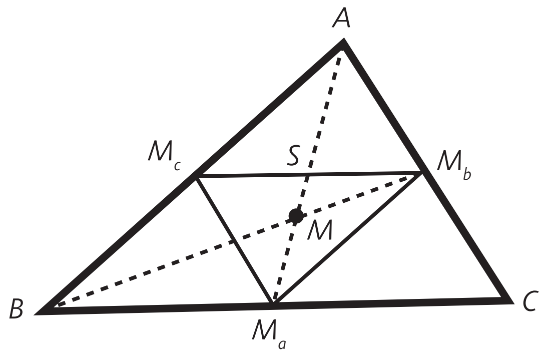
- mide MM_a,
- mide M_aA,
- mide MM_b y M_bB,
- mide MM_c y M_cC.

¿Observas algo curioso? Probablemente no. Pues mira a ver si resulta que

$$M_aA = 2MM_a, \qquad M_bB = 2MM_b, \qquad M_cC = 2MM_c.$$

Mide ahora OM y MH y observa que $MH = 2OM$.

Todos estos misterios se aclaran fácilmente con lo que probablemente recuerdes sobre triángulos semejantes y homotéticos. Fíjate en la figura siguiente:

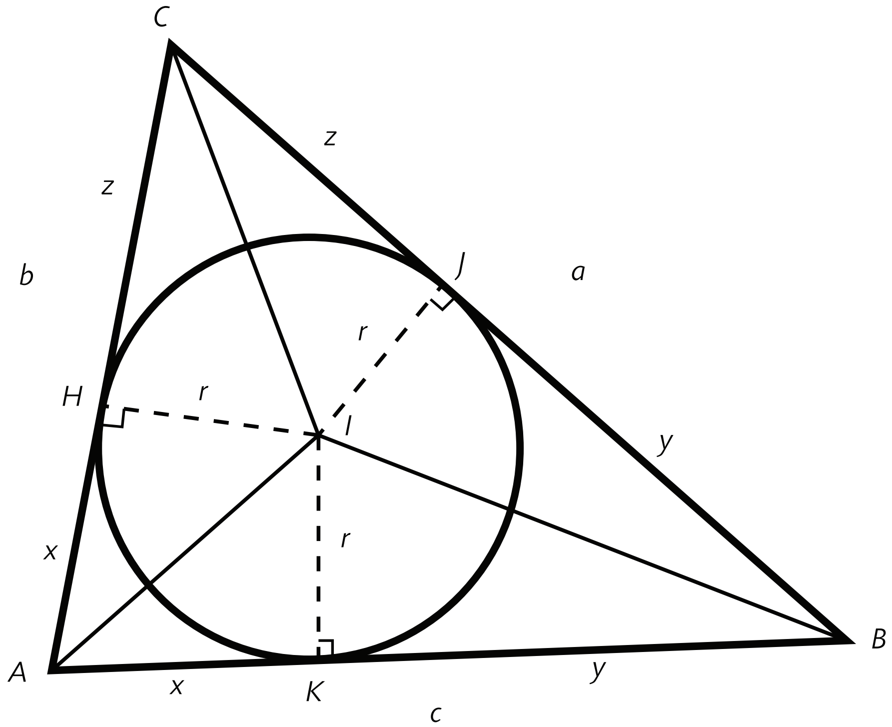


Fácilmente podrás comprobar que M_aM_b es paralelo a AB y M_cM_b es paralelo a BC y $M_cM_b = \frac{1}{2}BC$. Lo mismo sucede con los otros lados del triángulo pequeño $M_aM_bM_c$. Este triángulo $M_aM_bM_c$ se llama **triángulo órtico de *ABC***.

Como M_aS es la mediana de $M_aM_bM_c$ correspondiente a M_a, resulta que $M_aS = \frac{1}{2}AM_a$ y $MS = \frac{1}{2}MM_a$ (M es el punto donde se cortan BM_b y AM_a). Así resulta fácilmente $MM_a = 2MS$ y por tanto (segmentos correspondientes en el triángulo grande ABC) $M_a = 2MM_a$. Así resulta que MM_b corta a AM_a en M, que está a doble distancia de A que de M_a. Haciendo lo mismo con M_cC, resulta que CM_c corta también a AM_a en un punto que está a doble distancia de A que de M_a, es decir, corta a AM_a en el mismo M de antes. Por tanto, las tres medianas se cortan en un punto M. Hemos demostrado con esto lo que antes habíamos comprobado con pliegues.

Antes de hacer trata de entender

De los cuatro puntos notables, el incentro I es quizás el más especial de todos. Por un lado, conduce a la descomposición de cualquier triángulo en un trío de subtriángulos en el sentido siguiente:



$$\text{Área } (\Delta ABC) = \text{Área } (\Delta ABI) + \text{Área } (\Delta BIC) + \text{Área } (\Delta AIC) =$$
$$= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = r\frac{a+b+c}{2} = rs\,,$$

donde $\frac{a+b+c}{2}$ se denomina semiperímetro del ΔABC. En otras palabras, el área de cualquier triángulo es el producto de su semiperímetro y su "inradio" (el radio del círculo inscrito). Además de tener importancia por derecho propio, esta propiedad es fundamental para visualizar y probar la **fórmula de Herón**.

El incentro tiene mayor significado. Nos remitimos a las últimas figuras de arriba. Debido a que IA no solo divide en dos el $\angle BAC$, sino que además es la hipotenusa compartida de triángulos rectángulos ΔIHA y ΔIKA, en cuanto vemos que son congruentes se siguen nuevas relaciones. Vemos que $y = AH = AK$. Los argumentos de congruencia análoga nos permiten introducir $y = BK = BJ$ y $z = CH = CJ$.

Pero hay más. Claramente $a = z + y$, $b = z + x$, $c = x + y$. Por lo tanto,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{y+z+x+z+x+y}{2} = x+y+z\,.$$

Por consiguiente,

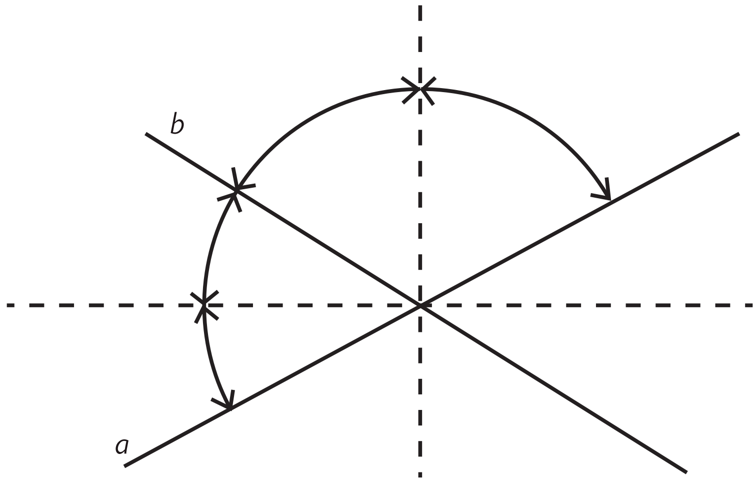
$$s - a = x \qquad s - b = y \qquad s - c = z$$

Todo esto, aunque sin el beneficio de la notación algebraica moderna, era conocido por los griegos.

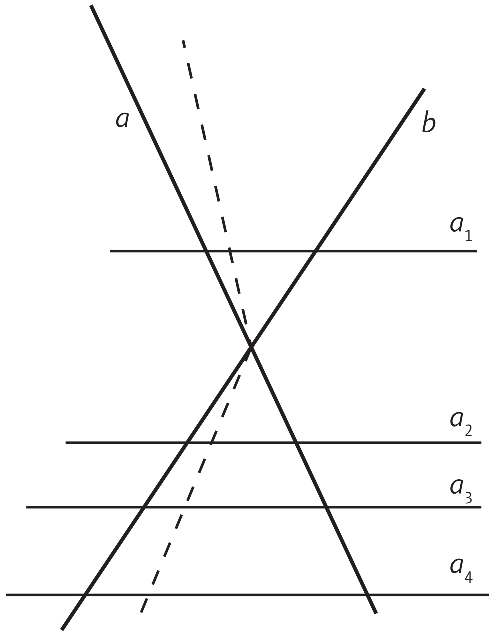
Creemos que con este material las Secretarías Regionales de la Olimpiada podrán organizar **Festivales de Problemas** e invitar a los alumnos del profesorado y exolímpicos al desafío de encontrar más Leñitas Geométricas para el espectáculo.

Algunos modelos para las construcciones geométricas

a. Visualizar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas dadas. Veamos que los puntos pedidos están sobre dos rectas perpendiculares entre sí y bisecan el ángulo que forman.



b. El lugar geométrico de los puntos que dividen en una relación $\frac{m}{n}$ los segmentos de paralelas comprendidos entre los lados de un ángulo. Evidentemente se compone de dos rectas que pasan por el vértice y por los puntos situados sobre una cualquiera de las secantes paralelas que están en la relación dada.



FE DE ERRATA

En Leñitas Geométricas N° 2, en página 4, último renglón, donde dice: $\frac{c}{d}=\frac{c}{d-c}$, debe decir: $\frac{c}{d}=\frac{d-c}{c}$

Para visualizar

1. Hallar un punto que se encuentre a la distancia m de un punto fijo A y a la distancia n de otro punto B dado.
2. Hallar un punto que se encuentre a las distancias m y n de dos rectas dadas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.
3. Determinar sobre una circunferencia un punto que se encuentre a una distancia dada m de una recta fija $\overleftrightarrow{XY}$.
4. Desde un punto dado A, trazar una tangente a la circunferencia dada con centro O.
5. Encontrar un punto X equidistante de tres puntos dados A, B, C.