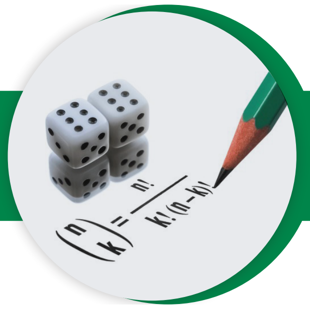
Leñitas Geométricas*
para el Fogón Matemático de los Festivales
De OMA para Profesores y Maestros en actividad
6ª época ✈ Nº 1
14 de marzo de 2024

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

Apartado I. ANÁLISIS COMBINATORIO



Introducción

Las más diferentes especialidades y sus técnicas deben resolver problemas relacionados con qué y cómo se consideran unas u otras combinaciones, formadas por letras, cifras u otros objetos, para su tratamiento. Ahora bien, el punto es hallar cómo se deben distribuir varios tipos de trabajos entre los terrenos de los cuales se dispone; por ejemplo, el agrónomo, cómo distribuir la siembra de los cultivos agrícolas. En otras áreas: el director de la parte docente de una escuela, cómo confeccionar los horarios de las clases en los distintos cursos y en las aulas; o cómo considerar las distintas variantes del significado de las letras en un idioma desconocido para el lego. La parte de la matemática que estudia los problemas acerca de cuántas combinaciones diferentes, sometidas a unas u otras condiciones, se pueden formar con objetos dados se denomina *combinatoria*.

Aventuras colectivas del pensamiento matemático. Jugando con el azar

La combinatoria surgió en el siglo XVI. En la vida de las capas privilegiadas de la sociedad de entonces, ocupaban un gran lugar los juegos de azar. Jugando a las cartas y a los dados se ganaban y perdían oro y brillantes, palacios y estancias, caballos de raza y adornos costosos. Era el mundo cortesano y su cultura.

---

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

Estaban muy difundidas las loterías de lo más variadas. Es comprensible, pues, que al principio los problemas combinatorios fueran fundamentalmente sobre los juegos de azar, en un intento por averiguar de cuántas maneras se puede obtener un número dado de tantos al arrojar dos o tres dados, o de cuántas formas se pueden obtener dos reyes en un juego de cartas. Estos y otros problemas de los juegos de azar fueron la fuerza motriz del progreso de la combinatoria y de la teoría de las probabilidades, que se desarrolló paralelamente a aquella.

Uno de los primeros en ocuparse del recuento del número de combinaciones diferentes en el juego de los dados fue el matemático italiano Niccolò Fontana, apodado *Tartaglia*. Confeccionó una tabla que mostraba de cuántas maneras pueden caer *n* dados. Sin embargo, no tenía en cuenta que una misma suma de puntos se puede obtener de diferentes maneras (por ejemplo, 1 + 3 + 4 = 4 + 2 + 2).

Gerolamo Cardano. Su idea y su personalidad.

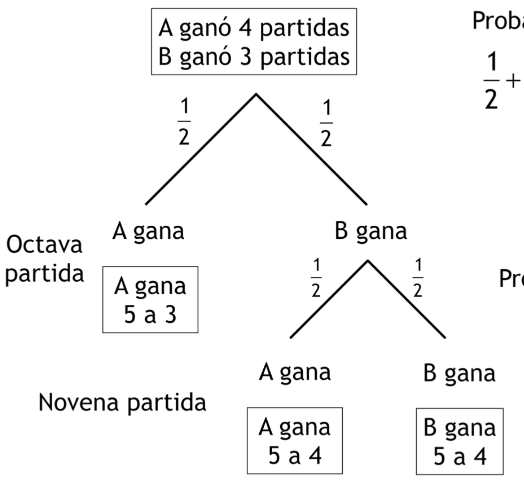
Gerolamo Cardano nació en Pavía, actual Italia, en 1501, y falleció en Roma en 1576. Fue un matemático italiano que se graduó en la Universidad de Pavía y se doctoró en medicina (1526) en la de Padua. En 1536 se trasladó a Milán, donde empezó a ejercer como profesor de matemática.

En 1539 publicó su primera obra en dicha materia, *Práctica de matemática y mediciones individuales*, en la que recogió el contenido de sus clases. Ese mismo año fue admitido en la facultad de medicina, de la que al poco tiempo fue nombrado rector. En 1543, ya con una sólida fama como médico (a él se debe la primera descripción clínica de la fiebre tifoidea), se trasladó de nuevo a Pavía.

Dos años después publicó su obra científica más importante, el *Ars magna*, donde realizó un exhaustivo estudio de las ecuaciones de tercer grado o cúbicas, en la que se ofrece la regla para su resolución y que lleva su nombre. Por la publicación de dicho resultado fue duramente criticado por el también matemático Tartaglia, quien se lo había revelado con la condición de que lo mantuviera en secreto y no lo divulgara; no obstante, Cardano, al descubrir otra fuente que contenía dicha regla, se creyó liberado de su promesa.

Otra obra suya de importancia fue el *Libro sobre juegos y azar*, en la cual ofreció la primera aproximación sistemática a la teoría de la probabilidad y enunció la ley de los grandes números, resultados todos ellos que no serían abordados de nuevo hasta un siglo más tarde por Blas Pascal y Pierre de Fermat. Publicó asimismo títulos de contenido filosófico, como *La sutileza de las cosas*, que fueron muy leídos en su tiempo.

Como lo señalamos, el estudio teórico de los problemas combinatorios fue abordado en el siglo XVII por los científicos franceses Pascal y Fermat. El punto de partida de sus investigaciones también lo constituyeron problemas de los juegos de azar. Un papel particularmente grande lo jugó aquí el problema sobre la división de la apuesta, que fue propuesto a Pascal por su amigo, el Caballero de Meré, un jugador apasionado.



Probabilidad de que A gane:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ Por lo tanto, A debe cobrar:

$$\frac{4200\times 3}{4}=3150\text{ FF}$$

Probabilidad de que B gane:

$\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ Por lo tanto, B debe cobrar:

$$\frac{4200\times 1}{4}=1050\text{ FF}$$

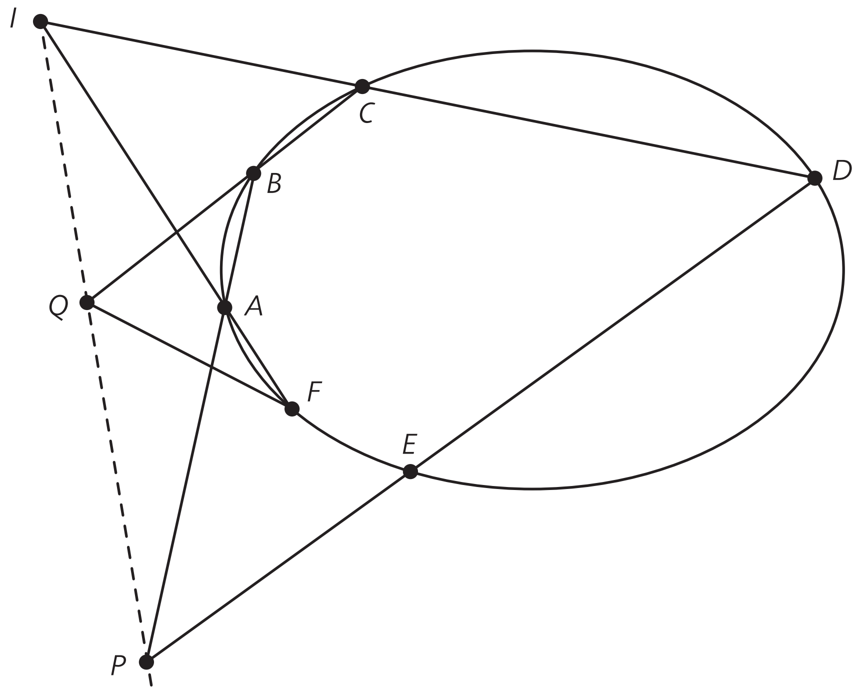
El problema era el siguiente: un campeonato de cara y cruz continuaría hasta que se ganasen seis partidos. Pero se interrumpía cuando un jugador ganaba 5 partidos y el otro, 4; "¿cómo dividir la apuesta?". Era evidente que la división según la razón 5 : 4 no era justa. Aplicando los métodos de la combinatoria, Pascal resolvió el problema para el caso general, cuando a un jugador le quedan r partidos hasta que gane y al otro, s. Otra resolución del problema la dio Fermat.

Blas Pascal

Girard Desargues fue el verdadero profeta de la geometría proyectiva, pero no recibió en sus días los honores correspondientes debido, principalmente, a que su discípulo más prometedor, Blas Pascal, abandonó la matemática por la teología. Pascal fue un auténtico prodigio para la matemática. Su padre había mostrado ya una fuerte vocación matemática y, de hecho, el *caracol de Pascal* es una curva llamada así en honor al padre, Étienne, y no al hijo, Blas. El *caracol* $r = a + b \cos \theta$ ya lo había conocido Jordano Nemorario, y posiblemente incluso los antiguos, como la *conchoide del círculo*, pero Étienne Pascal estudió esta curva de una manera tan concienzuda que, a sugerencia de Gilles de Roberval, lleva su nombre desde entonces. Se dice que Étienne, al principio, trató de mantener a su hijo alejado de los libros de matemáticas, con el objeto de estimular al joven Blaise a desarrollar otros intereses, pero a la edad de 12 años el muchacho demostraba ya tal grado de inteligencia geométrica que, en adelante, se favoreció su inclinación matemática.

A los 14 años Blas acompañaba ya a su padre a las reuniones informales de la "Academia de Mersenne" en París. Aquí fue donde se familiarizó con las ideas de Desargues. Así, dos años más tarde, en 1640, el joven Pascal, que contaba entonces con 16 años, publicó su "Ensayo sobre las cónicas". Este artículo consistía en una única página impresa, pero sin duda una de las páginas más fecundas de la historia. En ella aparece la proposición que el autor describe como el *hexagrama místico*, y que se conoce desde entonces como *teorema de Pascal*.

Este teorema afirma, esencialmente, que los pares de lados opuestos de un hexágono arbitrario inscrito en una cónica se cortan en tres puntos alineados. En realidad, Pascal no formuló su teorema de esta manera, puesto que no es cierto salvo que, como en el caso de un hexágono regular inscrito en una circunferencia, se consideren los puntos del infinito y la recta del infinito del plano proyectivo. En lugar de ello, Pascal siguió el lenguaje especial de Desargues, diciendo que si A, B, C, D, E y F son los vértices sucesivos de un hexágono inscrito en una cónica, y si P es el punto de intersección de AB y DE, y Q el punto de intersección de BC y EF, entonces PQ, CD y AF son rectas "del mismo orden" (o, como diríamos hoy, son rectas de un mismo haz, ya sea un haz puntual o un haz de rectas paralelas).



El joven Pascal continúa diciendo que ha deducido muchos corolarios de este teorema, incluida la construcción de la tangente a una cónica por un punto de ella. (La construcción de la tangente que pasa por un punto P de la cónica se obtiene con facilidad si se recuerda que la tangente es una recta que pasa por "dos puntos consecutivos" de la curva y se aplica el teorema de Pascal a estos dos y a otros cuatro puntos cualesquiera de la cónica). El origen de la inspiración que llevó a Pascal a escribir este pequeño ensayo es reconocido por él con toda franqueza, ya que después de citar el teorema de Desargues escribe: "Quiero decir que debo lo poco que he descubierto sobre este tema a sus escritos".

Mientras Pascal se encontraba trabajando en sus cónicas, en 1654, su amigo el Caballero de Méré le planteó algunas cuestiones como la siguiente: en ocho lanzamientos sucesivos de un dado un jugador intenta obtener un uno, pero el juego se interrumpe después de tres intentos fallidos. ¿En qué proporción debe ser compensado el jugador? Pascal escribió a Fermat sobre este problema, y la correspondencia intercambiada constituyó el verdadero punto de partida de la moderna teoría de probabilidades, pero ignorando las consideraciones de Cardano de un siglo antes. Aunque ni Pascal ni Fermat expusieron sus resultados por escrito, Christiaan Huygens publicó en 1657 un breve tratado titulado "Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados", inspirado en la correspondencia de esos dos matemáticos franceses.

Mientras tanto Pascal había relacionado el estudio de las probabilidades con el triángulo aritmético, superando en sus discusiones la obra de Cardano en tal medida que la conocida distribución triangular de números ha venido recibiendo, desde entonces, el nombre de *triángulo de Pascal*. El *triángulo* en sí databa de hacía más de 600 años, pero Pascal descubrió algunas propiedades inéditas, tales como la siguiente:

"En todo triángulo aritmético, si dos celdas son contiguas en la misma base, entonces el número que figura en la superior es al número que figura en la inferior, como el número de celdas desde la superior al extremo más alto de dicha base es al número de las que van de la inferior hasta el extremo más bajo, ambas inclusive".

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Pascal llamaba a las posiciones de la misma columna vertical "celdas del mismo rango perpendicular", y a las de la misma fila horizontal "celdas del mismo rango paralelo"; a las celdas de la misma diagonal que va de abajo a la izquierda a arriba a la derecha, "celdas de la misma base".

El método de demostración de esta propiedad es mucho más importante que la propiedad en sí, porque Pascal, en 1654, da con esto una exposición ejemplarmente clara y precisa del método de inducción matemática o inducción completa.

Ciertas indicaciones anteriores de este método pueden encontrarse en la obra de Francesco Maurolico; pero Pascal tenía una habilidad excepcional para clarificar conceptos, de ahí que comparta con Fermat y otros el mérito de haber desarrollado el razonamiento por recurrencia. El nombre mismo de **inducción matemática** parece haber tenido su origen mucho más tarde, en el artículo de Augustus De Morgan sobre "Inducción (matemática)": Todo número entero se compone de uno, dos o tres números triangulares; de uno, dos, tres o cuatro cuadrados; de uno, dos, tres, cuatro o cinco pentagonales; de uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis hexagonales, y así hasta el infinito.

No obstante, Pascal, que era un diletante a la vez que un virtuoso de la matemática, no se habría concentrado en este problema. Sí se dedicó, en cambio, a investigar otro problema de teoría de números que se discutió mucho en esa época: encontrar una fórmula para la suma de las potencias m-ésimas de los n primeros números naturales, problema que él relacionó con el triángulo aritmético, con el método de razonamiento por recurrencia y con el análisis infinitesimal. La fórmula obtenida viene expresada verbalmente, como solía hacerlo Pascal, pero en simbolismo moderno es equivalente a

$$C_1^{m+1}\sum i^m + C_2^{m+1}\sum i^{m-1} + \ldots + C_1^{m+1}\sum i = (n+1)^{m+1} - (n+1),$$

donde todas las sumas están tomadas de $i = 1$ a $i = n$. A partir de esta fórmula, él demostró fácilmente lo equivalente a la bien conocida fórmula del cálculo:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

El desarrollo ulterior de la combinatoria estará ligado a los nombres de Jacob Bernoulli, Gottfried Leibniz y Leonhard Euler. Sin embargo, también para ellos el papel fundamental lo jugaban las aplicaciones a diferentes juegos (lotería, solitarios y otros). En los últimos años, la combinatoria entró en un periodo de intenso desarrollo relacionado con el crecimiento general por el interés hacia los problemas de la matemática discreta. Los métodos combinatorios son aplicados a la resolución de problemas de transporte, en particular, problemas sobre la confección de horarios; también para la elaboración de planos destinados a la producción y realización de obras. Fueron establecidos nexos entre la combinatoria y problemas de la programación lineal, la estadística, etc. La combinatoria es utilizada para confeccionar y descifrar claves y para resolver otros problemas del área de la informática.

Asimismo, los métodos combinatorios juegan un gran papel en problemas puramente matemáticos: en la teoría de los grupos y de sus representaciones, en el estudio de los fundamentos de la geometría, en las álgebras no asociativas, etc. En este primer apartado de la sexta época de *Leñitas Geométricas*, se relatan los problemas combinatorios en forma entretenida, de divulgación. No obstante, se analizan algunos problemas combinatorios bastante complejos y se ofrecen conceptos sobre los métodos de las relaciones de ocurrencia y las funciones generatrices.

¿Cómo contar sin enumerar? Estrategias, historias y ejemplos.

Siguiendo la propuesta de Naun Y. Vilenkin, matemático ruso especialista en *teoría de la representación,* el primer capítulo que se presenta a continuación sobre análisis combinatorio estará dedicado a las reglas generales de la combinatoria o las reglas de suma y de producto. En el Capítulo II estudiaremos los arreglos, permutaciones y combinaciones. Este material tradicional va acompañado del análisis de algunos ejemplos motivadores. En el tercer capítulo expondremos problemas combinatorios a los cuales se les imponen ciertas restricciones en las combinaciones. En el Capítulo IV se considerarán los problemas sobre la partición de números y se relatarán los métodos geométricos utilizados en la combinatoria. El quinto estará dedicado a problemas sobre los distintos lanzamientos aleatorios y a distintas modificaciones del triángulo aritmético. En el Capítulo VI se tratarán las relaciones de recurrencia; y finalmente, en el VII, las funciones generatrices y, en particular, la fórmula binómica.

Capítulo I.
Reglas generales de la combinatoria

Los ciclistas supersticiosos

"¡Otra vez un ocho! –exclamó amargamente el presidente del club de ciclistas, mientras observaba la rueda torcida de su bicicleta–. Y todo ¿por qué? Porque al ingresar al club me dieron el carnet número 008. Y ahora no pasa un mes sin que por una u otra cosa aparezca un ocho. Hay que, cambiar el número de la credencial. Y, para que no me acusen de superstición, hago un nuevo registro de todos los miembros del club, otorgando solamente tarjetas con números en los que no figure ningún ocho".

Dicho y hecho: al día siguiente cambió todos los carnets. ¿Cuántos miembros había en el club si se sabe que fueran utilizados todos los números de tres cifras que no contienen ningún ocho? (Por ejemplo, el 000 fue utilizado, y el 836, no).

Para resolver este problema determinemos primero cuántos números de una cifra no contienen ochos. Estimamos que hay nueve números así: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (el número 8 se omite). Hallemos ahora todos los números de dos cifras que no contengan ochos. Los podemos formar así: se toma cualquiera de los números de una cifra hallados y se escribe después de este cualquiera de las nueve cifras admisibles. Como resultado, de cada número de una cifra obtendremos nueve de dos cifras. Y como los números de una cifra son también nueve, se obtendrán 9 . 9 = 81 números de dos cifras sin ochos. A continuación, las nuevas cifras admisibles.

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39

40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49

50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59

60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69

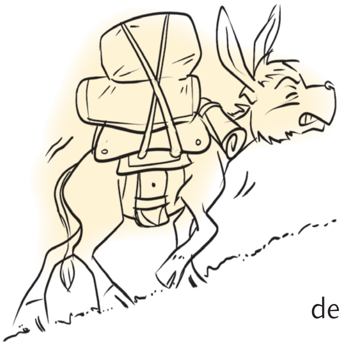
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99

Como resultado, obtenemos $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ números de tres cifras sin ningún 8. Esto significa que en el club había 729 ciclistas. Si tomamos no los números de tres cifras, sino los de cuatro, habría $9^4 = 6561$ números que no contengan 8.

En otro club, los ciclistas eran aún más supersticiosos. Como el número 0 se parece a una rueda estirada, eliminaron también esta cifra, y se las arreglaban con ocho: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. ¿Cuántos miembros tenía este club, si los números de los carnets eran de tres cifras?

Este problema es semejante al que acabamos de resolver; solo que ahora tenemos nada más que ocho cifras, en lugar de nueve. Por esto, en la respuesta debemos también sustituir el 9 por el 8. En otras palabras, en el club había $8^3 = 572$ miembros.



Arreglos o variaciones con repetición

El problema sobre los ciclistas pertenece al siguiente tipo. Se dan objetos que pertenecen a n formas distintas. A partir de estos se forman todas las posibles distribuciones con k objetos cada una o, como diremos en lo sucesivo para abreviar, las k distribuciones. Además, en cada distribución pueden figurar objetos de un mismo tipo, pero dos distribuciones se consideran distintas si se diferencian entre sí por el tipo de objetos que figuran en ellas o por su orden. Tenemos que hallar el número de todas de estas distribuciones.

Las distribuciones del tipo descrito se denominan *k-arreglos con repetición de elementos de un conjunto o tipo*; el número total de los arreglos se denota mediante $\overline{A}$. En el primer problema sobre los ciclistas, el número de elementos del tipo era igual a 9 (pues tomábamos todas las cifras, a excepción del 8), y en cada arreglo (o en cada número) figuraban tres "elementos". Como fue demostrado, en este caso el número de arreglos con repetición es igual a $\overline{A_3^9} = 9^3$. [Se utiliza también la expresión *variaciones de n elementos tomados de k en k*]. Es natural suponer que, si el número de tipos es igual a n y en cada arreglo figuran k elementos, se pueden formar $\overline{A_k^n} = n^k$ arreglos con repetición.

Queremos demostrar que el número de k-arreglos con repetición de elementos de un tipo es igual a

$$\overline{A_k^n} = n^k. \qquad (1)$$

La demostración se efectúa mediante inducción completa con respecto a k: el número de elementos en el arreglo, para un valor fijo de n. Para $k = 1$, la respuesta es obvia: cada arreglo (con repetición) está formado por un solo elemento, y distintos arreglos se obtienen si se toman elementos de tipos diferentes. Pero, como el número de tipos es igual a n, también el de arreglos será igual a n. Así, pues, $\overline{A_k^n} = n^k$, en correspondencia con la fórmula (1).

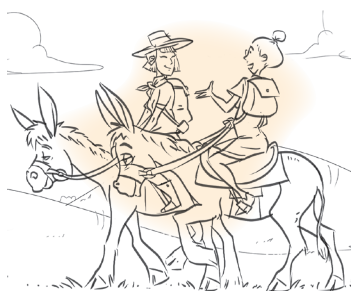
Supongamos ahora que ya fue demostrada la igualdad $\overline{A_k^n} = n^{k-1}$ y consideremos los k-arreglos con repetición. Todos estos pueden ser obtenidos de la siguiente manera. Tomemos cualquier (k – 1)-arreglo con repetición $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ y agreguémosle el elemento a_k de uno de los n tipos dados. Obtenemos cierto k-arreglo $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$, entonces queda claro que de cada (k – 1)-arreglos se obtienen tantos k-arreglos como cuantos tipos distintos de elementos hay, es decir: k-arreglos. Es evidente que, si actuamos de la forma indicada, no omitiremos ningún k-arreglo y que tampoco obtendremos ninguno repetido [si $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1})$, o si $a_k \neq b_k$, será $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$]. Por esto, el número de k-arreglos con repetición formados por elementos de n tipos es n veces mayor que el de (k-1)-arreglos con, repetición de elementos de los mismos tipos. De este modo $\overline{A_k^n} = n\overline{A_{k-1}^n}$. Pero partimos de la hipótesis de que $\overline{A_{k-1}^n} = n^{k-1}$. Por esto,

$$\overline{A_k^n} = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Con esto queda demostrada la igualdad (1) para todos los valores de k. La fórmula (1) se encuentra vigente en toda una serie de problemas. Ahora nos detendremos en algunos de ellos.

Sistemas de numeración

Además del sistema decimal de numeración, se utilizan otros: de base dos, tres, …, ocho, … En los sistemas n-ario de numeración se utilizan n cifras. Calculemos cuántos números naturales se escriben exactamente con k cifras en el sistema n-ario. Si admitimos números que comiencen con cero, cada número de k cifras en el sistema k-ario de numeración se puede considerar como un arreglo con repetición, formado por k cifras, las cuales pueden ser de n tipos. Según la fórmula (1), se obtiene que la cantidad de números de este tipo es igual a n^k.



Pero para los números naturales no se utilizan escrituras que comiencen con cero. Por esto, del valor obtenido n^k hay que restar la cantidad cuya escritura n-aria comience con cero. Si eliminamos la primera cifra de estos números (el cero), obtendremos un número de k – 1 cifras (el cual también puede comenzar con cero). Según la fórmula (1), habrá números de este tipo. Esto significa que la cantidad total de números de k cifras en el sistema n-ario de numeración es igual a:

$$n^k - n\, n^{k-1} = n^{k-1}(n-1)$$

Por ejemplo, en el sistema decimal de numeración tendremos $10^3 \cdot 9 = 9\,000$ números de cuatro cifras: de los 10 000 números desde el 0 hasta el 9 999 hay que restar mil números; precisamente, desde el 0 hasta el 999.

La fórmula obtenida se puede deducir también de otra forma. Resulta que en el número de k cifras, escrito en el sistema n-ario de numeración, la primera cifra será cualquiera de las cifras 1, 2, …, n – 1. La segunda, en cambio, es como todas las demás, cualquiera de las cifras 0, 1, 2, …, n – 1. De esta manera, tenemos (n – 1) candidatos al primer puesto y n candidatos a cada uno de los k – 1 puestos restantes. De aquí se deduce fácilmente que debe haber $(n-1)\, n^{k-1}$ números buscados.

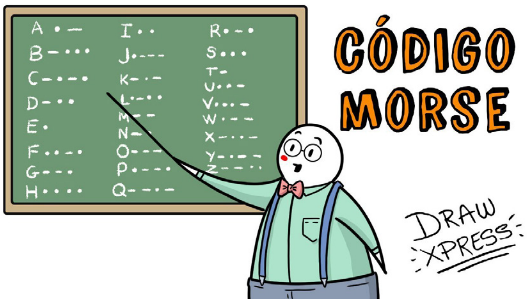
Cerraduras de combinación. Código secreto

Para cerrar cajas fuertes y cámaras automáticas para equipaje, se utilizan cierres secretos, que se abren solo empleando cierta palabra "secreta". Esta palabra se forma mediante una o varias letras (o cifras) que se pueden transmitir en varios discos en los cuales se han escrito letras o signos. Supongamos que en el disco se han escrito 12 letras, y la palabra secreta está formada por 5 letras. ¿Cuántas pruebas infructuosas pueden ser efectuadas por una persona que desconozca la palabra secreta? Según la fórmula (1), el número total de combinaciones es igual a

$$12^5 = 248\,832.$$

Esto significa que puede haber 248 831 pruebas infructuosas. A propósito, por lo común las cajas fuertes se hacen de tal forma que después de la primera prueba infructuosa de abrirlas suena una alarma.

El código morse



Para transmitir informaciones por el telégrafo, se utiliza el código Morse. En este, las letras, las cifras y los signos de puntuación se denotan con puntos y rayas. Para algunas letras se utiliza un solo signo, por ejemplo, para la letra E es un punto, y para otras hay que utilizar cinco símbolos. Por ejemplo 0 – – – – – ¿De dónde salió el número cinco? ¿No se podría tomar un número menor de símbolos y, por ejemplo, transmitir todas las informaciones mediante combinaciones que convoquen no más de cuatro signos? Resulta ser que no se puede, y la respuesta la da precisamente la fórmula para el número de arreglos con repetición. De la fórmula (1) se dedujo que $\overline{A}_1^2 = 2$.. En otras palabras, con un solo signo se pueden transmitir solamente dos letras (E y T). Mediante dos símbolos se pueden transmitir $2^2 = 4$ letras; con tres, $2^3 = 8$ letras, y con cuatro $2^4 = 16$. Por esto, el número total de letras a transmitir con cuatro signos son

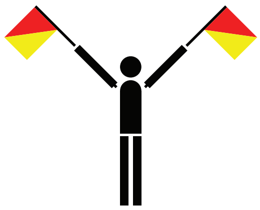
$$2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

Está claro que no bastan los símbolos de cuatro signos. En cambio, si tomamos también los símbolos de cinco signos, a los 30 obtenidos se agregarían dos más, 32. Los 32 símbolos obtenidos son totalmente suficientes para telegrafiar.

En el telégrafo se utiliza también un código de cinco signos, en el cual cada letra se representa exactamente mediante cinco símbolos. Aquí se utilizan, en lugar de puntos y rayas, cambios de sentido de la corriente, o el flujo de una señal con y sin corriente. Cuando se utiliza este código, se tienen exactamente $2^5 = 32$ combinaciones. Estas son suficientes para transmitir las letras.

Para la transmisión de las cifras, los signos de puntuación, etc., se utilizan las mismas combinaciones que para las letras. Por esto, los aparatos telegráficos de código de cinco signos emplean un dispositivo especial para hacer pasar el aparato de las letras a las cifras y viceversa.

Semáforo marino



La necesidad de comunicación hizo aparecer los telégrafos y códigos con banderas. El primer código fue dictado por el British Board of Trade en 1855. De este se deriva el Código Internacional de Señales (CIS), revisado por última vez en 1965 por la IMCO, y que tiene por objetivo principal resolver las situaciones vinculadas con la seguridad de la navegación y de las personas.

El Código Internacional de Señales está basado en banderas de señales que se utilizan en la navegación marítima para transmitir mensajes, ya sea entre dos o más barcos, o entre un barco y la tierra o el puerto.

En este código cada bandera tiene el significado de una letra, un número y una función que ocurre en una nave. Consta de veintiséis banderas alfabéticas, diez gallardetes numéricos, tres gallardetes repetidores y un gallardete característico.

Por su forma, una bandera se llama *cuadra* cuando es rectangular, *corneta* si remata en dos puntas en el lado opuesto a la vaina, y *gallardete* si es triangular.

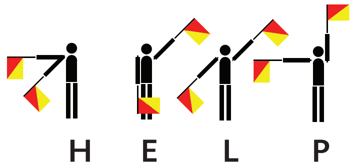
Desde que existe la radio, el uso de las banderas de señales para transmitir mensajes ha disminuido notablemente. Sin embargo, se siguen utilizando en forma generalizada las banderas individuales o en combinaciones de dos, para señalizar un aviso determinado.

Los tipos de banderas han sido muchísimos en la marina. Como ejemplo la Bandera de Castigo: Era la bandera roja izada en el tope del palo mayor y acompañado con un cañonazo que se disparaba al tiempo que se aplicaba algún castigo en una escuadra.

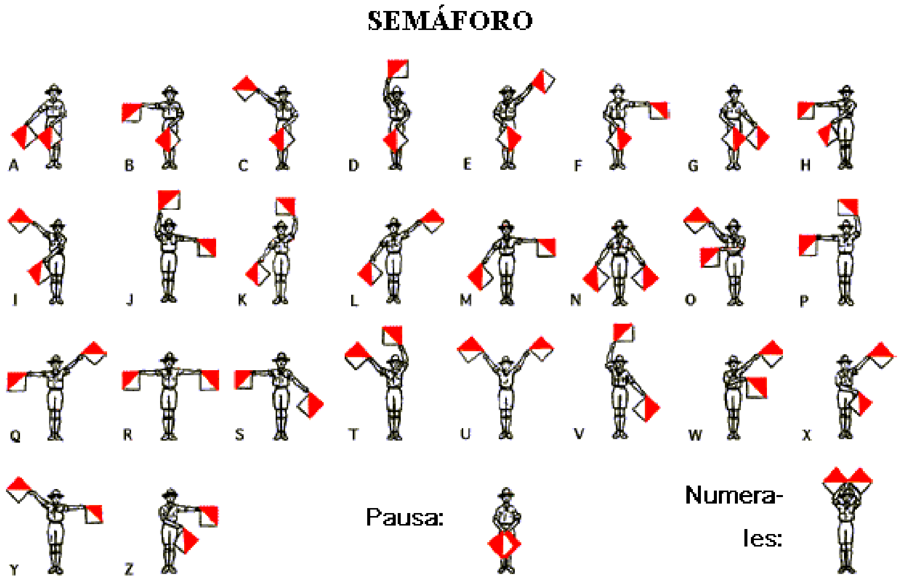
El uso de las banderas marítimas, exceptuadas las nacionales de cada país, los códigos secretos de las marinas militares y algunas señales particulares de ciertos puertos, se rige mundialmente por este código que comprende el conjunto de reglas que emplean los buques para comunicarse entre sí y con las estaciones costeras.

El juego de banderas del CIS es de uso reglamentario y obligatorio para todos los buques, a bordo de los cuales debe tenerse la colección completa de banderas, más el texto del código. Los barcos deportivos solamente están obligados a disponer de la tabla de lectura, aunque muchos de ellos disponen del juego de banderas para su uso o empavesado.

En la marina se utiliza a veces un semáforo de banderines. A cada letra le corresponde aquí una posición determinada de los banderines. Por regla general, estos se hallan en lados opuestos con respecto al cuerpo del que señala. Sin embargo, en la transmisión de ciertas letras (H, I, W, X, Z) ambos banderines están situados en un mismo lado. ¿Por qué hubo que hacer esta excepción? La respuesta la da la misma fórmula de arreglos con repetición. Sucede que hoy cinco posiciones distintas de cada banderín: hacia abajo verticalmente, hacia abajo inclinado, horizontal, hacia arriba inclinado y hacia arriba en forma vertical. Como se tienen dos banderines, el número total de combinaciones de las posiciones fundamentales es $A_2^5 = 5^2 = 25$. Pero debe eliminarse la posición en que ambos banderines están dirigidos hacia abajo, que sirve para separar las palabras. En total se obtienen 24 combinaciones, lo que es insuficiente para transmitir todas las letras del alfabeto.



Por esto, para algunas letras hubo que dirigir ambos banderines hacia un mismo lado.



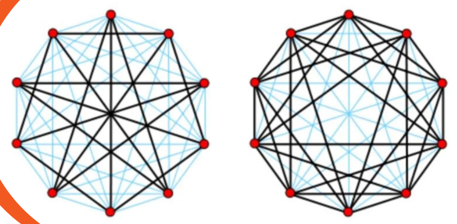
La máquina computadora electrónica digital

Las máquinas computadoras electrónicas pueden resolver distintos problemas. En una misma máquina se pueden descifrar las escrituras en idiomas desconocidos, efectuar el cálculo de una represa y elaborar los datos sobre el movimiento de un cohete. ¿Cómo se explica esta diversidad de aplicaciones de la máquina? Fundamentalmente, esto se debe a que todos esos problemas se reducen a cálculos, a operaciones con números. Pero, ¿por qué la máquina puede resolver tantos problemas y con datos numéricos de lo más variados? ¿Cuántas combinaciones diferentes de números se pueden procesar en una máquina?

Para responder a esta pregunta, tenemos, por ejemplo, la computadora Strelát. La memoria operativa de esta máquina está formada por 2 048 células, cada una de las cuales contiene 43 cifras binarias. Cada cifra puede contener 0 o 1. En total, tenemos 43 × 2 048 > 87 000 lugares diferentes, siendo el número de tipos de llenado de las células igual a dos (0 o 1). Según la fórmula (1), obtenemos que la máquina "Strelá" puede hallarse en más de $2^{87\,000}$ estados diferentes. Es difícil hacerse una idea de la magnitud de este número. Es suficiente decir que el número de neutrones que se pueden empaquetar densamente en una esfera de radio igual a la distancia hasta la nebulosa más alejada que conocemos, no es mayor que 2^{500}.

Si tomásemos una sola célula de la memoria, se necesitaría el trabajo de nueve años de un ejército de cien mil mecanógrafas para imprimir todos los números que pueden surgir en esta célula (considerando que las mecanógrafas trabajan siete horas por día y que invierten 10 segundos en escribir un número de 43 cifras).

Apartado II. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS



Introducción

Al tratar el tema, el Dr. Luis Santaló decía: Toda construcción matemática parte de un conjunto de elementos y de un conjunto de operaciones que permiten relacionar estos elementos entre sí. La aritmética, por ejemplo, parte de los "números" y de las operaciones fundamentales entre ellos: suma, resta, multiplicación y división. La geometría tiene por elementos los puntos, rectas y planos; las operaciones son las "transformaciones" que permiten pasar de unos elementos a otros, por ejemplo, los movimientos, las semejanzas, las rotaciones, etc. En la geometría llamada *sintética*, los puntos, rectas y planos se definen por sus propiedades, enunciadas por un determinado sistema de axiomas. En la geometría analítica, dichos elementos aparecen como pares, ternas o conjuntos finitos de números, los que constituyen sus "coordenadas". Estos números pueden ser racionales, reales, complejos o pertenecer a conjuntos (cuerpos) más generales: en cada caso se tratará de una geometría especial. Se tiene así, junto con cada geometría, el conjunto al cual pertenecen las coordenadas de sus elementos.

Tanto en el conjunto de las coordenadas como en el de las transformaciones, para hacer geometría se necesita que sean posibles ciertas operaciones. Por ejemplo, es necesario poder sumar y multiplicar coordenadas para hallar la recta que pasa por dos puntos o para averiguar si un punto pertenece o no a una recta dada. Se necesita también poder realizar transformaciones sucesivas, lo que conduce al llamado *producto de transformaciones*. Estas operaciones que necesita la geometría han sido sistematizadas por el álgebra. Los conjuntos y las operaciones entre sus elementos han sido clasificados según sus propiedades, formando las llamadas *estructuras* algebraicas.

El objeto de este segundo apartado de la sexta época de *Leñitas Geométricas* es el estudio de las estructuras algebraicas. Se trata de aspectos preliminares que corresponden al álgebra. Por lo tanto, hemos elegido los tópicos que son más necesarios para el desarrollo del tema, prescindiendo de detalles.

I. Leyes de composición

1. Leyes de composición

Sea E un conjunto formado por ciertos elementos $a, b, c, \ldots$ en número finito o infinito. Para indicar que un elemento a pertenece a E escribiremos $a \in E$. Para indicar que E se compone de los elementos $a, b, c, \ldots$ escribiremos $E[a, b, c, \ldots]$. Si x es una variable que puede representar cualquier elemento de E, escribiremos $E[x]$. Si F es un conjunto cuyos elementos pertenecen todos a E, se dice que es un subconjunto de E y se indica $F \subseteq E$.

Los elementos *a, b, c,* … pueden tener representaciones muy diversas; pueden ser números (enteros reales, complejos o de cualquier otra clase), elementos geométricos (puntos, rectas, circunferencias…), funciones, transformaciones, etcétera.

Dados dos conjuntos $E_1[s]$, $E_2[y]$, se llama *producto cartesiano* $E_1 \times E_2$ al nuevo conjunto cuyos elementos son los pares ordenados (s, y), con el primer elemento perteneciente a E_1 y el segundo a E_2. Naturalmente que $E_1 \times E_2$ y $E_2 \times E_1$ son diferentes, excepto si $E_1 = E_2$.

Por ejemplo, si E_1 se compone de dos elementos *a, b* y E_2 de tres elementos *c, d, e*, el producto cartesiano $E_1 \times E_2$ es el conjunto cuyos elementos son los seis pares ordenados (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e); el producto $E_2 \times E_1$ se compone de los mismos pares con el orden de sus elementos invertidos. Si E es el conjunto de todos los números reales, el conjunto $E \times E$ es el conjunto de los pares de números reales; por tanto, si E se considera como representante de los puntos de una recta (dados por sus abscisas), el conjunto $E \times E$ representa los puntos del plano (dados por sus dos coordenadas cartesianas).

Para un mayor número de factores, el producto cartesiano $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_n$ se define, análogamente, como el conjunto formado por los sistemas ordenados $(x, y, ..., t)$ con $x \in E_1$, $y \in E_2$, …, $t \in E_n$.

Se llama *aplicación de un conjunto E en otro H* a toda ley de correspondencia que a cada elemento $a \in E$ hace corresponder un elemento, y solo uno, $b \in H$.

Definición 1. Dado un conjunto $E[a, b, c, ...]$, se dice que en él está definida una ley de composición cuando se tiene una ley según la cual a cada par ordenado de elementos de E le corresponde un elemento, y solo uno, del mismo E.

Más brevemente, una ley de composición en el conjunto E es una aplicación de $E \times E$ en E.

Si representamos la ley de composición por el símbolo τ, escribiremos:

$$c = b \,\tau\, a \tag{1}$$

para indicar que el elemento compuesto del par a, b es el c, o que al par ordenado a, b le corresponde el elemento c. El símbolo general τ se sustituye muchas veces por símbolos particulares, adecuados a la ley de composición de que se trate.

Ejemplos

1. Sea E el conjunto de los números naturales. Una ley de composición es la suma, o sea, la que al par a, b hace corresponder el número natural $a + b$. En este caso en vez de τ se utiliza el signo +.

   La diferencia, en cambio, no es una ley de composición que sirva para el conjunto de los números naturales, puesto que la diferencia de dos de ellos puede no pertenecer al conjunto. Si E es el conjunto de los números enteros (positivos y negativos), la diferencia $b - a$ es otra ley de composición; en vez de τ se utiliza el signo –.

2. Si E es el conjunto de los números reales, otra ley de composición es el producto. En este caso, en vez de τ se utiliza simplemente un punto, que puede también suprimirse si no hay lugar a confusión; se escribe $c = b \cdot a$.

3. Sea ahora E el conjunto de los puntos del plano. Una ley de composición es la que hace corresponder a cada par a, b el punto medio c del segmento que lo une.

4. Sea C un conjunto fijo. Consideremos el conjunto E formado por todos los subconjuntos X, Y, Z, ... de C, inclusive el subconjunto vacío (es decir, el conjunto que no contiene ningún elemento). Una importante ley de composición es la que a cada par X, Y hace corresponder la unión o suma de los dos, o sea, el conjunto Z formado por los elementos de X más los elementos de Y. En este caso el símbolo general τ se sustituye por $\cup$ y se escribe $Z = Y \cup X$.

Otra ley de composición importante es la intersección o producto, que hace corresponder al par X, Y el conjunto Z formado por los elementos que pertenecen a la vez a X y a Y. Se representa por la notación $Z = Y \cap X$.

2. Propiedades de las leyes de composición

Las leyes de composición pueden satisfacer o no a ciertas propiedades que conviene conocer en cada caso. Las principales son las que exponemos a continuación.

Definición 2. Una ley de composición τ entre los elementos de un conjunto E se dice que es asociativa, si se verifica

$$c\,\tau\,(b\,\tau\,a) = (c\,\tau\,b)\,\tau\,a \qquad (2)$$

cualesquiera que sean los elementos a, b, c de E.

Definición 3. Una ley de composición τ entre los elementos de un conjunto E se dice que es conmutativa, si se verifica

$$b\,\tau\,a = a\,\tau\,b \qquad (3)$$

cualesquiera que sean los elementos a, b, de E.

Definición 4. Se llama *elemento neutro e* de un conjunto E, respecto de una ley de composición dada, a un elemento tal que se verifique

$$e\,\tau\,a = a\,\tau\,e = a, \qquad (4)$$

para todo $a \in E$. El elemento neutro puede o no existir.

De esta definición se deduce que el elemento neutro, si existe, es único. En efecto, si hubiese dos de ellos, e y e_1, el elemento $e\,\tau\,e_1$ debería ser tanto igual a e como a e_1 y por tanto $e = e_1$.

Cuando τ se considera como suma y se indica con el signo +, el elemento neutro se llama *elemento cero del conjunto*; y si se considera como producto, y se indica con un punto o directamente sin nada, el elemento neutro se llama *elemento unidad*.

Definición 5. Se llama *elemento simétrico* de un elemento $a \in E$, respecto de una ley de composición dada que posea el elemento neutro e, a todo $a \in E$ tal que

$$a'\,\tau\,a = a\,\tau\,a' = e. \qquad (5)$$

El simétrico de un elemento puede existir o no. Si la ley de composición se interpreta como suma, el elemento simétrico de a se suele representar por $-a$ y se llama *opuesto de a*. Si se interpreta como producto, se suele representar por a^{-1} y se llama *inverso de a*.

Definición 6. Se llama *elemento central* de un conjunto E, respecto de una ley de composición dada τ, a todo elemento que conmuta con todos los elementos de E. Es decir, x será central si se verifica:

$$x \,\tau\, a = a \,\tau\, x,$$

cualquiera que sea $a \in E$.

El conjunto de los elementos centrales constituye el centro del conjunto E respecto de la ley de composición dada. Es evidente que e, si existe, pertenece al centro. Si la ley es conmutativa, el centro coincide con el conjunto total E.

Sobre un mismo conjunto E pueden estar definidas varias leyes de composición. Sean τ_1, τ_2 dos de ellas.

Definición 7. Dadas dos leyes de composición τ_1, τ_2, sobre un mismo conjunto E, se dice que τ_1 es distributiva a la izquierda respecto de τ_2 si se verifica:

$$a \,\tau_1\, (b \,\tau_2\, c) = (a \,\tau_1\, b) \,\tau_2\, (a \,\tau_1\, c) \tag{6}$$

cualesquiera que sean los elementos a, b, c de E.

Análogamente, si se cumple:

$$(a \,\tau_2\, b) \,\tau_1\, c = (a \,\tau_1\, c) \,\tau_2\, (b \,\tau_1\, c) \tag{7}$$

se dice que τ_1 es distributiva a la derecha respecto de τ_2.

Ejemplos

Volviendo a los ejemplos de *1. Ley de composición*, se tiene:

1. La ley de composición suma para números reales (y lo mismo para enteros, racionales, complejos...) es asociativa y conmutativa; su elemento neutro es el número cero. La diferencia no es asociativa ni conmutativa; no existe para ella elemento neutro.

2. La ley de producto para números reales es asociativa y conmutativa. El elemento neutro es el número uno. Es distributiva respecto de la suma y de la diferencia.

3. La ley que a cada par de puntos del plano hace corresponder el punto medio del segmento que los une no es asociativa, pero sí es conmutativa. Carece de elemento neutro.

4. La ley de reunión de conjuntos es asociativa y conmutativa; el elemento neutro es el conjunto vacío. La ley de intersección de conjuntos es asociativa y conmutativa; el elemento neutro es el conjunto total C cuyos subconjuntos constituyen E.

5. Sea el conjunto formado por tres elementos a, b, c con la siguiente ley de composición: dos elementos diferentes, en cualquier orden, dan el tercero; dos elementos iguales dan el mismo elemento. La ley es conmutativa, por definición, pero no es asociativa, pues $(a\,b)c = cc = c$, $a(b\,c) = aa = a$, ni tiene elemento neutro.

6. Obsérvese que la definición de elemento neutro exige las dos condiciones (4). Si se exige únicamente la condición $a \,\tau\, e = a$ para todo $a \in E$, se dice que e es un elemento neutro "a la derecha"; si solamente se exige que sea $e \,\tau\, a = a$ para todo $a \in E$, e será un elemento neutro "a la izquierda". Según la definición adoptada, para nosotros los únicos elementos neutros, salvo mención explícita, serán los que lo son a la vez a la derecha y a la izquierda. Por ejemplo, para la ley de composición $x \,\tau\, y = x^y$, en el conjunto de los números reales distintos de cero, no existe elemento neutro; sin embargo, $y = 1$ es un elemento neutro a la derecha. Obsérvese que esta ley de composición no es asociativa ni conmutativa.

3. Relaciones de equivalencia

Definición 8. Se dice que entre los elementos de un conjunto E (a, b, c, . . .) se ha definido una relación de equivalencia cuando se ha dado entre ellos una relación, que representamos por ~, tal que entre dos elementos cualesquiera a, b de E se pueda decidir siempre si la relación $a \sim b$ vale o no y, además, si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $a \sim a$ (propiedad reflexiva).
2. $a \sim b$ implica $b \sim a$ (propiedad simétrica).
3. $a \sim b$ y $b \sim c$ implican $a \sim c$ (propiedad transitiva).

Toda relación de equivalencia divide a los elementos de E en clases, siendo de una misma clase todos los elementos equivalentes entre sí. Cada elemento pertenece a una y solo una clase. Estas clases se llaman *clases de equivalencia*.

Si representamos con R una cierta relación de equivalencia en el conjunto E, el conjunto de las clases de equivalencia según R, considerada cada clase como un solo elemento, se llama *conjunto cociente de E por R* y se representa E/R.

Ejemplos

1. La semejanza es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los triángulos del plano. Todos los triángulos semejantes entre sí forman una misma clase. El conjunto cociente E/R está formado por las clases de triángulos semejantes.

2. Recordemos que dos números enteros a, b se dice que son congruentes respecto de un módulo p [se escribe $a = b$ (p)] cuando dan el mismo resto al dividirlos por p, o sea, cuando $a - b$ es divisible por p. Según esto, la congruencia entre números enteros respecto de un módulo p es una relación de equivalencia en el conjunto de los números enteros. Todos los números que divididos por p dan el mismo resto pertenecen a una misma clase. El conjunto E/R , en este caso, está representado por los números enteros $0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

4. Aplicaciones entre conjuntos

Aunque el concepto de aplicación entre conjuntos ya fue utilizado en 1. *Ley de composición*, para lograr mayor precisión vamos a reunir las siguientes definiciones.

Definición 9. Dados dos conjuntos S, S', se llama *aplicación* de S en S' a toda regla o ley por la cual a cada elemento x de S le corresponde un elemento y uno solo x' de S'.

El conjunto S se llama el *dominio de la aplicación*, y al S', su *codominio*. El elemento x' se llama *imagen de x*. [Algunos autores llaman al codominio también "recorrido" o "rango" de la aplicación].

Si una aplicación se representa por σ, se escribe

$$x' = \sigma(x)' \text{ o bien: } x^{\sigma} = x'.$$

Y también es cómoda la notación

$$a : x \rightarrow x'.$$

Se dice también que σ es una función definida en S con valores en S'.

Si U es un subconjunto de S y el conjunto de los $x' = \sigma(x)$ para $x \in U$ se representa por U', se escribe

$$U' = \sigma(U), \text{ o bien, } \sigma : U \rightarrow U',$$

y se dice que U' es la imagen de U.

Para todo subconjunto U' de S', el conjunto de elementos x de S tales que $\sigma(x) \in U'$ constituye la imagen inversa de U' y se representa por $\sigma^{-1}(U')$. Naturalmente que $\sigma^{-1}(U')$ puede ser el conjunto vacío.

Definición 10. Una aplicación $\sigma : S \rightarrow S'$ se dice que es:

a) **Sobreyectiva** o simplemente "**sobre**", si $\sigma(S) = S'$, es decir, si las imágenes de los puntos de S cubren todo S'.

b) **Inyectiva**, si $\sigma(x) = \sigma(r)$ implica $x = y$, es decir, si ningún punto de S' puede ser imagen de más de un punto de S.

c) **Biyectiva**, si es **sobreyectiva** e **inyectiva** a la vez. En este caso se dice también que es una aplicación o una correspondencia biunívoca. [Algunos autores llaman *aplicaciones* o *correspondencias biunívocas* a las inyectivas; sin embargo, parece más natural y es también muy corriente adoptar el criterio considerado].

En este último caso está definida la aplicación inversa $\sigma^{-1} : S' \rightarrow S$, que a cada $x' \in S'$ hace corresponder el elemento $x \in S$ tal que $\sigma(x) = x'$. Se escribe $x = \sigma^{-1}(x')$.

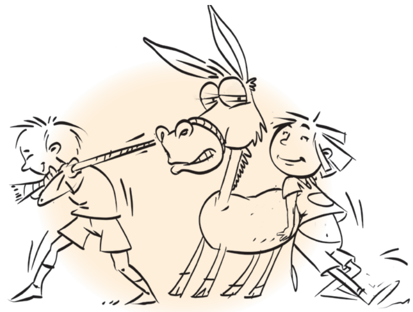
La aplicación inversa solamente está definida para las aplicaciones biyectivas o biunívocas; para las demás aplicaciones puede haber elementos $x \in S'$ que no sean imagen de ningún elemento de S, o bien que sean imagen de más de uno de ellos; en ambos casos σ^{-1} no está definida.

Definición 11. Si S, S' tienen elementos comunes, se llaman *elementos unidos* de una aplicación $a : S \rightarrow S'$ a los elementos que coinciden con su imagen, es decir, a los elementos x tales que $\sigma(x) = x$.

Si $S = S'$, se llama *aplicación idéntica* o *identidad* a la que tiene todos sus elementos unidos, es decir, a la que hace corresponder cada elemento de S a sí mismo. La representaremos en general por e, de manera que será $x = e(x)$ para todo $x \in S$.

Si $S \subset S'$, la restricción de la identidad a S se llama la *inyección natural* de S en S'.

Composición de aplicaciones



Definición 12. Dadas dos aplicaciones

$$\sigma_1 : S \rightarrow S';\ \sigma_2 : S' \rightarrow S'',$$

la primera entre los conjuntos S y S' y la segunda entre los S' y S'', la aplicación de S en S'' que resulta al efectuar sucesivamente las dos aplicaciones se llama la *aplicación compuesta* o *composición* de σ_1 y σ_2. Se representa

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 : S \rightarrow S''.$$

Si σ_1; σ_2 son aplicaciones biyectivas, también lo es la $\sigma_2 \circ \sigma_1$, y entonces

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1} = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1},$$

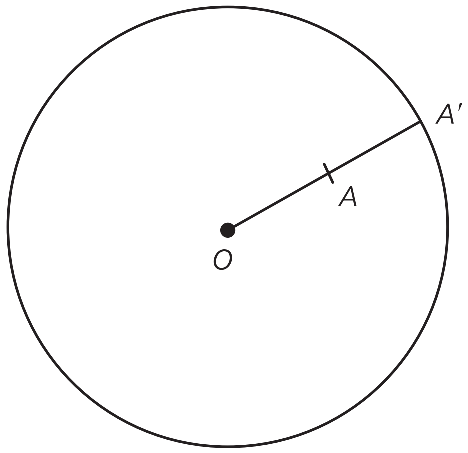
como se comprueba de inmediato.

Los conjuntos S, S', S'' pueden ser distintos o coincidentes. Por recurrencia se define la composición de varias aplicaciones; es importante observar que, por la misma definición, que solamente admite una interpretación, la composición de aplicaciones es siempre asociativa, es decir:

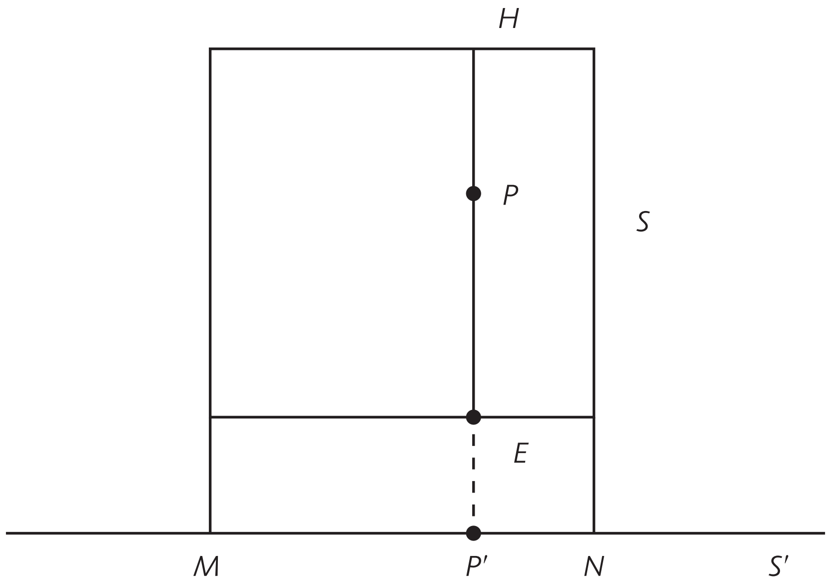
$$(\sigma_3 \circ \sigma_2) \circ \sigma_1 = \sigma_3 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$$

Ejemplos

1. Sea S el conjunto de los puntos del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ excepto el origen O, y S' el conjunto de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La aplicación que a cada punto A de S le hace corresponder su proyección A' desde O sobre S', es una aplicación *sobre*. Todos los puntos de S' son unidos. Para cada A' de S' el conjunto $\sigma^{-1}(A')$ está formado por los puntos del radio OA' excepto el origen como muestra la figura:



2. Sea S un cuadrado y S' una recta de su plano paralela a uno de los lados si es paralela a uno de los lados es paralela a 2 de los lados porque es un cuadrado. Si a cada $P \in S$ se le hace corresponder su proyección ortogonal P' sobre S' se tiene una aplicación σ de S en S' que no es *sobre*. El conjunto $\sigma^{-1}(P')$ es todo el segmento EH de S que se proyecta sobre P', si P' pertenece a $\sigma(S)$ (segmento MN de la figura siguiente),



y es el conjunto vacío si P' no pertenece a $\sigma(S)$.

3. Si $S = S'$ es el conjunto de los números naturales, la aplicación $\sigma : n \to n^2$ no es sobre pero es inyectiva, pues si $n^2 = n_1^2$, es $n = n_1$. Si $S = S'$ es el conjunto de los números reales no negativos, $\sigma : x \to x^2$ es una aplicación biyectiva, o correspondencia biunívoca. Si $S \equiv S'$ es el conjunto de todos los números reales, la misma σ no es inyectiva ni sobre. En todos los casos, los únicos puntos unidos son 0 y 1.

4. Si S es el conjunto de los números complejos z y S' el conjunto de los números reales, la aplicación $\sigma : z \to |z|$ no es sobre, ni inyectiva. Si S' es el conjunto de los números reales positivos, la aplicación es sobre.

5. Si E_1, E_2 son dos conjuntos cualesquiera, la aplicación $\pi_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$ que a cada par (a, b) de $E_1 \times E_2$ hace corresponder el primer elemento a, llama la proyección de $E_1 \times E_2$ sobre E_1. Otra proyección es $\pi_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$ que a cada par (a, b) hace corresponder el segundo elemento b.

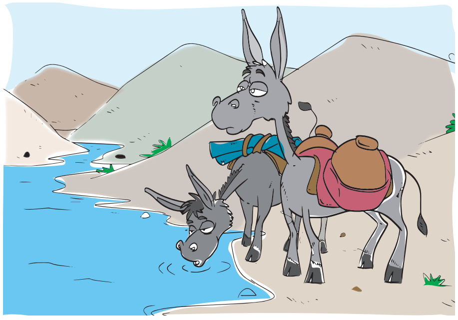
6. La aplicación (a, b) (b, a) de $E_1 \times E_2$ en $E_2 \times E_1$ es una correspondencia biunívoca.

7. La aplicación $\sigma :\to \dfrac{(3x-1)}{x+2}$ es una aplicación de la recta real sobre sí misma (incluido el punto del infinito). La transformación inversa es $\sigma^{-1} : x \to \dfrac{(2x+1)}{3-x}$.

8. Toda aplicación $\sigma : S \to S'$ permite dividir S en clases de equivalencia, conviniendo en que $x, y \in S$ son de la misma clase si $\sigma(x) = \sigma(y)$. Efectivamente, todo elemento de S pertenece a una de estas clases y se cumplen las propiedades del punto 3.

Aventuras colectivas del pensamiento matemático

La aparición del álgebra abstracta. ¿Cómo y cuándo empezó?



Alfred North Whitehead, 15 de febrero de 1861-30 de diciembre de 1947, matemático y filósofo inglés. Se lo reconoce como la figura que definió la escuela filosófica identificada como *filosofía del proceso*, la cual ha encontrado aplicación en una gran variedad de disciplinas, entre ellas la ecología, la teología, la educación, la física, la biología, la economía y la psicología. En la OMA inspiró algunos de los documentos más importantes, sobre todo su libro *The Aims of Education and Other Essays* (*Los propósitos de la educación*). Respecto de la aparición de las álgebras abstractas sentenció: “No supone ninguna paradoja decir que en nuestras especulaciones más teóricas podemos estar lo más próximos posible a nuestras aplicaciones más prácticas”.

La Edad de Oro de la matemática

El siglo XIX merece ser llamado, más que ningún otro período anterior de la historia, la Edad de Oro de la Matemática. Los progresos hechos en la matemática durante esos cien años superan con mucho, tanto en cantidad como en calidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores. Ese siglo fue también, con la posible excepción de la Época Heroica en la antigua Grecia, el más revolucionario de la historia de la matemática. En 1829 se descubrió un mundo nuevo en la geometría, por obra de Nikolái Lobachevski, un matemático ruso discípulo de un profesor alemán, y en 1874 el dominio del análisis se vio conmocionado por la matemática del infinito que acababa de introducir Georg Cantor, un matemático alemán que había nacido en Rusia.

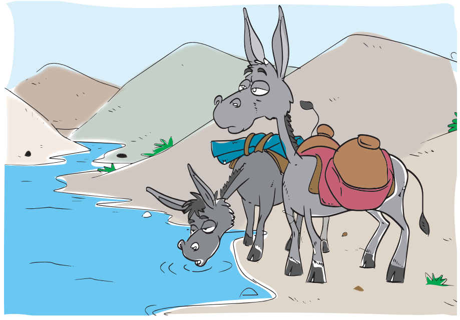
Ya no era Francia el centro reconocido del mundo matemático, aunque produjera la meteórica carrera de un Évariste Galois (1811-1832). El carácter ya irreversiblemente internacional de la matemática queda de manifiesto en el hecho de que las dos contribuciones más revolucionarias al álgebra, en 1843 y 1847, las hicieron dos matemáticos que enseñaban en Irlanda. La primera de ellas fue obra de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) y la segunda de George Boole (1815-1864). No obstante, los algebristas más prolíficos del siglo XIX fueron dos ingleses que vivieron parte de su vida en Estados Unidos; se trata de Arthur Cayley (1821-1895) y de James Joseph Sylvester (1814-1897), y fue principalmente de su *alma mater*, Cambridge, de donde surgió el desarrollo del álgebra moderna.

Durante los primeros años del siglo XIX la Universidad de Cambridge era un centro del que uno difícilmente hubiera esperado nuevos descubrimientos matemáticos. Bien es verdad que cien años antes había sido el *alma mater* de Sir Isaac Newton, pero el chauvinismo y la controversia sobre la prioridad en la invención del cálculo los habían conducido a un profundo aislamiento intelectual que más tarde pagaron caro los ingleses. Las universidades escocesas mantuvieron a lo largo del siglo XVIII un contacto más estrecho con la Europa continental que las inglesas, pero las primeras tenían un nivel comparativamente más bajo en matemática que en biología y en química.

Cuando Carl Gustav Jacobi visitó Cambridge en 1842, le preguntaron acerca de quién era el más grande matemático inglés vivo, a lo que al parecer contestó: “No hay ninguno”. Desde luego, en esa época, además de una descortesía, era un juicio excesivamente duro. Sin embargo, es cierto que una generación antes, en Inglaterra en general y en Cambridge en particular, no había siquiera la menor conciencia de los enormes pasos que se habían dado tanto en análisis como en geometría en la Europa continental. Quizá fue por esta razón que, cuando Inglaterra logró salir de la trampa del provincianismo, pasó a ocupar el primer lugar en el desarrollo del álgebra, ya que en este campo los progresos que se habían hecho en el continente durante el siglo XVIII no habían sido tan espectaculares.

La matemática en Cambridge

El momento decisivo para la matemática inglesa tuvo lugar en 1815, cuando se constituyó la Analytical Society en el Trinity College, en Cambridge, de la que ya hemos hablado anteriormente, constituida por tres jóvenes cantabrigenses: el algebrista George Peacock (1791-1858), el astrónomo John Herschel (1792-1871) y Charles Babbage (1792-1871), famoso por sus "máquinas calculadoras". La finalidad inmediata de la Society fue reformar la enseñanza y la notación del cálculo infinitesimal; por ello, cuando Peacock fue nombrado en 1817 examinador de los famosos tripos en matemáticas, la notación diferencial pasó a sustituir al simbolismo fluxional en los exámenes de Cambridge.



El propio Peacock se había graduado en Cambridge y más tarde fue profesor de esta universidad, siendo el primero de los muchos colegiales del Trinity College que iban a destacarse en el desarrollo del álgebra. Se graduó como segundo *wrangler*, es decir que obtuvo el segundo puesto en los exámenes tripos (que comenzaron a celebrarse en 1725) para estudiantes que se habían especializado en matemáticas, siendo primer *wrangler* Herschel, otro de los fundadores de la Analytical Society. Peacock fue un administrador y reformador entusiasta, y tomó parte muy activa en la reforma de los estatutos de la universidad y en la fundación de la Astronomical Society of London, de la Philosophical Society of Cambridge y de la British Association for the Advancement of Science, la última de las cuales sirvió de modelo para la American Association for the Advancement of Science. Los últimos veinte años de su vida los pasó ocupando el puesto de deán de la catedral de Ely.

Peacock no produjo ningún nuevo resultado de importancia destacada en matemáticas, pero jugó un papel relevante en el proceso de reforma de esta ciencia en Inglaterra, especialmente en lo que se refiere al álgebra. En Cambridge había dominado una tendencia conservadora tanto en álgebra como en análisis y geometría; mientras los matemáticos del continente desarrollaban la representación gráfica de los números complejos, en Inglaterra se oían declaraciones en las que se negaba validez incluso a los números negativos.

En un esfuerzo por justificar los puntos de vista más generales en álgebra, Peacock publicó en 1830 su *Treatise on Algebra*, en el que intentaba darle al tema una estructura lógica comparable a la de los *Elementos* de Euclides. En esta obra trataba de formular, con escaso éxito según los cánones modernos, las leyes fundamentales de la aritmética: las leyes conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y la distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, aunque sin utilizar estos nombres modernos.

Este planteamiento, ampliado más tarde a una obra en dos volúmenes (1842-1845), señala los comienzos del pensamiento axiomático aplicado a la aritmética y al álgebra. En el primer volumen el autor aplica las reglas a los números, en lo que él llama *álgebra aritmética*; en el segundo volumen, dedicado al *álgebra simbólica*, extiende estas reglas al estudio de las magnitudes en general.

En el *álgebra aritmética* de Peacock los símbolos + y – se entienden en su estricto significado aritmético ordinario, de modo que la expresión $a - b$ tiene significado solo si a es mayor o igual que b (ya que lo que tenía en la mente Peacock eran los números naturales). En el *álgebra simbólica* tales restricciones se eliminan; no obstante, se supone que las reglas del álgebra numérica se verifican universalmente en el nuevo sistema más abstracto: todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma, aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma.

La justificación de una extrapolación tan atrevida no aparece clara en absoluto; Peacock se limita a aceptar esto como un "principio de permanencia de las formas equivalentes", algo análogo en cierto sentido al principio de correlación que Nicolas Carnot y Jean-Victor Poncelet habían utilizado de una manera tan fructífera en geometría. Sin embargo, la forma algebraica de este difuso postulado sirvió, en un aspecto muy concreto al menos, como un freno al progreso, porque sugería claramente que las leyes del álgebra son las mismas sin importar qué clase de número u otros objetos se manejen dentro del álgebra.

Al parecer, Peacock pensaba básicamente en el sistema numérico de los enteros y en el de las magnitudes reales de la geometría (sistemas que no están regidos por las mismas leyes formales), y su distinción entre los dos tipos de álgebra no era tan diferente a fin de cuentas (después de casi 250 años) de la que había hecho François Viete entre la *logística numerosa* y la *logística speciosa*. Así se explica que el subtítulo del segundo volumen de la obra de Peacock sea *On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position*, cuyas tres últimas palabras podrían implicar que el autor había estado leyendo a Carnot.

Peacock, el "Euclides del álgebra"

Peacock, el "Euclides del álgebra", encontró apoyo para sus puntos de vista en la obra de Augustus de Morgan (1806-1871), que también ayudó a fundar la British Association for the Advancement of Science (1831), y que en cierto modo se unió a Peacock en la constitución de lo que podría llamarse una "escuela inglesa" de matemáticas. De Morgan nació en la India, porque su padre era miembro de la East India Company, pero estudió en el Trinity College, donde se graduó como cuarto *wrangler*. No pudo conseguir un puesto ni en Cambridge ni en Oxford porque se negó dignamente a someterse al indispensable examen religioso, a pesar de que había sido educado en la Iglesia de Inglaterra, en la que su madre esperaba que se hiciese pastor.

A consecuencia de ello, De Morgan se vio nombrado profesor de matemáticas, a la temprana edad de 22 años, en la recién creada Universidad de Londres, más tarde University College de Londres, donde enseñó de manera continua, excepto durante breves períodos a consecuencia de sucesivas dimisiones provocadas por casos de reducción de la libertad académica. Siempre fue un defensor de la tolerancia intelectual y religiosa, así como un profesor y escritor excepcional. Era ciego de un ojo, de nacimiento, raro hándicap que pudiera explicar algunas de sus inofensivas excentricidades, tales como su odio a la vida rural, su negativa a votar en cualquier elección y su renuncia a solicitar el ingreso en la Royal Society.

De Morgan gustaba de acertijos, rompecabezas y problemas ingeniosos, muchos de los cuales aparecen coleccionados en el conocido libro *A Budget of Paradoxes*, que es una deliciosa sátira sobre los cuadradores del círculo, publicada después de su muerte por su viuda.

Si Peacock fue una especie de profeta en el desarrollo del álgebra abstracta, De Morgan fue con respecto a él como Elíseo a Elías. En el álgebra de Peacock los símbolos se entendían en general como números o magnitudes, pero De Morgan los consideraba ya de manera abstracta, dejando sin significado concreto no solo a las letras que utilizaba, sino también a los símbolos que representaban operaciones; así las letras tales como *A*, *B*, *C*, podían significar virtudes y vicios, y + y – podían representar premio y castigo. De Morgan insistía en que, "con una sola excepción, ninguna palabra o símbolo de la aritmética ni del álgebra tienen un ápice de significado a lo largo de este capítulo, cuyo objeto son los símbolos mismos y sus leyes de combinación, lo que da lugar a un álgebra simbólica que puede convertirse en adelante en la gramática de cien álgebras concretas distintas".

La excepción a la que se refiere es el símbolo de igualdad, ya que se suponía que en $A = B$ los símbolos *A* y *B* "deben tener el mismo significado final, cualquiera que sea el camino por el que se hayan obtenido". Esta idea, expresada ya en 1830 en su libro *Trigonometry and Double Algebra*, está próxima a la idea moderna de que la matemática trabaja más bien con funciones proposicionales que con proposiciones; aunque parece que De Morgan no se habría dado cuenta del carácter completamente arbitrario, en principio, de las reglas y definiciones del álgebra.

Se encontraba aún lo suficientemente próximo a la filosofía kantiana como para creer que las leyes fundamentales usuales del álgebra se aplicarían a cualquier sistema algebraico. Vio que esto era así al pasar del *álgebra simple* del sistema de los números reales al *álgebra doble* de los números complejos, donde las reglas que verifican las operaciones son las mismas. Y De Morgan creyó que estas dos formas agotan los tipos de álgebras posibles, y que un álgebra triple o cuádruple no se podría desarrollar.

William Rowan Hamilton demostraría más tarde que estaba equivocado en ese importante aspecto. Hamilton fue otro de los matemáticos del Trinity, pero esta vez no se trataba del Trinity College de Cambridge, sino del Trinity College de Dublín. Otro de los hombres del Trinity (Dublín) fue George Salmon (1819-1904), que enseñó allí matemáticas y teología y escribió excelentes textos sobre cónicas, álgebra y geometría analítica.

INTRODUCCIÓN

Oímos a menudo que se expresan enunciados del siguiente tipo: "es probable que hoy llueva", "tengo probabilidades de aprobar este curso", "hay un cincuenta por ciento de probabilidades de que una moneda caiga cara", etc. En todos los casos, estos enunciados se refieren a una situación de cuyo resultado no estamos seguros, pero expresamos cierto grado de confianza en que nuestras predicciones se cumplirán. La *teoría de la probabilidad* permitió dar forma matemática a tales afirmaciones.

Examinemos un experimento cuyo resultado no se conoce. Supongamos que alguien hace una afirmación p acerca del resultado del experimento y que queremos asignar una probabilidad a p. Si consideramos el enunciado p de manera aislada, por lo general no tenemos manera de asignar probabilidades. En cambio, podemos tratar de hallar un método para asignar probabilidades a todos los enunciados concebibles concernientes al resultado de ese experimento. A primera vista puede parecer una tarea sin esperanzas, ya que los enunciados que podemos formular acerca del experimento son infinitos. Pero nos ayuda el siguiente principio básico:

Afirmación fundamental: se asignará la misma probabilidad a dos enunciados equivalentes.

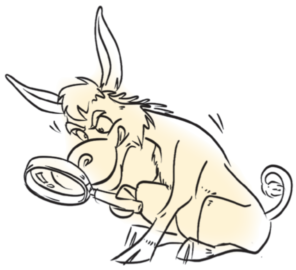
En la medida en que haya un número finito de posibilidades lógicas, solo habrá un número finito de conjuntos de verdad; por consiguiente, el proceso de asignación de probabilidades será finito. Procedemos en tres pasos: 1) primero determinamos $\mathcal{U}$, el conjunto de todas las posibilidades; 2) a cada subconjunto X de $\mathcal{U}$ le asignamos un número llamado la medida $m(X)$; a cada enunciado p le asignamos $m(P)$, la medida de su conjunto de verdad, como probabilidad. La probabilidad de un enunciado p se indica por **Pr**$[p]$.

El mismo procedimiento seguimos para hallar la probabilidad de un enunciado abierto de la forma $f(x) = a$. Sea A el conjunto de valores de verdad de este enunciado. Entonces,

$$\mathbf{Pr}[f = a] = m(A).$$

Observemos que se usa la abreviatura **Pr**$[f = a]$, que debe leerse "la probabilidad de que f adquiera el valor a", para indicar la probabilidad del enunciado $f(x) = a$.

El primer paso, entonces, es determinar el conjunto de posibilidades lógicas. Es importante recordar que no hay un método único para analizar posibilidades lógicas. En cualquier problema dado podemos llegar a un análisis de posibilidades muy fino o muy grueso, lo cual hace que $\mathcal{U}$ pueda tener muchos elementos o pocos. Después de elegir $\mathcal{U}$, el paso siguiente consiste en asignar un número a cada subconjunto A de $\mathcal{U}$, que será considerado luego la probabilidad de cualquier enunciado cuyo conjunto de verdad sea A. Lo hacemos de la manera que describimos a continuación.



1. ASIGNACIÓN DE UNA MEDIDA

Asignemos a cada elemento x de $\mathcal{U}$ un número positivo (peso) $w(x)$, de modo que la suma de todos los pesos asignados sea 1. La función w así definida será llamada *función de peso*. Si A es cualquier subconjunto de $\mathcal{U}$, definimos $m(A)$ como la suma de los valores de $w(x)$ para x perteneciente a A. Indicamos esta suma por $m(A) = \Sigma_{x \text{ en } A}\, w(x)$ y la llamamos *medida de A*. Adoptamos la definición $m(\varepsilon) = 0$. Obsérvese que la medida puede ser considerada como una función m cuyo dominio es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$. El rango de m está formado por algún conjunto de números ente 0 y 1.

En la aplicación de la probabilidad a problemas científicos, la asignación de medidas y los análisis de posibilidades lógicas pueden depender de la información fáctica de que se disponga; por consiguiente, se la puede realizar mejor si el científico mismo hace la aplicación.

Una vez asignados los pesos, para hallar la probabilidad de un enunciado particular debemos hallar su conjunto de verdad y determinar la suma de los pesos asignados a los elementos del conjunto. Este problema aparentemente fácil puede implicar considerables dificultades matemáticas. La tarea principal de la teoría de probabilidades es elaborar técnicas para resolver este tipo de problemas.

Ejemplo 1. Se arroja un dado común. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que salga sea menor que 4? Aquí el conjunto de posibilidades es $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La simetría del dado sugiere que cada cara debería tener la misma probabilidad de quedar hacia arriba. Para expresar esto asignamos un peso de 1/6 a cada uno de los resultados, o sea, $w(i) = 1/6$ para $i = 1, 2, \ldots, 6$.

El conjunto de verdad del enunciado "el número que sale es menor que 4" es $\{1, 2, 3\}$. Por consiguiente, la probabilidad del enunciado es $3/6 = 1/2$, la suma de los pesos de los elementos que figuran en su conjunto de valores de verdad.

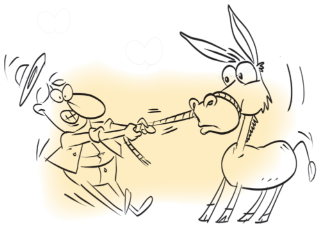
Ejemplo 2. Un hombre asiste a una carrera en la que corren tres caballos A, B y C. El hombre cree que A y B tienen la misma probabilidad de ganar, pero que A (y, por consiguiente, también B) tiene el doble de probabilidades de ganar que C. ¿Cuál es la probabilidad de que ganen A o C? Consideremos que $\mathcal{U}$ es el conjunto $\{A, B, C\}$. Si asignáramos un peso al resultado C, asignaríamos un peso de $2a$ a cada uno de los resultados A y B. Puesto que la suma de los pesos debe ser 1, tenemos: $2a + 2a + a = 1$, o sea $a = 1/5$. Por consiguiente, asignamos pesos 2/5, 2/5 y 1/5, respectivamente, a los resultados A, B y C. El conjunto de valores de verdad del enunciado "gana el caballo A o el caballo C" es {A, C}. La suma de los pesos de los elementos de este conjunto es $2/5 + 1/5 = 3/5$. Por consiguiente, la probabilidad de que ganen A o C es 3/5.

Ejemplo 3. Se arroja una moneda dos veces. Consideramos como espacio de posibilidades al conjunto

$$\mathcal{U} = \{\text{CaCa, CaCr, CrCa, CrCr}\},$$

una función de peso w definida así: $w(x) = 1/4$ para todo x de $\mathcal{U}$. Sea f una función cuyo dominio es $\mathcal{U}$ y cuyo valor es el número de caras que salen. Entonces el enunciado abierto $f(x) = 1$ tiene el conjunto de verdad {CaCr, CrCa}; la medida de este conjunto es 1/2. Por consiguiente, **Pr** $[f = 1] = 1/2$.

Ejercicios de entrenamiento



1. Supongamos que hay n posibilidades para el resultado de un determinado experimento. ¿De qué manera es necesario asignar los pesos si se desea el mismo peso a todos los resultados?
2. Sea $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$. Asignar pesos a los tres elementos de manera que no haya dos que tengan el mismo peso y hallar las medidas de los ocho subconjuntos de $\mathcal{U}$.
3. En una elección, Pérez tiene una probabilidad de ganar de 1/2, Rodríguez la probabilidad de 1/3 y Gutiérrez la probabilidad de 1/6.
   a) Construir $\mathcal{U}$.
   b) Asignar pesos.
   c) Hallar las medidas de los ocho subconjuntos.
   d) Hacer un par de predicciones no equivalentes que tengan la misma probabilidad.
4. Determinar al conjunto de posibilidades $\mathcal{U}$ para las siguientes situaciones:
   a) Va a tener lugar una elección entre los candidatos A y B.
   b) Se elige al azar un número entre 1 y 5.
   c) Se arroja una moneda de dos caras.
   d) Se pregunta a un estudiante el día del año en el que cae su cumpleaños.

5. Probar que para todo conjunto de posibilidades hay una función de peso constante única. ¿Para cuáles de los casos del ejercicio 4 sería apropiado asignar una función de peso constante?

6. Supongamos que se han asignado las siguientes posibilidades a los resultados posibles de colocar una moneda en una máquina automática defectuosa de venta de maníes: la probabilidad de que no salga nada es 1/2; la probabilidad de obtener de vuelta la moneda o de que salgan maníes (pero no ambas cosas) es 1/8.

a) Cuál es la probabilidad de que salga de vuelta la moneda y de que salgan también los maníes? **[Resp. 1/6]**

b) ¿Es posible determinar la probabilidad de obtener maníes con la información dada? **[Resp. No]**

7. Un dado está cargado de manera tal que la probabilidad de cada cara es proporcional al número de puntos que hay en esa cara. (Por ejemplo, un 6 es tres veces más probable que un 2). ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par al arrojarlo una vez? **[Resp. 4/7]**

8. Anotar las ocho posibilidades del resultado de arrojar una moneda tres veces sucesivas. Un resultado puede escribirse, por ejemplo, (Ca Cr Ca). Determinar una medida de probabilidad asignando un peso igual a cada resultado. Hallar las probabilidades de los siguientes enunciados:

r) El número de caras que aparece es mayor que el número de cruces. **[Resp. 1/2]**

s) Aparecen exactamente dos caras. **[Resp.3/8]**

t) En todos los tiros sale la misma faz. **[Resp. 1/4]**

9. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas para los enunciados del ejercicio 8?

a) $\mathbf{Pr}[r \vee s] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[s]$

b) $\mathbf{Pr}[s \vee t] = \mathbf{Pr}[s] + \mathbf{Pr}[t]$.

c) $\mathbf{Pr}[r \vee \sim r] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[\sim r]$.

d) $\mathbf{Pr}[r \vee t] = \mathbf{Pr}[r] + \mathbf{Pr}[t]$.

10. ¿Cuáles de los siguientes pares de enunciados son inconsistentes (ver el ejercicio 8)? (Recordar que dos enunciados son inconsistentes si sus conjuntos de verdad no tienen elementos en común).

a) r, s. c) $r, \sim r$.

b) s, t. d) r, t.

[Resp. b) y c)]

11. Formular un teorema sugerido por los ejercicios 9 y 10.

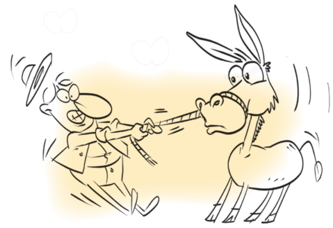
12. Sea $\mathcal{U}$ un espacio de posibilidades, y w y v, dos funciones de peso diferentes, cuyo dominio es $\mathcal{U}$. Demostrar que $w + v$ no es una función de peso.

13. Sean u y v dos funciones de peso diferentes definidas en el mismo espacio de posibilidades $\mathcal{U}$, y sean a y b dos números no negativos cuya suma es 1. Demostrar que $au + bv$ es una función de peso.

14. Se arroja una moneda tres veces. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de los ocho resultados posibles. Asignar pesos iguales a los elementos de $\mathcal{U}$. Sea f una función cuyo dominio es $\mathcal{U}$ y cuyos valores son el número de caras que salen. Hallar los conjuntos de verdad de los enunciados $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, y a partir de estos, las probabilidades $\mathbf{Pr}[f = 0]$, $\mathbf{Pr}[f = 1]$, $\mathbf{Pr}[f = 2]$ y $\mathbf{Pr}[f = 3]$.
[Resp. parcial: $\mathbf{Pr}[f = 3] = 1/8$, $\mathbf{Pr}[f = 1] = 3/8$]

15. Se arroja dos veces un dado bien equilibrado. Asignar pesos iguales a los elementos del conjunto $\mathcal{U}$, formado por los 36 pares de resultados posibles. Sea f una función cuyo dominio es $\mathcal{U}$ y cuyos valores son las sumas de los números que salen. Hallar $\mathbf{Pr}[f = a]$, para $a = 2, 3, \ldots, 12$. **[Resp. parcial: $\mathbf{Pr}[f = 11] = 1/18$, $\mathbf{Pr}[f = 7] = 1/6$]**

2. Propiedades de una medida de probabilidad



Antes de estudiar medidas de probabilidad especiales, consideraremos algunas propiedades generales de las medidas que son útiles en los cálculos para la comprensión de la teoría de la probabilidad. Las tres propiedades básicas de una medida de probabilidad son:

(A) $\mathbf{m}(X) = 0$ si y solo si, $X = \varepsilon$.

(B) $0 \leq \mathbf{m}(X) \leq 1$ para todo conjunto X.

(C) Dados dos conjuntos X e Y,

$$\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y)$$

si, y solo si, X e Y son disjuntos, o sea, no tienen elementos comunes.

Las demostraciones de las propiedades (A) y (B) se dejan como ejercicios (ver el ejercicio 19). Demostraremos ahora (C).

Observamos primero que $\mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y)$ es la suma de los pesos de los elementos de X más la suma de los pesos de Y. Si X e Y son disjuntos, el peso de cada elemento de $X \cup Y$ se suma solo una vez; por consiguiente, $\mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) = \mathbf{m}(X \cup Y)$.

Supongamos ahora que X e Y no son disjuntos. En tal caso, el peso de cada elemento contenido en X y en Y, o sea, en $X \cap Y$ se agrega dos veces en la suma $\mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y)$. Así, la suma es mayor que $\mathbf{m}(X \cup Y)$ en una cantidad igual a $\mathbf{m}(X \cap Y)$. Por (A) y (B), si $X \cap Y$ no es el conjunto vacío, entonces $\mathbf{m}(X \cap Y) > 0$. Por consiguiente, en este caso tenemos que $\mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) > \mathbf{m}(X \cup Y)$. Así, si X e Y no son disjuntos, la igualdad de (C) no se mantiene.

Nuestra prueba indica que, en general, tenemos:

(C′) Para dos conjuntos cualesquiera X e Y, $\mathbf{m}(X \cup Y) + \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) - \mathbf{m}(X \cap Y)$.

Puesto que las probabilidades de los enunciados se obtienen directamente de la medida de probabilidad $\mathbf{m}(X)$, toda propiedad de $\mathbf{m}(X)$ puede ser traducida a una propiedad acerca de la probabilidad de los enunciados. Por ejemplo, las propiedades anteriores, cuando se las expresa en términos de enunciados, se convierten en:

(a) $\mathbf{Pr}[p] = 0$ si, y solo si, p es lógicamente falso.

(b) $0 \leq \mathbf{Pr}[p] \leq 1$ para todo enunciado p.

(c) La igualdad

$$\mathbf{Pr}[p \vee q] = \mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q]$$

es válida si, y solo si, p y q son inconsistentes.

(c′) Dados dos enunciados p y q cualesquiera,

$$\mathbf{Pr}[p \vee q] = \mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q] - \mathbf{Pr}[p \wedge q].$$

Otra propiedad de una medida de probabilidad que a menudo es útil en el cálculo es la siguiente:

(D) $\mathbf{m}(X) = 1 - \mathbf{m}(X)$.

O, en el lenguaje de los enunciados:

(d) $\mathbf{Pr}[\sim p] = 1 - \mathbf{Pr}[p]$.

Quedan como ejercicios las demostraciones de (D) y (d) (ver el ejercicio 20).

Es importante observar que nuestra medida de probabilidad asigna probabilidad 0 solamente a enunciados que son lógicamente falsos, o sea que son falsos para toda posibilidad lógica. Por consiguiente, de una predicción según la cual tal enunciado será verdadero se sabe con certeza que es falsa. De manera análoga, solo se asigna probabilidad 1 a un enunciado si es verdadero en todos los casos, es decir, si es lógicamente verdadero. Así, se sabe con certeza que es correcta la predicción de que un enunciado de este tipo será verdadero.

Aunque estas propiedades de una medida de probabilidad parecen muy naturales, al tratar con conjuntos de posibilidades infinitas será necesario atenuarlas ligeramente. Lo discutiremos más adelante.

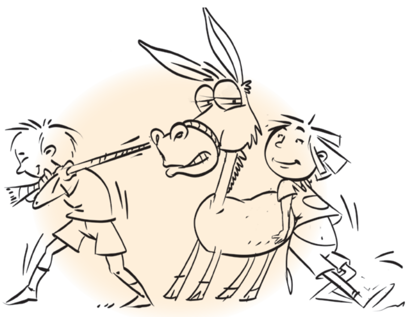
Analizaremos ahora las probabilidades que no son 0 o 1. Expondremos solamente algunas de las ideas intuitivas que se sostienen comúnmente en lo concerniente a las probabilidades. Aunque puede darse una forma matemática más precisa a estas ideas, las ofrecemos aquí como guía para una comprensión intuitiva.

Supongamos que, con respecto a un experimento dado, se asignó una probabilidad a un cierto enunciado. De esto se infiere a menudo que, si se realiza una serie de tales experimentos en condiciones idénticas, la fracción del número total de experimentos que representa la proporción de resultados que hacen verdadero el enunciado será aproximadamente igual a a. La versión matemática de esta afirmación es la *ley de los grandes números* de la teoría de la probabilidad, que también expondremos más adelante. En los casos en que no hay manera de asignar una medida de probabilidad, se estima experimentalmente la probabilidad de un enunciado. Se realiza una serie de experimentos; luego, la fracción de estos en los que el enunciado resulta verdadero se toma como probabilidad aproximada del enunciado.

Una segunda interpretación de las probabilidades, relacionada con la anterior, concierne a las apuestas. Supongamos que se ha asignado una probabilidad a a un cierto enunciado p. Deseamos hacer una apuesta de que p resultará de hecho verdadero. Convenimos en dar r pesos si p no resulta verdadero, siempre que recibamos s pesos en caso de que resulte verdadero. ¿De cuánto deben ser r y s para que la apuesta sea equilibrada? Si fuera cierto que en un gran número de tales apuestas ganaríamos s pesos una fracción a de veces y perderíamos r pesos una fracción igual a $1 - a$ de las veces, nuestra ganancia media por apuesta sería $sa - r(1 - a)$. Para que la apuesta sea equilibrada debemos hacer que esta ganancia promedio sea igual a 0. Esto ocurriría si $sa = r(1 - a)$ o si $r/s = a/(1 - a)$. Obsérvese que esto solo determina la proporción de r y s. Esta proporción, que se escribe r/s, recibe el nombre de *dar paridad a la apuesta*.

Ejemplo. Supongamos que la probabilidad de que gane un cierto caballo en una carrera ha sido determinada en 3/4. En tal caso, las proporciones de una apuesta equilibrada deben ser 3/4 : 1/4. Esta proporción también puede escribirse: 3 : 1, 6 : 2, 12 : 4, etc. Una apuesta justa sería convenir en pagar \$ 3 si el caballo pierde y recibir \$ 1 si el caballo gana. Otra apuesta justa sería pagar \$ 6 si el caballo pierde y recibir \$ 2 si gana.

Ejercicios de entrenamiento



1. Sean p y q enunciados tales que $\mathbf{Pr}[p \wedge q] = 1/4$, $\mathbf{Pr}[\sim p] = 1/3$, $\mathbf{Pr}[q] = 1/2$. ¿Cuál es $\mathbf{Pr}\ [p \vee q]$?

2. Usando el resultado del ejercicio 1, hallar $\mathbf{Pr}[\sim p \wedge \sim q]$.

3. Sean p y q enunciados tales que $\mathbf{Pr}[p] = 1/2$ y $\mathbf{Pr}[q] = 2/3$. ¿Son consistentes p y q? **[Resp. Sí]**

4. Demostrar que si $\mathbf{Pr}[p] + \mathbf{Pr}[q] > 1$, entonces p y q son consistentes.

5. Un estudiante está preocupado por sus clasificaciones en inglés y en arte. Calcula que la probabilidad de aprobar inglés es de 0,4, que aprobará al menos un curso con probabilidad 0,6, pero que solo tiene una de 0,1 de aprobar ambas materias. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe arte? **[Rep. 0,3]**

6. En una escuela, las clasificaciones son A, B, C, D y E. Un estudiante tiene una probabilidad de 0,9 de aprobar una asignatura y otra de 0,6 de sacar una clasificación inferior a B. ¿Cuál es la probabilidad de que saque C o D? **[Resp. 1/2]**

7. Un dado está cargado de tal modo que la probabilidad de que una faz quede hacia arriba es proporcional al número de puntos de esa faz (ver el ejercicio 7 de *1. Asignación de una medida*). Sea f la función resultante del experimento; por tanto, el rango de f está formado por los números {1, 2, ... , 6}. Calcular las siguientes probabilidades:

   a) $\mathbf{Pr}[(f = 2) \vee (f = 4) \vee (f = 6)]$. **[Resp. 4/7]**

   b) $\mathbf{Pr}[(f = 1) \vee (f = 2) \vee (f = 5)]$.

   c) $\mathbf{Pr}[f \neq 2]$.

d) $\mathbf{Pr}[f > 2]$. **[Resp. 6/7]**

e) $\mathbf{Pr}[(f = 7) \vee (f \neq 7)]$.

f) $\mathbf{Pr}[(f = 4) \vee (f > 2)]$.

8. Se arroja al aire dos veces una moneda equilibrada. Sean f_1 y f_2 las funciones de los resultados del primer y del segundo experimento, respectivamente. El rango de ambas funciones es, entonces, el conjunto {Ca, Cr}, y el dominio es $\mathcal{U}$ = {CaCa, CaCr, CrCa, CrCr}. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $\mathbf{Pr}[(f_1 = \text{Ca}) \vee (f_2 \neq \text{Ca})]$.

b) $\mathbf{Pr}[f_1 = \text{Cr}]$.

c) $\mathbf{Pr}[(f_1 = \text{Ca}) \vee (f_2 = \text{Ca})]$.

d) $\mathbf{Pr}[f_2 \neq \text{Cr}]$.

9. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean f_1 y f_2 las funciones de los resultados del primer y segundo experimento, respectivamente. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $\mathbf{Pr}[(f_1 = 3) \wedge (f_2 < 4)]$. **[Resp. 1/12]**

b) $\mathbf{Pr}[(f_1 \neq 6) \wedge (f_2 > 3)]$. **[Resp. 5/12]**

c) $\mathbf{Pr}[(f_1 \neq 7) \vee (f_2 < 5)]$. **[Resp. 1]**

d) $\mathbf{Pr}[(f_1 = 7) \vee (f_2 \neq 3)]$. **[Resp. 5/6]**

10. ¿Qué paridad debe dar una persona en una apuesta de que saldrá un seis al arrojar un dado?

11. Con respecto al ejemplo 2 de *1. Asignación de una medida*, ¿qué paridad debe estar dispuesto a dar el hombre en una apuesta de que saldrá A o B primera?

12. Demostrar que si las chances en favor de un cierto enunciado son $r : s$, la probabilidad de que el enunciado sea verdadero es $7/(r + s)$.

13. Usando el resultado del ejercicio 12 y la definición de chances, demostrar que si las chances de que un enunciado sea verdadero son $r : s$, las chances de que sea falso son $s : r$.

14. Un hombre está dispuesto a dar 5 : 4 de paridad a la apuesta de que los Dodgers ganarán en la Serie Mundial. ¿Cuál debe ser la probabilidad de una victoria de los Dodgers para que la apuesta sea equilibrada? **[Resp. 5/9]**

15. Un hombre ha hallado a través de una larga experiencia que, si lava su auto, llueve el 85 % de las veces. ¿Qué chance hay que dar de que esto ocurrirá la vez siguiente?

16. Un hombre ofrece una paridad de 1 : 3 de que A se producirá y otra de 1 : 2 de que se producirá B. Él sabe que no pueden producirse ambos. ¿Qué paridad debe dar a la apuesta de que se produzca A o B? **[Resp. 7/5]**

17. Un hombre ofrece 3 : 1 como paridad a la apuesta de que se producirá A y 2 : 1 de que se producirá B. Sabe que no pueden producirse ambos. ¿Qué paridad debe dar a la apuesta de que se producirá A o B?

18. Demostrar a partir de la definición de medida de probabilidad que $\mathbf{m}(X) = 1$ si, y solo si, $X = \mathcal{U}$.

19. Demostrar a partir de la definición de medida de probabilidad que las propiedades (A) y (B) del texto son verdaderos.

20. Demostrar la propiedad (D) del texto. ¿Por qué la propiedad (d) se deduce de esa propiedad?

21. Demostrar que, si R, S y T son tres conjuntos que no tienen ningún elemento en común,

$$\mathbf{m}(R \vee S \vee T) = \mathbf{m}(R) + \mathbf{m}(S) + \mathbf{m}(T).$$

22. Si X e Y son dos conjuntos tales que X es un subconjunto de Y, demostrar que $\mathbf{m}(X) \leq \mathbf{m}(Y)$.

23. Si p y q son los enunciados tales que p implica q, demostrar que $\mathbf{Pr}[p] \leq \mathbf{Pr}[q]$.

24. Supongamos que se nos presentan n enunciados, a cada uno de los cuales se le ha asignado una probabilidad menor o igual a r. Demostrar que la probabilidad de la disyunción de estos enunciados es menor o igual que nr.

25. Damos a continuación otra prueba de la propiedad (C′) del texto. Dar una razón para cada paso.

a) $X \cup Y = (X \cap \tilde{Y}) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap \tilde{X})$

b) $\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X \cap \tilde{Y}) + \mathbf{m}(X \cap Y) + \mathbf{m}(\tilde{X} \cap Y)$.

c) $\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) - \mathbf{m}(X \cap Y)$.

26. Si X, Y y Z son tres conjuntos cualesquiera, demostrar que, para toda medida de probabilidad,

$$\mathbf{m}(X \cup Y \cup Z) = \mathbf{m}(X) + \mathbf{m}(Y) + \mathbf{m}(Z) - \mathbf{m}(X \cap Y) - \mathbf{m}(X \cap Z) - \mathbf{m}(X \cap Z) + \mathbf{m}(X \cap Y \cap Z).$$

27. Traducir el resultado del ejercicio 26 a un resultado concerniente a tres enunciados p, q y r.

28. Un hombre ofrece apostar "pesos contra buñuelos" a que cierto acontecimiento se producirá. Suponiendo que un buñuelo cueste 5 centavos de peso, ¿cuál debe ser la probabilidad del acontecimiento para que esta sea una apuesta equilibrada? **[Resp. 20/21]**