Leñitas Geométricas*

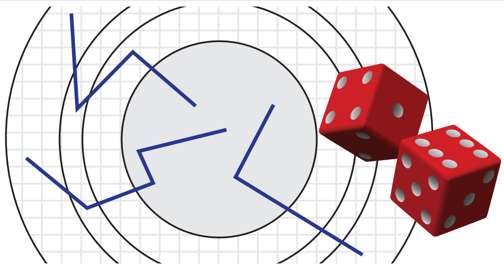
para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✈ Nº 9
6 de julio de 2023

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

El Método Montecarlo



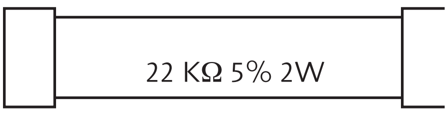
6. Análisis de la calidad y la seguridad de las piezas

1. Esquema elemental de análisis de la calidad. Consideremos una pieza S que consta de cierta cantidad (posiblemente grande) de elementos. Por ejemplo, si S es un aparato eléctrico, sus elementos pueden ser las resistencias ($R_{(k)}$), los capacitores ($C_{(k)}$), las lámparas, etc. Supongamos que la calidad se determina por un parámetro U que puede ser calculado si se conocen los parámetros de todos los elementos

$$U = f(R_{(1)}, R_{(2)}, \ldots; C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots; \ldots). \qquad (30)$$

Por ejemplo, si U es la tensión en una sección de un circuito eléctrico, podemos considerar, basándonos en la ley de Ohm, las ecuaciones del circuito y determinar U de estas ecuaciones.

Sin embargo, los valores reales de los parámetros de los elementos difieren de los valores nominales. Por ejemplo, la resistencia representada en la figura siguiente puede tomar un valor cualquiera comprendido entre 20,9 y 23,1 kΩ.



* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

Surge la cuestión siguiente: ¿cómo influyen en el valor de U las desviaciones que se observan entre los valores reales y nominales de los parámetros de todos los elementos?

Los límites de variación de U podrían estimarse escogiendo para todo elemento los valores "peores" de los parámetros. Pero no siempre, ni mucho menos, se conoce qué colección de parámetros será la "peor". Además, habiendo muchos elementos, esta estimación resultará exagerada por cuanto es poco probable que todos los parámetros a la vez resulten "malos".

Por eso, es más razonable tratar de estimar la esperanza matemática MU y la varianza DU considerando que tanto los parámetros de los elementos como el propio parámetro U son variables aleatorias. La magnitud MU representará el valor medio de U en toda la partida de piezas y la magnitud DU indicará qué desviaciones entre U y MU pueden presentarse realmente.

Recordemos que (según hemos señalado en el punto 2, en *Leñitas Geométricas* Nº 4, 5a época, p. 4)

$$MU \neq f(MR_{(1)}, MR_{(2)}, \dots; MC_{(1)}, MC_{(2)}, \dots; \dots).$$

Siendo f una función más o menos compleja, se hace imposible el cálculo analítico de la distribución de U. A veces se logra determinarla experimentalmente analizado una gran partida de piezas elaboradas. Pero esto no siempre es posible y jamás puede realizase en la fase de diseño de una pieza.

Intentemos aplicar el método de Montecarlo. Para ello es necesario: a) conocer las características probabilísticas de todos los elementos; y b) conocer la función f (más exactamente, saber calcular el valor de U a partir de cualesquiera de los valores fijos de $R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots$).

La distribución probabilística de los parámetros de cualquier elemento se puede obtener experimentalmente analizando una gran partida de estos elementos. Dicha distribución resulta muy a menudo normal. Por eso, muchos investigadores parten de ello considerando, por ejemplo, que la resistencia del elemento representado en la figura de abajo

es una variable aleatoria normal ρ con la esperanza matemática $M\rho = 22$ y con $3\sigma = 1{,}1$ [recordemos que en un experimento es prácticamente imposible obtener un valor de ρ que difiera de $M\rho$ en más de 3σ; véase la fórmula (20) en *Leñitas Geométricas* Nº 4, 5ª época, p. 8].

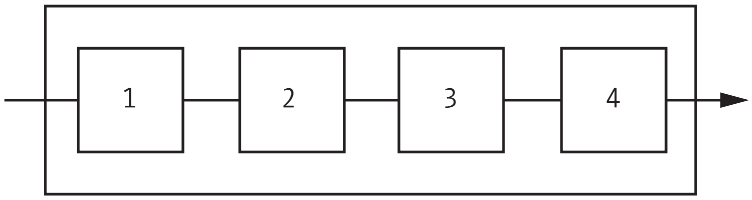
El esquema del análisis es muy sencillo: para todo elemento se sortea primero el valor del parámetro y se calcula después, a partir de la fórmula (30) del punto 1 anterior, el valor de U. Este experimento se repite N veces. Una vez obtenidos los valores $U_1, U_2, \dots U_N$, se toma aproximadamente

$$MU \approx \sum_{j=1}^{N} U_j, \quad DU \approx \frac{1}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(U_j\right)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} U_j\right)^2\right].$$

Si N toma valores grandes, podemos sustituir el factor $\dfrac{1}{N-1}$ de la última fórmula por $\dfrac{1}{N}$ y entonces dicha fórmula resulta un simple corolario de las fórmulas (8) y (9) (véase *Leñitas Geométricas* Nº 5, 5ª época, p. 3). En la estadística matemática se demuestra que para valores pequeños de N conviene emplear el factor $\dfrac{1}{N-1}$.

2. Ejemplos de análisis de la seguridad. Supongamos que queremos estimar el tiempo medio de duración de una pieza aceptando que conocemos el tiempo de duración de cada uno de sus elementos.

Si consideramos que el tiempo $t_{(k)}$ de duración de cada elemento es una magnitud fija, no habrá dificultad en calcular el tiempo t de duración de la pieza.

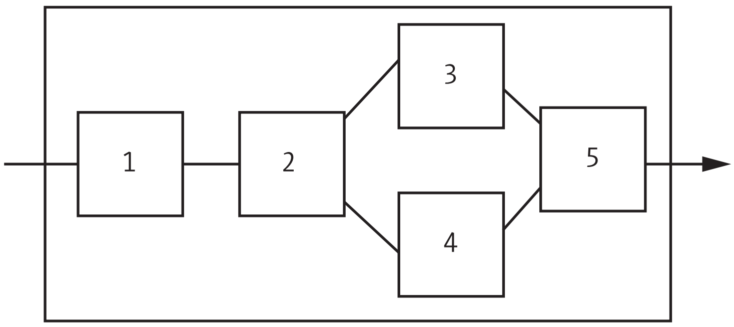


Por ejemplo, en la figura de arriba viene representada esquemáticamente una pieza que deja de funcionar cuando falla cualquiera de sus elementos; en este caso tenemos

$$t = \text{mín}\,(t_{(1)};\, t_{(2)};\, t_{(3)};\, t_{(4)}). \qquad (31)$$

En cambio, para la pieza con un elemento doble representada esquemáticamente en la figura de abajo, tenemos

$$t = \text{mín}\,[(t_{(1)};\, t_{(2)};\, \text{máx}\,(t_{(3)};\, t_{(4)});\, t_{(5)}] \qquad (32)$$



ya que si falla, por ejemplo, el elemento Nº 3, la pieza continuará funcionando en base al elemento Nº 4.

El tiempo de duración de cualquier elemento es, en realidad, una variable aleatoria $\theta_{(k)}$. Cuando decimos que el plazo de duración de una bombilla es de 1 000 horas, estamos hablando del valor medio $M\theta$ de la variable θ; todos comprendemos que una bombilla se fundirá antes, mientras que otra (de la misma partida) durará más.

Si conocemos las densidades de distribución de $\theta_{(k)}$ para todos los elementos que componen la pieza, podemos calcular $M\theta$ por el método de Montecarlo aplicando el procedimiento del punto 1 anterior. En efecto, para todo elemento podemos sortear el valor de la variable $\theta_{(k)}$; sea $t_{(k)}$ este valor. Ahora, a partir de la fórmula correspondiente (31) o (32), podemos hallar el valor t de la variable aleatoria θ. Repitiendo este experimento un número (N) suficiente de veces, podemos aceptar que

$$M\theta \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j,$$

donde t_j es el valor de t obtenido en el t-ésimo experimento.

Cabe subrayar que no es nada fácil determinar la distribución del plazo de duración $\Phi_{(k)}$ de los elementos. Por ejemplo, para elementos que funcionan durante largo tiempo se hace difícil la organización del experimento pues habrá que esperar a que falle una cantidad suficiente de estos elementos.

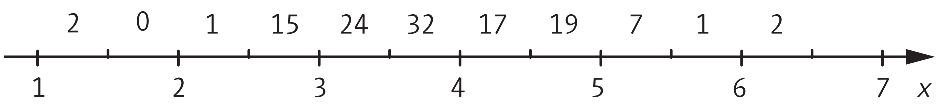
3. Otras posibilidades del método. Los ejemplos expuestos permiten ver que la metodología del análisis de la calidad de las piezas se basa en una idea muy simple. Es preciso conocer las características probabilísticas de todos los elementos que constituyan la pieza y saber calcular la variable que nos interesa como una función de los parámetros de estos elementos. La simulación permite entonces abarcar las propiedades aleatorias de los parámetros.

Aparte de la esperanza matemática y de la varianza de la variable que nos interesa, la simulación permite obtener mucha más información útil. Supongamos, por ejemplo, que hemos obtenido una gran cantidad N de valores $U_1, U_2, \ldots, U_N$ de la variable aleatoria U. Basándonos en estos valores, podemos encontrar aproximadamente la densidad de distribución de U. Esta cuestión concierne en realidad a la estadística, ya que se trata de la elaboración de resultados de experimentos (realizados, es verdad, en una calculadora de estadística programable MCE). Por eso, nos limitaremos a considerar un ejemplo concreto.

Supongamos que hemos obtenido un total de $N = 120$ valores $U_1, U_2, \ldots, U_{120}$ de la variable aleatoria U comprendidos todos en los límites

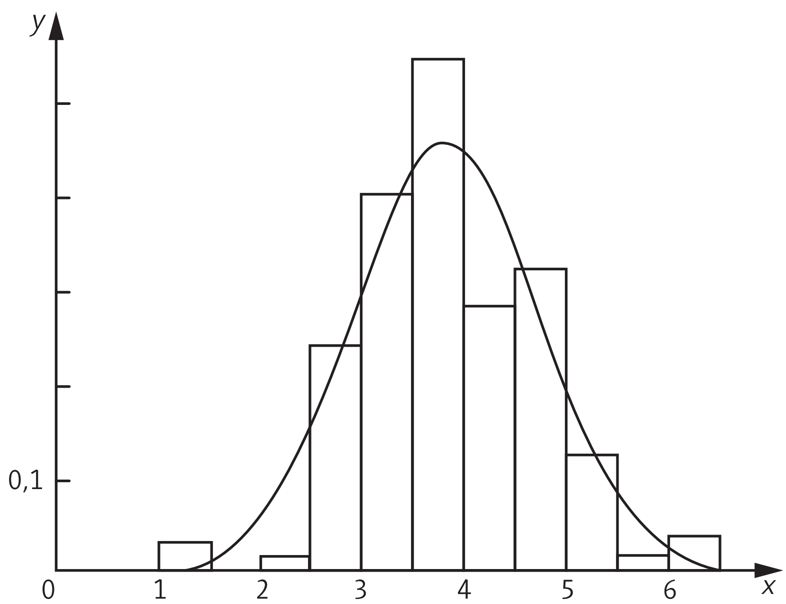
$$1 < U_j < 6{,}5.$$

Dividamos el intervalo $1 < x < 6{,}5$ en 11 intervalos iguales de longitud $\Delta x = 0{,}5$ (o en otro número de intervalos no muy grande, ni tampoco muy pequeño) y calculemos cuántos valores U_j corresponden a cada intervalo. Hemos representado estas cantidades en la figura que sigue:



Dividiendo entre $N = 120$ estas cantidades, obtendremos las frecuencias correspondientes a cada intervalo. En nuestro caso, estas frecuencias son 0,017; 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008 y 0,017.

En cada intervalo construimos ahora un rectángulo de área igual a la frecuencia de U_j correspondiente a dicho intervalo (véase la figura siguiente).



En otras palabras, la altura de cada rectángulo es igual a la frecuencia dividida entre Δx. La figura escalonada así obtenida se denomina *histograma*.

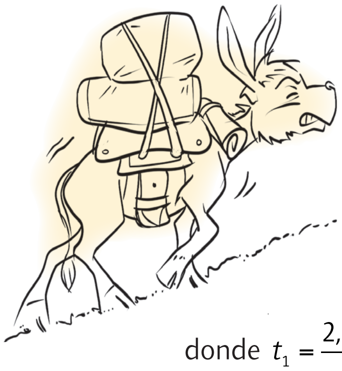
El histograma ofrece una aproximación de la densidad desconocida de la variable aleatoria U. Por esto, el área del histograma comprendida entre, digamos, $x = 2{,}5$ y $x = 5{,}5$ nos da un valor aproximado de la probabilidad

$$\mathbf{P}\{2{,}5 < U < 5{,}5\} \approx 0{,}94.$$

El cálculo (experimento) realizado nos permite afirmar, por consiguiente, que con una probabilidad aproximadamente igual a 0,94 la variable U está comprendida en el intervalo $2{,}5 < U < 5{,}5$.

En la figura hemos representado, a título comparativo, la densidad de la variable aleatoria normal ζ' con los parámetros a = 3,85 y σ = 0,88. Si, partiendo de esta densidad, calculamos la probabilidad de que ζ' pertenezca al intervalo $2{,}5 < \zeta' < 5{,}5$, obtendremos el valor 0,911, bastante próximo al valor anterior.

Expliquemos cómo se efectúan los cálculos. Según (14) (*Leñitas Geométricas* Nº 4, 5ª época, p. 4), tenemos



$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{2,5}^{5,5} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Efectuemos en la integral la sustitución $x - a = \sigma t$. Tendremos entonces

$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{t}}$$

donde $t_1 = \dfrac{2{,}5 - a}{\sigma} = -1{,}54$ y $t_2 = \dfrac{5{,}5 - a}{\sigma} = 1{,}88.$

Para calcular el valor de la última integral hay que recurrir a la tabla de la así llamada *integral de probabilidades* $\Phi(x)$, en la que vienen los valores de la función

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{t}} dt.$$

Así encontramos

$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = 0{,}5[\Phi(1{,}88) + \Phi(1{,}54)] = 0{,}91.$$

4. Observación. Lamentablemente son raros, por ahora, los casos en los que se aplican semejantes cálculos. Es difícil explicar esto. Posiblemente se deba a que los diseñadores ignoran esta posibilidad.

Además, para poder aplicar este método al diseño de piezas es necesario estudiar previamente las características probabilísticas de los elementos que las componen. Este es un trabajo voluminoso. Es verdad que conociendo estas características se puede estimar la calidad de cualquier pieza formada por dichos elementos. También se puede analizar cómo varía la calidad al sustituir un elemento por otro.

Es de esperar que en los años próximos estos cálculos se hagan habituales. En cuanto a las características probabilísticas necesarias de los elementos, serán ofrecidas siempre por las empresas que los elaboren.

El método estadístico en el Método Montecarlo

En sus orígenes, la estadística se interesó por las poblaciones, tomada esta palabra en el sentido corriente de agrupación humana. La población, considerada como un todo, es el objeto del estudio; el individuo aislado no interviene sino en la medida en que contribuye a la estructura del conjunto. Aunque la estadística se utilice ahora en los campos más variados, la idea de población no es menos fundamental.

En realidad, debe entenderse por población el conjunto de observaciones recogidas en las diferentes unidades de un grupo de personas, objetos o aun ideas más o menos abstractas, definiéndose el grupo mismo por ciertas condiciones limitativas. Las observaciones pueden ser mediciones, atributos cualitativos, índices, etcétera; el individuo es la observación aislada y no el ser u objeto en torno del que se ha establecido el censo.

Así, cuando se estudia la talla de los adultos en un país determinado, o sus edades, o la edad de los matrimonios, hay que trabajar con poblaciones de tallas o de edades. Si se mide el tenor de las cenizas en muestras de carbón extraídas bajo ciertas condiciones, o bien si se observa el color de las flores en la descendencia obtenida por el cruce de dos variedades, es la población de los tenores de ceniza, o la población de colores lo que ocupará la atención del matemático estadístico. La definición del grupo debe formularse siempre claramente; por ejemplo, en vez de considerar a todos los adultos de un país, pueden interesar agrupaciones más pequeñas, limitadas por el sexo, la profesión o el lugar de residencia. El análisis estadístico de las observaciones o de las medidas implica varias etapas.

Registro y presentación de las observaciones

No se insistirá nunca lo suficiente acerca de la absoluta necesidad de definir, del modo más riguroso posible, los límites del grupo del que se hace el estudio; el o los caracteres recogidos en cada individuo; las condiciones en las que se ha establecido el censo. El desconocimiento de estos principios ha inducido a graves errores; las pretendidas contradicciones estadísticas a menudo no tienen otro origen. Si bien es cierto que una cifra lleva en sí misma un rigor que excluye toda duda, todavía es necesario saber, exactamente, a qué se aplica y lo que representa. Esta verdad elemental ha hallado una ilustración divertida en la anécdota siguiente, referida por M. Sauvy: un candidato para el bachillerato, cálidamente recomendado al examinador de historia, es interrogado sobre la fecha de la toma de Constantinopla. El alumno responde: 1789.

"Cierto –acepta el interrogador–, la fecha es exacta; sin embargo, no se refiere al acontecimiento del que he hablado". Sin entrar en mayor detalle, digamos, por ejemplo:

- que en una encuesta toda comprobación objetiva es preferible a las declaraciones proporcionadas por las personas directamente interesadas en las conclusiones;
- que una medición establecida con una exactitud del milímetro no tiene el mismo significado que si ha sido hecha con una precisión del centímetro;
- que la evolución económica de un país debe estudiarse en relación con sus variaciones territoriales.

Una vez que los datos son recopilados, la primera tarea consiste en presentarlos de manera clara. Empleamos el término de *variable* o *variada* para designar las medidas cuantitativas y reservaremos, en principio, la expresión *carácter* a toda observación de tipo cuantitativo.

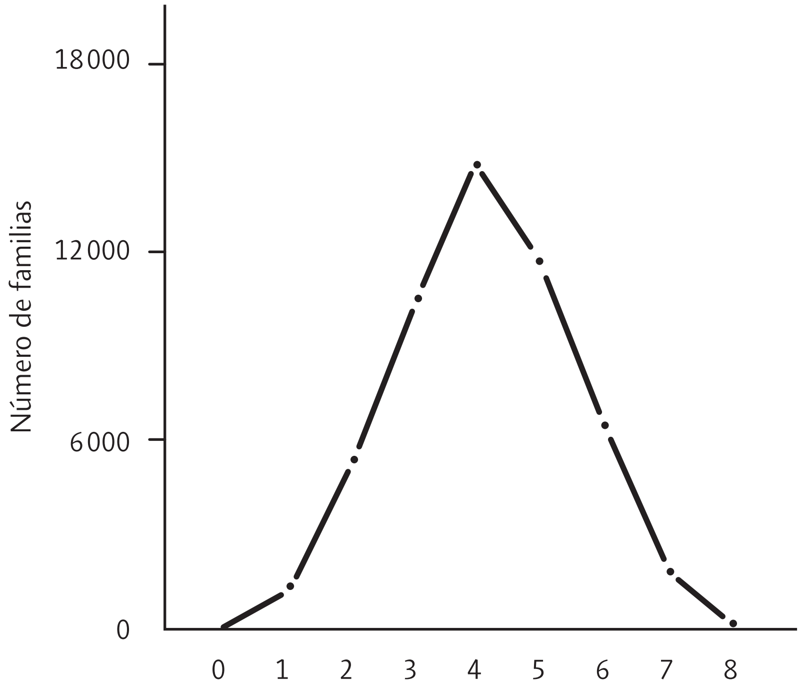
La variable puede ser continua o discontinua; puede observarse, simultáneamente, diversos atributos o diversas variables. En todos los casos la presentación más simple se hace en forma de cuadros; la representación más figurativa, cuando es posible, utiliza los gráficos. Entremos un poco más en los detalles y demos algunos ejemplos.

Cuando la variable es discontinua, es decir que siempre toma valores aislados y bien definidos –como el número de niños en una familia, o el número de pétalos en una flor, etc.–, es suficiente enumerar las observaciones para cada uno de estos valores y el cuadro se establece sin dificultad.

Por ejemplo, 53 650 familias de 8 hijos han sido clasificadas según la distribución de los hijos entre niños y niñas; la variable "cantidad de varones en una familia" puede tomar todos los valores enteros de 0 a 8, y la clasificación observada es la siguiente:

Número de niños	Número de familias
0	215
1	1 485
2	5 331
3	10 649
4	14 959
5	11 929
6	6 678
7	2 092
8	342
Total	53 680

La representación gráfica es inmediata: cada clase es representada por un punto que tiene por abscisa el número de niños y por ordenada, el número correspondiente de familias.



Si la variable es continua –por ejemplo, las tallas, edades o pesos de un grupo de organismos– la cantidad de valores posibles es infinita. Considerando que las observaciones se hacen siempre en número limitado, se puede también teóricamente trabajar de la misma manera.

Sin embargo, cuando las mediciones son muchas, el cuadro resulta muy extenso y existe el riesgo de no proporcionar un conocimiento claro acerca de su ley de repartición. Se divide entonces el campo total de la variabilidad en una cierta cantidad de clases de la misma extensión, y se agrupan todas las observaciones que corresponden a una misma clase; el valor de la variabilidad, en una clase, se supone uniformemente igual al que corresponde al centro de la misma.

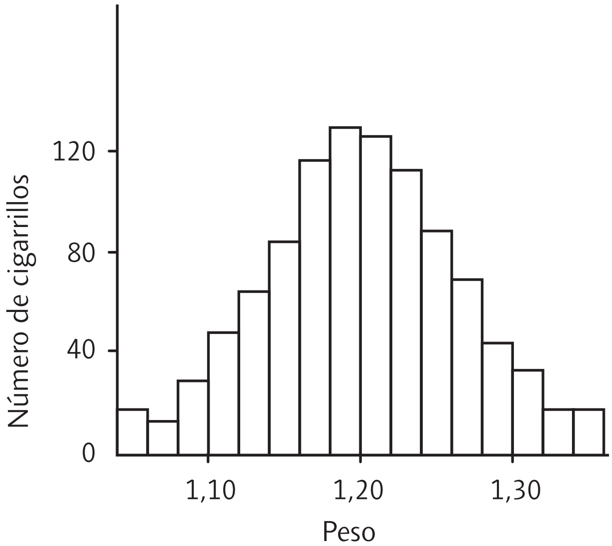
Esta operación se llama *agrupamiento de los datos*; constituye la primera etapa hacia la reducción a algunas características simples del complejo conjunto de observaciones. La selección del intervalo de clase es un asunto relacionado con cada caso particular; es necesario conservar una información suficientemente detallada del fenómeno, pero evitando clases demasiado pequeñas o muy numerosas que complicarían, sin provecho, los cálculos ulteriores.

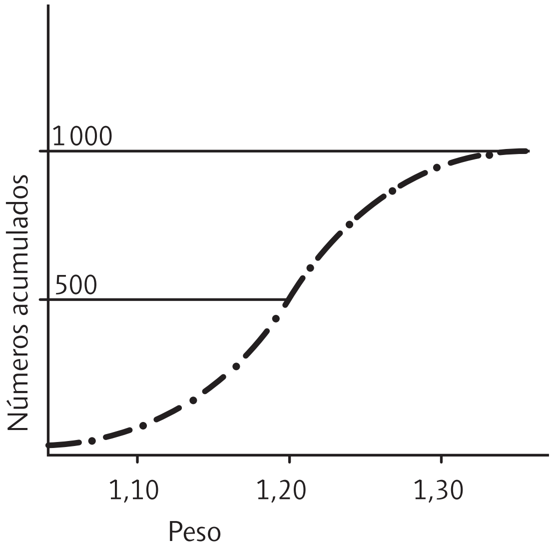
Ejemplo. Se han pesado individualmente 1 000 cigarrillos consecutivos al salir de la máquina (cerca de 45 segundos de fabricación). Los pesos unitarios se dividieron en clases de una amplitud de 2 centigramos, según se muestra en el cuadro siguiente.

Límites de las clases (en g)		Centro de las clases (en g)	Número de cigarrillos	Valores acumulados
1,04	1,06	1,05	17	17
1,06	1,08	1,07	15	32
1,08	1,10	1,09	27	59
1,10	1,12	1,11	47	106
1,12	1,14	1,13	63	169
1,14	1,16	1,15	85	254
1,16	1,18	1,17	117	371
1,18	1,20	1,19	129	500
1,20	1,22	1,21	126	626
1,22	1,24	1,23	112	738
1,24	1,26	1,25	88	826
1,26	1,28	1,27	69	895
1,28	1,30	1,29	42	937
1,30	1,32	1,31	31	968
1,32	1,34	1,33	16	984
1,34	1,36	1,35	16	1 000
		Total	1 000	

El resultado de la clasificación figura en la tercera columna del cuadro que antecede, frente a los distintos valores de pesos inscritos en las primera y segunda columnas. En la cuarta columna, las cifras acumuladas corresponden a la cantidad de cigarrillos que tienen un peso inferior al límite superior de la clase correspondiente. La representación gráfica no ofrece dificultades.

El diagrama (o histograma) se presenta bajo la forma de una serie de rectángulos, cuya base es igual al intervalo de base y la altura, proporcional al número de observaciones. El diagrama de los valores acumulados se obtiene elevando en el extremo de cada clase una ordenada proporcional al valor acumulado hasta este límite y uniendo 2 a 2 los puntos representativos, como en la figura siguiente.





Cuando se observen varios caracteres simultáneamente, se podrá levantar para cada uno de ellos un cuadro y construir un gráfico análogo a los precedentes. Pero en el caso particular de dos variables (x, y) es preferible utilizar un cuadro de doble entrada y construir un diagrama en el que cada punto de las coordenadas (x, y) esté afectado por una cantidad proporcional al número de las observaciones comprobadas para este par de valores.

He aquí, por ejemplo, una estadística de matrimonios en Francia (1935), clasificados según la edad de los esposos (extraída del *Anuario de Estadística General de Francia*, año 1935).

		Edad de las esposas (x)								
Edad de los esposos (y)		15 a 19	20 a 24	25 a 29	30 a 34	35 a 39	40 a 49	50 a 59	60 y más	Total
	15 a 19	1 274	903	133	16	6	–	–	–	2 332
	20 a 24	21 450	67 472	13 941	1 943	405	117	6	–	105 334
	25 a 29	11 334	55 072	27 204	6 202	1 394	468	32	4	101 710
	30 a 34	1 431	11 471	12 269	7 198	2 710	1 145	82	6	36 312
	35 a 39	213	2 050	3 767	4 082	2 921	1 782	184	12	15 011
	40 a 49	57	621	1 376	2 447	3 094	4 322	818	69	12 804
	50 a 59	13	72	229	505	987	3 261	2 090	331	7 488
	60 y más	2	19	49	96	213	1 001	1 524	999	3 903
	Total	35 774	137 680	58 968	22 489	11 730	12 096	4 736	1 421	284 894

Un cuadro de este tipo lleva el nombre general de *cuadro de correlación*. Todos los datos precedentes se refieren a caracteres mensurables. La misma presentación se aplica a los atributos cualitativos, con la única diferencia de que la representación gráfica no es, por supuesto, posible.

El cuadro que sigue muestra los resultados observados en la segunda generación del cruce de dos variedades de arvejas en una experiencia destinada a comprobar las leyes de Mendel:

Caracteres (o atributos)			Número de granos observados
Forma	**Albumen**	**Epispermo**	
Redonda	Amarillo	Marrón	115
Redonda	Amarillo	Blanco	38
Redonda	Verde	Marrón	35
Redonda	Verde	Blanco	16
Arrugada	Amarillo	Marrón	25
Arrugada	Amarillo	Blanco	13
Arrugada	Verde	Marrón	10
Arrugada	Verde	Blanco	4
			256

La siguiente es la clasificación de 6 800 personas según el color de ojos y cabellos (Fuente: Anemone, Robert L., *Anthropology 1500: Race, Biology, and Culture*, Kendall Hunt Publishing, 2009):

Ojos	Cabellos				Total
	Rubios	**Castaños**	**Negros**	**Rojos**	
Azules	1 768	807	189	47	2 811
Gris-verdes	946	1 387	746	53	3 132
Castaños	115	438	288	16	857
Total	2 829	2 632	1 223	116	6 800

Un cuadro de este tipo se designa con el nombre de *cuadro de contingencia*.

Los atributos cualitativos pueden estar perfectamente determinados, como el sexo, la presencia o ausencia de un tratamiento proporcionado a ciertos individuos, etc. Cuando se refieren a la forma o al color de los objetos, a la resistencia de los organismos a la enfermedad, o simplemente a la profesión, son más o menos subjetivos y no tienen el rigor de verdaderas mediciones. Es importante tener en cuenta esta restricción en el momento de sacar las conclusiones.

Los ejemplos precedentes nos llevan a la noción de frecuencia. De un modo general, la frecuencia de un carácter es la relación entre el número de individuos que lo poseen y la cantidad total de observaciones, o contenido de la población. El número de individuos que poseen el carácter se llama *cantidad de repeticiones*, o *efectivo*. Dícese que las observaciones se distribuyen según los diferentes valores, o clases, de la variabilidad.

Estas expresiones fueron recomendadas por la Comisión de Tipificación de la Terminología en el Cálculo de Probabilidades y la Estadística Matemática. En lo sucesivo, cuando no puede haber ambigüedad, llamaremos *frecuencia,* ya sea al número de observaciones o al porcentaje de las observaciones, en relación con el total.

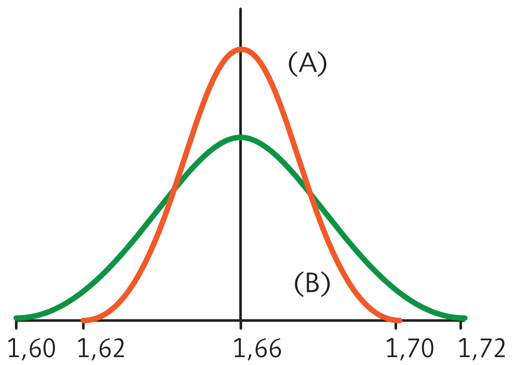
Reducción de las observaciones

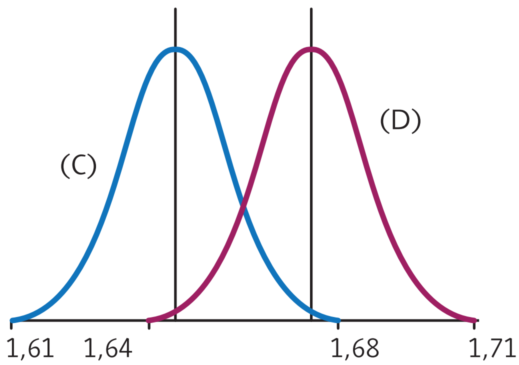
Los cuadros y gráficos contienen la totalidad de la información que se recoge; dan una idea completa, pero a menudo confusa, de la población estudiada. Una cantidad considerable de cifras constituye un trabajo pesado, poco cómodo y que se presta mal a las comparaciones. Una de las primeras tareas del estadístico será, pues, reducir los datos y remplazarlos por una pequeña cantidad de parámetros o características.

Una operación familiar para el físico consiste en repetir las mediciones y, después de haber determinado, digamos, 100 veces la longitud de un mismo objeto, reemplazar esta *población de mediciones* por su media aritmética, acompañada de un índice que dé cuenta del error posible. En la mayoría de los casos el estadístico no trabaja de otro modo y, por lo tanto, las leyes relativas a la "teoría de los errores" no son diferentes de las que se encuentran en el estudio de muchas poblaciones.

De modo general, toda distribución de frecuencias de un carácter mensurable puede distinguirse por dos categorías de parámetros que definen la posición y la dispersión de las observaciones. Los esquemas que siguen, en los que las distribuciones experimentales han sido remplazadas por curvas continuas, presentarán claramente el sentido de esta distinción. Las distribuciones se refieren a las tallas de cuatro grupos de individuos adultos, expresándose las frecuencias porcentuales en relación con el contenido del grupo.

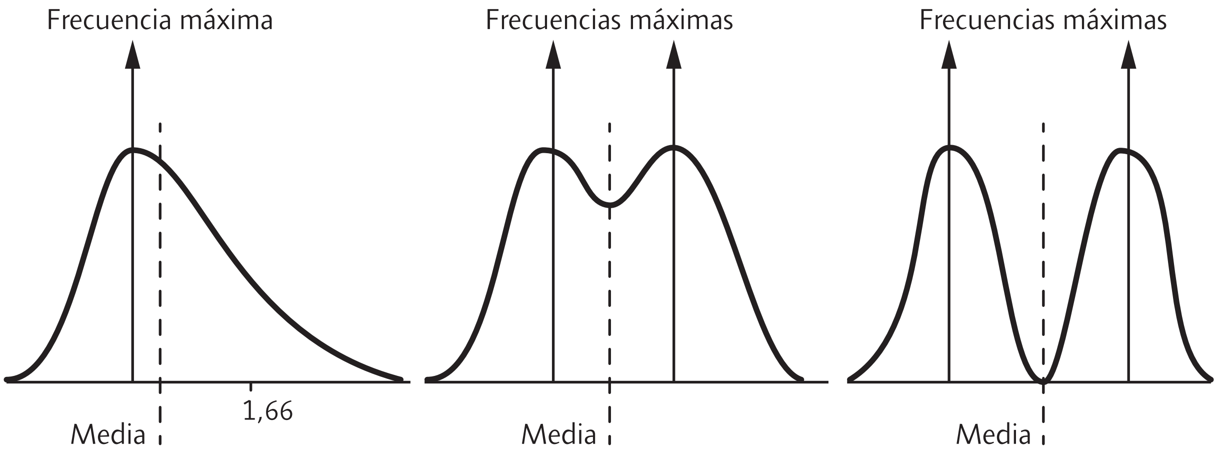
Los grupos A y B poseen la misma talla media, 1,66 m (igual posición de las curvas de frecuencia), pero las alturas individuales están comprendidas entre 1,62 y 1,70 m en el grupo A, mientras que en el grupo B se gradúan desde 1,60 a 1,72 m (dispersión diferente). Por el contrario, los grupos C y D tienen la misma dispersión, pero se centran alrededor de medias diferentes.





Conviene observar que los problemas con los que trabajan físicos y estadísticos, aunque referentes a métodos análogos, son fundamentalmente distintos. La longitud de un objeto está perfectamente definida y la imperfección del instrumento de medición o de los sentidos del observador es el factor responsable de la dispersión de los resultados. La noción de *altura media*, por el contrario, representa un carácter convencional y no es evidente *a priori* que sea la talla del mayor número de individuos. Es lo que ocurre cuando las curvas de frecuencia presentan una de las formas representadas en la figura siguiente.

En el primer esquema, la distribución es asimétrica y la talla máxima resulta inferior, en frecuencia, a la media. En el segundo –simétrico–, hay dos tallas diferentes, que corresponden a un máximo de las observaciones.



El tercero acentúa todavía más este fenómeno: ningún individuo tiene una talla que corresponda a la media. De hecho, los dos últimos esquemas corresponden a grupos o poblaciones heterogéneas. El significado de los parámetros de posición y de dispersión no es claro, en realidad, a menos que las poblaciones sean homogéneas, es decir, que obedezcan a una ley de repartición bien definida.

Estas observaciones se extienden al caso en que la variable es físicamente discontinua. Así, en el ejemplo relativo a las familias de 8 hijos se puede calcular que el número medio de niños es 4,117; esta cifra sugiere que la cantidad mayor de familias tiene 4 niños y 4 niñas, siendo la tendencia general una ligera superioridad numérica de varones; pero es bien evidente que ninguna madre ha alumbrado una cantidad fraccionaria de varones y mujeres.

Parámetros de posición

El parámetro de posición más utilizado es la media aritmética, pero se recurre algunas veces a la mediana, a la moda, o bien a otras características.

La media aritmética. Todos sabemos calcular la media de una serie de cifras. Naturalmente, cada medida debe contarse tantas veces como se repite; en lenguaje matemático, cada valor de la variable debe ser afectado con un peso igual a su frecuencia. La media aritmética de la variable *x* generalmente se designa con el símbolo $\overline{x}$.

Así, en el ejemplo anterior referente a los pesos de 1 000 cigarrillos, la media aritmética, o el peso medio, es:

$$\overline{x} = \frac{1}{1000}\left[(17\times 1{,}05)+(15\times 1{,}07)+(27\times 1{,}09)\ldots+(16\times 1{,}35)\right]=1{,}2 \text{ g.}$$

La mediana. Es el valor de la variable definida por la condición de que existe un número igual de observaciones inferiores y superiores a este valor. Por ejemplo, si se dispone de las cinco medidas siguientes:

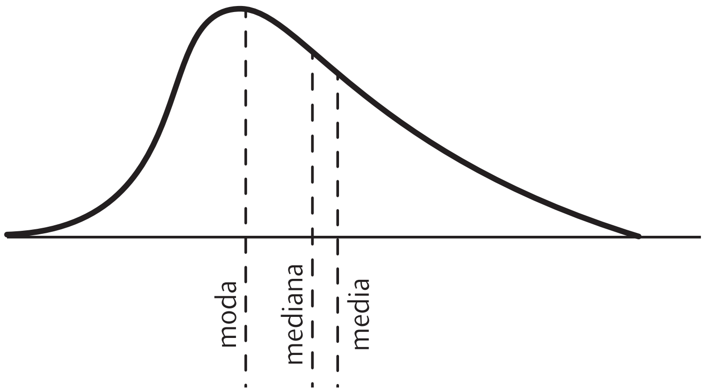
$$y = 2,\ 3,\ \underbrace{5}_{\text{mediana}},\ 7,\ 13$$

la mediana es 5, mientras que la media aritmética es 6. Una de las ventajas de la mediana en el análisis de ciertos fenómenos es que está menos sujeta que la media aritmética a las influencias de los valores extremos de la variable. En el ejemplo anterior, si se reemplaza la medida de la derecha (13) por una cifra francamente separada del conjunto de las otras cuatro medidas –digamos 38–, la mediana no se modifica en tanto que la medía pasa de 6 a 11. Cuando la cantidad de observaciones es par, por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 13, 15, la mediana está indeterminada entre los dos valores centrales 5 y 7. En el caso de los datos agrupados se determina, sin dificultad, la clase en que resulta la mediana; su valor exacto se define por una regla de proporcionalidad; por ejemplo, en la distribución de los pesos de los cigarrillos se encuentra:

$$\text{mediana} = 1{,}2 \text{ g.}$$

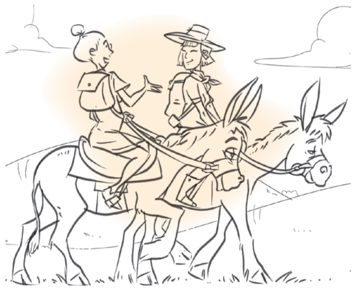
La moda. La moda, o dominante, es el valor de la variable cuya frecuencia es máxima; puede ser única o múltiple (en una curva de varias máximas). Su determinación es inmediata en el caso de una variable discontinua; cuando los datos están agrupados por clases, la determinación precisa de la moda requiere ciertas hipótesis y algunos cálculos.

En cada distribución simétrica la media aritmética, la mediana y la moda se confunden; no ocurre lo mismo cuando la distribución es asimétrica (véase la figura siguiente).



Otros parámetros de posición. Citemos simplemente para recordar, ya que su empleo es poco común, ciertas generalizaciones de la noción de media: *media geométrica* y *media armónica*.

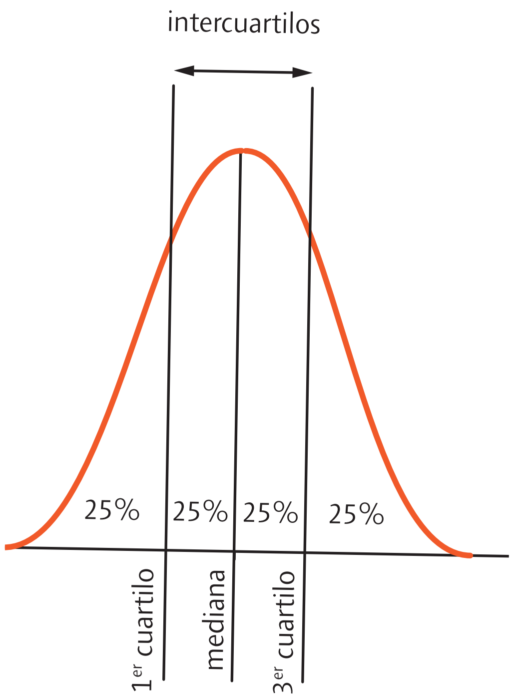
Parámetros de dispersión



Cuartiles. Deciles. Centiles. Los cuartiles son los tres valores de la variable que separan la distribución en cuatro partes que incluyen la misma cantidad de observaciones. Se les da el nombre de primer cuartil (o cuartil inferior), segundo cuartil (que se confunde con la mediana) y tercer cuartil (o cuartil superior). Las ordenadas elevadas en el punto de los tres cuartiles dividen el diagrama, o la curva de frecuencia, en cuatro partes cuyas áreas, proporcionales al número de observaciones entre las ordenadas que las limitan, son iguales entre sí. La distancia entre el primer y el tercer cuartil se llama *desviación intercuartil* y es evidente que cuanto menor es esta desviación, menos dispersas están las observaciones.

Los cuartiles se calculan de la misma manera que la mediana. Los hallaremos sin dificultad en el ejemplo del pesado individual de 1 000 cigarrillos al salir de la máquina.

Primer cuartil: 1,159 g; segundo cuartil: 1,200 g; tercer cuartil: 1,243 g, lo que significa que, de los 1 000 cigarrillos: 250 tienen un peso inferior a 1,159 g, 250 tienen un peso comprendido entre 1,159 y 1,200 g; 250 tienen un peso comprendido entre 1,200 y 1,243 g; 250 tienen un peso superior a 1,243 g. La desviación intercuartil es igual a 0,084 g (figura de abajo).



Los deciles se definen de la misma manera; hay nueve deciles que dividen el ámbito de la variabilidad en 10 intervalos, conteniendo cada uno el 10% de las observaciones. Hay también 99 centiles; los 2 centiles extremos determinan un intervalo que contiene el 98% de las mediciones.

Desviación media. Desviación típica. Momentos. La posición de las observaciones se caracteriza, en la mayoría de los casos, por la media aritmética; por lo tanto, es lógico definir la dispersión a partir de las desviaciones de las diferentes medidas en relación con su media. En consecuencia, la dispersión será más débil en cuanto estas desviaciones, tomadas en conjunto, sean más pequeñas.

Consideremos las mediciones de los pesos realizados en los 1 000 cigarrillos. La media es $\bar{x}$ = 1,2 g. Los diferentes valores de la variable (puntos medios de las clases), sus desviaciones en relación con la media y los efectivos correspondientes están inscritos en las tres primeras columnas del cuadro siguiente. La cuarta columna da el cálculo de la suma algebraica de las desviaciones, contando, naturalmente, cada valor de la variable tantas veces como medidas suponga.

Valores de la variable (pesos) = puntos medios de las clases	Desvíos en relación con la media aritmética (1,2 g)	Número de cigarrillos	Cálculo de la suma de los desvíos	Cálculo de la suma de los "cuadrados" de los desvíos
1,05	−0,15	17	(−0,15) × 17 = −2,55	$(0,15)^2$ × 17 = 0,3825
1,07	−0,13	15	(−0,13) × 15 = −1,95	$(0,13)^2$ × 15 = 0,2535
1,09	−0,11	27	(−0,11) × 27 = −2,97	$(0,11)^2$ × 27 = 0,3267
1,11	−0,09	47	(−0,09) × 47 = −4,23	$(0,09)^2$ × 47 = 0,3807
1,13	−0,07	63	(−0,07) × 63 = −4,41	$(0,07)^2$ × 63 = 0,3087
1,15	−0,05	85	(−0,05) × 85 = −4,25	$(0,05)^2$ × 85 = 0,2125
1,17	−0,03	117	(−0,03) × 117 = −3,51	$(0,03)^2$ × 117 = 0,1053
1,19	−0,01	129	(−0,01) × 129 = −1,29	$(0,01)^2$ × 129 = 0,0129
1,21	+0,01	126	(+0,01) × 126 = +1,26	$(0,01)^2$ × 126 = 0,0126
1,23	+0,03	112	(+0,03) × 112 = +3,36	$(0,03)^2$ × 112 = 0,1008
1,25	+0,05	88	(+0,05) × 88 = +4,40	$(0,05)^2$ × 88 = 0,2200
1,27	+0,07	69	(+0,07) × 69 = +4,83	$(0,07)^2$ × 69 = 0,3381
1,29	+0,09	42	(+0,09) × 42 = +3,78	$(0,09)^2$ × 42 = 0,3402
1,31	+0,11	31	(+0,11) × 31 = +3,41	$(0,11)^2$ × 31 = 0,3751
1,33	+0,13	16	(+0,13) × 16 = +2,08	$(0,13)^2$ × 16 = 0,2704
1,35	+0,15	16	(+0,15) × 16 = +2,40	$(0,15)^2$ × 16 = 0,3600
Total		1 000	+25,52 −25,16 +0,36	4,0000

Según la definición misma de la media aritmética, esta suma es idénticamente nula (el valor hallado + 0,36 proviene de que la media exacta es 1,20036 g y ha sido redondeada en 1,2 g). La suma algebraica de las diferencias no puede, pues, proporcionarnos ningún conocimiento acerca de la dispersión.

Suma aritmética de los desvíos. Se obtiene en la columna 4, contando todos los desvíos con el signo +. La media de estos desvíos:

$$e_a = \frac{50,68}{1000} = 0,0507$$

es tanto más pequeña cuanto más agrupadas estén las medidas; este índice de dispersión se llama *desviación media aritmética*.

Suma de los cuadrados de los desvíos. En vez de tomar los valores absolutos (o aritméticos) de los desvíos, se pueden tomar sus cuadrados. El cálculo figura en la columna 5 del cuadro anterior. Ahí también la suma, o la media de los cuadrados, es más pequeña cuando la dispersión es menor. He aquí la media de los cuadrados de los desvíos:

$$s^2 = \frac{4,000}{1000} = 0,004$$

que se designa con el nombre de *cuadrado medio* o *varianza*. La raíz cuadrada de la varianza

$$s = \sqrt{0,004} = 0,063$$

es la desviación típica. Este índice de dispersión se basa en consideraciones teóricas que serán tratadas más adelante; se emplea en forma muy general y lleva también los nombres de *desvío cuadrático medio*, *desviación tipo*, *desvío típico*, etcétera.

Notemos ahora que la relación $\frac{e_a}{s} = \frac{0{,}0507}{0{,}063}$ entre la desviación media y la desviación típica es cercana a 0,80. Esta propiedad es el resultado, como se verá, de que la distribución estudiada se aproxima mucho a la distribución normal.

En el ejemplo anterior la cantidad de observaciones es grande. Cuando es pequeña –digamos inferior a 100– la suma de los cuadrados de los desvíos debe dividirse, no por la cantidad de medidas, sino por el número de medidas menos una unidad; la justificación de este cambio, que a primera vista puede parecer una sutileza de matemático, se presentará más adelante.

Para quien no teme los símbolos matemáticos resumiremos con las fórmulas siguientes las definiciones de los principales índices que acabamos de describir.

$$\textbf{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x}{N}; \ \textbf{desviación media: } e_a = \frac{\sum \left| x - \bar{x} \right|}{N};$$

$$\textbf{varianza: } s^2 = \frac{\sum \left(x - \bar{x} \right)^2}{N-1} \sim \frac{\sum \left(x - \bar{x} \right)^2}{N} \text{ cuando } N \text{ es grande;}$$

$$\textbf{desviación típica: } s = \sqrt{\frac{\sum \left(x - \bar{x} \right)^2}{N-1}} \sim \sqrt{\frac{\sum \left(x - \bar{x} \right)^2}{N}}.$$

N es el número total de observaciones; x significa uno cualquiera de los valores observados; el símbolo Σ implica la *sumatoria* para todos los valores de la variable del término algebraico que figura a su derecha; $|\ |$ se lee: valor absoluto (del número que se halla entre las dos barras); ~ es el signo de equivalencia.

Error probable. En una distribución simétrica, el error probable es el desvío simétrico alrededor de la medida que contiene el 50% de las observaciones; es igual a la mitad de la desviación intercuartil y se expresa e_p. En el ejemplo precedente tenemos:

$$e_p = \frac{0{,}084}{2} = 0{,}042 \ \text{ y la relación } \frac{e_p}{s} = \frac{0{,}042}{0{,}062} \approx \frac{2}{3},$$

valor notable que se encuentra en toda distribución semejante a la ley normal.

Valores de la variable (pesos) = puntos medios de las clases	Desvíos en relación con la media aritmética (1,2 g)	Número de cigarrillos	Cálculo de la suma de los desvíos	Cálculo de la suma de los "cuadrados" de los desvíos
1,05	−0,15	17	(−0,15) × 17 = −2,55	$(0{,}15)^2$ × 17 = 0,3825
1,07	−0,13	15	(−0,13) × 15 = −1,95	$(0{,}13)^2$ × 15 = 0,2535
1,09	−0,11	27	(−0,11) × 27 = −2,97	$(0{,}11)^2$ × 27 = 0,3267
1,11	−0,09	47	(−0,09) × 47 = −4,23	$(0{,}09)^2$ × 47 = 0,3807
1,13	−0,07	63	(−0,07) × 63 = −4,41	$(0{,}07)^2$ × 63 = 0,3087
1,15	−0,05	85	(−0,05) × 85 = −4,25	$(0{,}05)^2$ × 85 = 0,2125
1,17	−0,03	117	(−0,03) × 117 = −3,51	$(0{,}03)^2$ × 117 = 0,1053
1,19	−0,01	129	(−0,01) × 129 = −1,29	$(0{,}01)^2$ × 129 = 0,0129
1,21	+0,01	126	(+0,01) × 126 = +1,26	$(0{,}01)^2$ × 126 = 0,0126
1,23	+0,03	112	(+0,03) × 112 = +3,36	$(0{,}03)^2$ × 112 = 0,1008
1,25	+0,05	88	(+0,05) × 88 = +4,40	$(0{,}05)^2$ × 88 = 0,2200
1,27	+0,07	69	(+0,07) × 69 = +4,83	$(0{,}07)^2$ × 69 = 0,3381
1,29	+0,09	42	(+0,09) × 42 = +3,78	$(0{,}09)^2$ × 42 = 0,3402
1,31	+0,11	31	(+0,11) × 31 = +3,41	$(0{,}11)^2$ × 31 = 0,3751
1,33	+0,13	16	(+0,13) × 16 = +2,08	$(0{,}13)^2$ × 16 = 0,2704
1,35	+0,15	16	(+0,15) × 16 = +2,40	$(0{,}15)^2$ × 16 = 0,3600
Total		1 000	+25,52	4,0000
			−25,16	
			+0,36	

Momentos. El cuadro de arriba, que ya comentamos, puede prolongarse en una serie de columnas en las que se calcule la suma de los cubos, de la cuarta potencia, etc., de los desvíos respecto de la media. Los momentos de tercer orden, de cuarto orden, etc., se obtienen dividiendo estas sumas por el número de observaciones.

Estas características y ciertos coeficientes que se derivan de las mismas (*coeficientes de Pearson*) permiten definir, de un modo muy general, la forma de la distribución. Se puede observar que en toda distribución simétrica los momentos de orden impar (3ª, 5ª potencia) son nulos.

Intervalo de variación (o *extensión*). Es un parámetro de dispersión muy simple, puesto que se define como el desvío entre las dos medidas extremas, pero no tiene aplicación más que en las muestras pequeñas.

Por ejemplo, si la medida de las tasas de cenizas en dos muestras de papel que comprenden, cada una, el contenido de 5 extracciones da los resultados siguientes:

- primera muestra: 9,2%; 9,3%; 9,8%; 10,0%; 10,5%;
- segunda muestra: 9,4%; 9,4%; 9,6%; 9,8%; 9,9%,

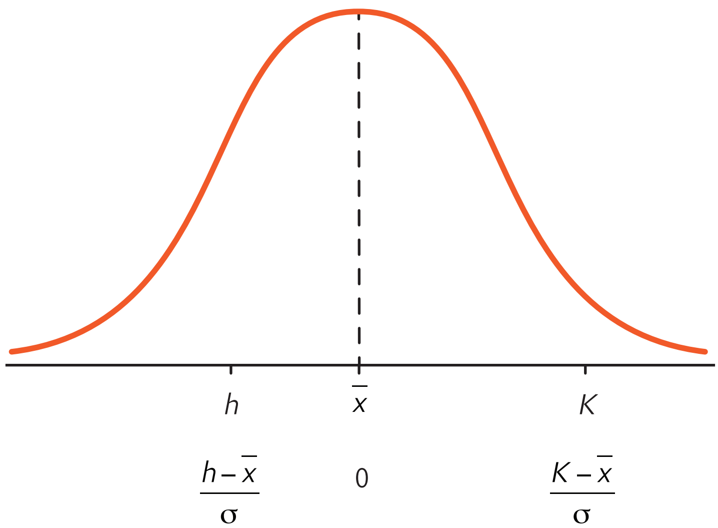
el intervalo de variación es de 1,3% para la primera muestra y de 0,5 % para la segunda.

Interpretación de los datos

Hasta aquí, el estadístico se ha preocupado por poner en orden las observaciones y condensarlas en una pequeña cantidad de características simples. Esta fase preparatoria del trabajo, sobre todo descriptiva, es siempre indispensable. Proyecta ya una cierta luz sobre el aspecto del fenómeno estudiado; pero tiene por fin, en primer lugar, proporcionar los elementos fácilmente manejables que se presten a una interpretación más profunda. Los problemas de interpretación no pueden abordarse eficazmente sino en la medida en que se conocen las propiedades fundamentales de las leyes de distribución más frecuentemente observadas; su estudio constituirá el objeto de un próximo número de *Leñitas Geométricas*.

Armando festivales y pasatiempos

Tipificación. Cálculo de probabilidades para una distribución $N(\bar{x}, \sigma)$



Para calcular probabilidades en una distribución normal cualquiera, habrá que expresar los límites de los intervalos en número de desviaciones típicas que se separan de la media. Por ejemplo:

$$P[x \leq K] = P\left[z \leq \frac{K-\bar{x}}{\sigma}\right]$$

$\frac{K-\bar{x}}{\sigma}$ es el número de desviaciones típicas, σ, en que K dista de $\bar{x}$. El cambio $K \to \frac{K-\bar{x}}{\sigma}$ se llama *tipificación de la variable*. La variable, ya tipificada, sigue una $N(0, 1)$.

Ejemplos. Para leer, comparar y reflexionar

1. En una $N(6, 4)$ calculamos las probabilidades:

$$a)\ P[x \leq 3]; \quad b)\ P[x \geq 12]; \quad c)\ P[5 \leq x \leq 8];$$

$$d)\ P[x < \bar{x} + 0{,}5\sigma]; \quad e)\ P[x > \bar{x} + 1{,}75\sigma]; \quad f)\ P[\bar{x} + 0{,}5\sigma < x < x + 1{,}75\sigma].$$

a) $P[x \leq 3] = P\left[z \leq \frac{3-6}{4}\right] = P[z \leq -0{,}75] = 1 - \phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266.$

b) $P[x \geq 12] = \left[z \geq \frac{12-6}{4}\right] = 1 - \phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$

c) $P[5 \leq x \leq 8] = \phi(0{,}25) - 1 = 0{,}6915 + 0{,}5987 - 1 = 0{,}2902.$

2. Resolvamos los ejercicios pendientes:

d) $P[x < \bar{x} + 0{,}5\sigma] = P[z < 0{,}5] = \phi(0{,}5) = 0{,}6915.$

e) $P[x > \bar{x} + 1{,}75\sigma] = P[z > 1{,}75] = 1 - \phi(1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401.$

f) $P[\bar{x} + 0{,}5\sigma < x < x + 1{,}75\sigma] = P[0{,}5 < z < 1{,}75] = \phi(1{,}75) - \phi(0{,}5) = 0{,}9599 - 0{,}6915 = 0{,}2684.$

Para resolver en grupo de discusión

Las estaturas de 600 soldados se distribuyen normalmente, con una media de 168 cm y una desviación típica de 8 cm. ¿Cuántos de ellos miden 168 cm?

Es una distribución continua $N(168, 8)$. Si tomamos la pregunta en sentido estricto, es decir, cuántos miden *exactamente* 168 cm, la respuesta es: ninguno. (Repasemos lo que se dice en el tema anterior sobre la probabilidad de valores puntuales de la variable en distribuciones continuas. *Leñitas Geométricas* N° 6, 5ª época, pp. 9-12).

Interpretamos, pues, que medir 168 cm significa medir entre 167,5 y 168,5 cm. Por tanto:

$$x \text{ es } N(168{,}8) \to z = \frac{x-168}{8} \text{ es } N(0{,}1).$$

$$167{,}5 \leq x \leq 168{,}5 \to \frac{167{,}5-168}{8} \leq z \leq \frac{168{,}5-168}{8}.$$

Hemos de calcular, pues, la probabilidad:

$$P[-0{,}0625 \leq z \leq 0{,}0625] = P[-0{,}06 \leq z \leq 0{,}06].$$

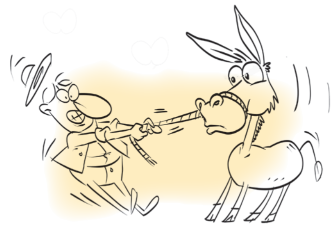
Pasos para resolver:

- Miremos en la tabla el valor de $\phi(0{,}06)$ [Véase la tabla de áreas bajo la $N(0, 1)$ en *Leñitas Geométricas* Nº 8, 5ª época, p. 13]

- Comprobemos que la probabilidad que se pide es $2 \cdot \phi(0{,}06) - 1$ y calculémosla.
- Multipliquemos la probabilidad obtenida por 600 y obtendremos el número aproximado de soldados con estatura 168 cm (solución: 28 o 29).

Averigüemos cuántos soldados habrá de más de 185 cm. Para ello consideremos el intervalo $(184{,}5; \infty)$.

Entrenamiento para afianzar la idea de normalidad



Hay dos enunciados en el complemento estadístico en *Leñitas Geométricas* N° 6, 5ª época, p. 14, cuyas soluciones daremos a continuación.

1. Las estaturas de 1 400 mujeres se distribuyen según la $N(160{,}8; 6{,}4)$. Calcular los valores $\bar{x} - 3\sigma$, $\bar{x} - 2\sigma$, $\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} + 2\sigma$ y $\bar{x} + 3\sigma$. Repartir a las 1 400 mujeres, aproximadamente, en esos intervalos.
   - $\bar{x} - 3\sigma = 141{,}6$. Menores que 141,6 hay el 0,13% de 1 400 = 2 mujeres.
   - $\bar{x} - 2\sigma = 148$. Entre 141,6 y 148 hay el 2,15% de 1 400 = 30 mujeres.

   Continuar haciendo el reparto en los intervalos $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} - \sigma)$, $(\bar{x} - \sigma, \bar{x})$, etc.

   Solución

Intervalo	$(-\infty; 141{,}6]$	$(141{,}6; 148]$	$(148; 154{,}4]$	$(154{,}4; 160{,}8]$
N° de mujeres	2	30	190	478

Intervalo	$(160{,}8; 167{,}2]$	$(167{,}2; 173{,}6]$	$(173{,}6; 180]$	$(180; \infty)$
N° de mujeres	477	191	30	2

2. En un estanque de una piscifactoría se ha tomado una muestra de 3 000 truchas y se ha medido, en cm, su longitud, resultando que se distribuyen según la $N(26,7)$. Calcular, de forma análoga a como lo hemos hecho en el ejercicio anterior, los valores $\bar{x} - 3\sigma$, $\bar{x} - 2\sigma$, $\bar{x} - \sigma$, ...; establecer los intervalos de longitud correspondientes y repartir las 3 000 truchas de la muestra en esos intervalos.

   Solución

Intervalo	(0; 5]	(5; 12]	(12; 19]	(19; 26]
N° de truchas	4	64	408	1 023

Intervalo	(26; 33]	(33; 40]	(40; 47]	$(47; \infty)$
N° de truchas	1 025	408	65	3

3. En una distribución $N(0, 1)$ calculemos las siguientes probabilidades:

   a) $P[z = 2]$; b) $P[z \leq 2]$; c) $P[z \geq 2]$; d) $P[z \leq -2]$; e) $P[z \geq -2]$; f) $P[-2 \leq z \leq 2]$

   Solución:

   a) $P[z = 2] = 0$; b) $P[z \leq 2] = 0{,}9772$; c) $P[z \geq 2] = 0{,}0228$; d) $P[z \leq -2] = 0{,}0228$; e) $P[z \geq -2] = 0{,}9772$; f) $P[-2 \leq z \leq 2] = 0{,}9544$.

4. En una distribución $N(0, 1)$ calculemos las siguientes probabilidades:

   a) $P[0{,}81 \leq z \leq 1{,}33]$; b) $P[1{,}33 \leq z \leq 0{,}81]$; c) $P[-0{,}81 \leq z \leq 1{,}33]$; d) $P[-1{,}33 \leq z \leq 0{,}81]$.

   Solución:

   a) 0,1172; b) 0,6992; c) 0,6992; d) 0,1172.

5. En una distribución $N(22, 5)$ calculemos las siguientes probabilidades:

a) $P[x \leq 27]$; b) $P[x \geq 27]$; c) $P[x \geq 12{,}5]$; d) $P[15 \leq x \leq 20]$; e) $P[17 \leq x \leq 30]$.

Solución:

a) 0,8413; b) 0,1587; c) 0,9713; d) 0,2638; e) 0,7605.

6. Los pesos de 600 soldados se distribuyen según la $N(67, 5)$. Calculemos cuántos de ellos pesan:

a) más de 80 kg [tomemos el intervalo $(80{,}5; \infty)$]; b) 50 kg o menos [tomemos el intervalo $(-\infty; 50{,}5)$]; c) menos de 60 kg [tomemos el intervalo $(-\infty; 59{,}5)$]; d) 70 kg; e) entre 60 kg y 80 kg (los extremos incluidos).

Solución:

a) 2 soldados; b) ninguno; c) 40 soldados; d) 34 soldados; e) 548 o 549 soldados.

7. Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen según la $N(65,18)$. Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigna uno de los siguientes comentarios:

- duro de oído;
- poco sensible a la música;
- normal;
- sensible a la música;
- extraordinariamente dotado para la música;

de modo que haya en cada uno de los grupos, respectivamente, un 10%, un 35%, un 30%, un 20% y un 5% del total de individuos observados. ¿En qué puntuaciones pondría los límites entre los distintos grupos?

Solución:

- duro de oído → menos de 42;
- poco sensible → entre 42 y 62;
- normal → entre 62 y 77;
- sensible → entre 77 y 95;
- extraordinariamente dotado → más de 95.

8. En una distribución $N(0, 1)$ calculemos las siguientes probabilidades:

a) $P[z \leq 1{,}83]$; b) $P[1{,}5 \leq z \leq 3{,}71]$; c) $P[z \leq 11]$; d) $P[z \leq 4{,}27]$; e) $P[1{,}5 \leq z \leq 2{,}5]$.

Solución:

a) 0,9664; b) 0,9331; c) 1; d) 1; e) 0,0606.

9. En una distribución $N(0, 1)$ calculemos las siguientes probabilidades:

   a) $P[z = 1,6]$; b) $P[2,71 \geq z \geq -1,83]$; c) $P[1,3 \leq z \leq 2,2]$.

   Solución:

   a) 0; b) 0,0302; c) 0,0829.

10. En una distribución $N(43, 10)$ calculemos las siguientes probabilidades:

    a) $P[z \geq 43]$; b) $P[40 \leq x \leq 55]$; c) $P[30 \leq x \leq 40]$.

    Solución:

    a) 0,5; b) 0,5028; c) 0,2853.

11. Supongamos que la variable que expresa el tiempo (en meses) que les tarda en salir el primer diente a los niños es $N(7,5; 1,5)$. Calculemos la probabilidad de que a un niño le salgan los dientes:

    a) Habiendo cumplido ya un año; b) antes de los 5 meses; c) con 7 meses; d) antes de cumplir el primer mes; e) después de haber cumplido 6 meses.

    Solución:

    a) 1; b) 0,0485; c) 0,2586; d) 0; e) 0,8413.

12. En el proceso de fabricación de unas piezas intervienen dos máquinas: la máquina A produce un taladro cilíndrico y la máquina B secciona las piezas con un grosor determinado. Ambos procesos son independientes. El diámetro en mm del taladro producido por A es $N(23; 0,5)$. El grosor en mm producido por B es N (11,5; 0,4).

    a) Calculemos qué porcentaje de piezas tiene un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

    b) Encontremos el porcentaje de piezas que tienen un grosor de entre 10,5 y 12,7 mm.

    c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y b), calculemos qué porcentaje de piezas aceptables se consiguen.

    Nota. Se supone que las medidas están dadas exactamente.

    Solución:

    a) 97,72%; b) 99,25%; c) 96,98%.

13. En ejercicios anteriores ha aparecido un conjunto de soldados cuyas estaturas en cm se distribuyen según la $N(168; 8)$ y sus pesos, en kg, según la $N(67; 5)$.

    a) ¿Qué porcentaje de ellos pesan entre 60 y 80 kg, exactamente?

    b) ¿Qué porcentaje miden entre 160 y 180 cm, exactamente?

    c) ¿Podremos, como en el ejercicio anterior, multiplicar las probabilidades para obtener la proporción de los soldados que cumplen ambas condiciones? Tengamos en cuenta que estatura y peso no son independientes.

    Solución:

    a) 548 o 549 soldados; b) 464 o 465 soldados;

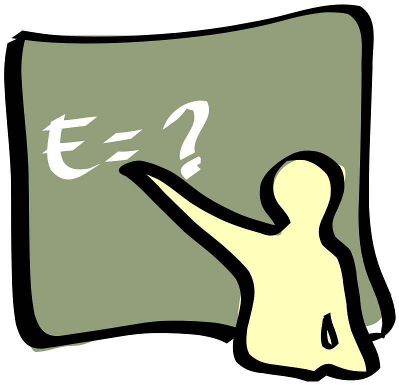
    c) solo se pueden multiplicar probabilidades de sucesos o experimentos independientes.

14. La calificación media en un cierto examen fue 6,5 y la desviación típica 1,6. Si el profesor va a calificar con sobresaliente al 10% de la clase, ¿a partir de qué nota se consigue?

    Solución:

    A partir de 8,5, suponiendo que la distribución de notas sea semejante a la normal.

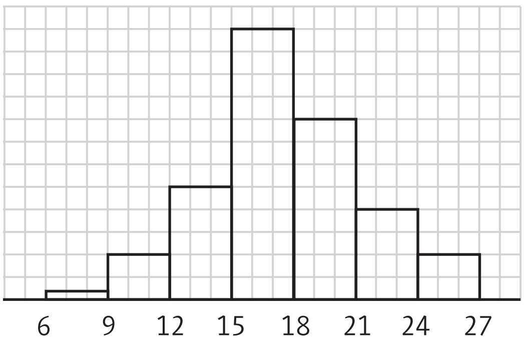
Un diálogo con los maestros

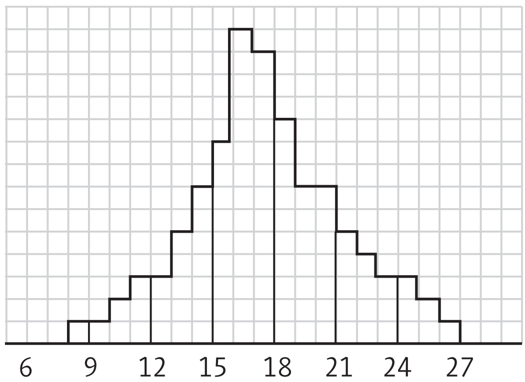


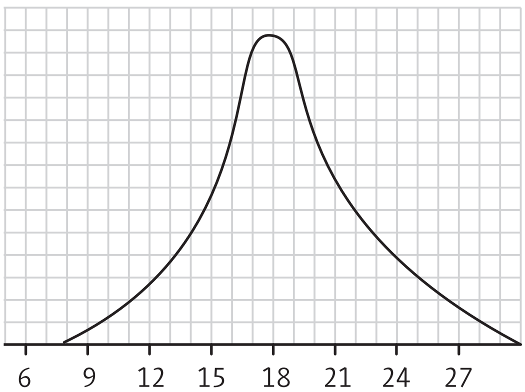
Probabilidades de variable continua

¿Qué relación hay entre las tres gráficas siguientes? ¿Cómo pasamos de cada una a la siguiente? ¿Qué hay de común entre ellas?

En el primer gráfico, se ha recolectado una muestra de judías verdes de una plantación y se han medido sus longitudes. He aquí (abajo) el histograma agrupándolas en intervalos de 3 cm. En el segundo gráfico, si se agrupan de centímetro en centímetro se obtiene el histograma del medio.



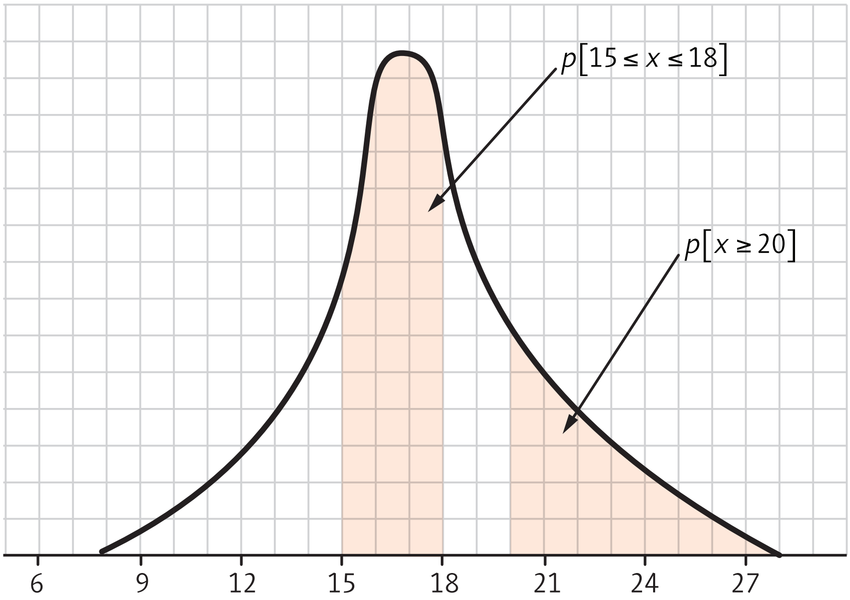




Supondremos, pues, que las longitudes de las judías de toda la plantación se distribuyen, teóricamente, como en el último gráfico (que se expresa en el histograma de derecha, arriba).

Observe que bajo cada una de estas gráficas hay una superficie equivalente a 100 cuadraditos. Cada uno significa el 1% de la población. En las sucesivas gráficas hemos ido acoplándolos, ajustándolos mejor en la posición que les corresponde. Las dos primeras son distribuciones de frecuencias empíricas. La tercera es una distribución de probabilidad teórica.

En las distribuciones de probabilidad de variable continua, el área bajo la curva ha de ser 1 o bien 100 si queremos expresarnos en términos de porcentaje. Para calcular probabilidades, se calcula el área apropiada.



Así, en una distribución como la de la figura anterior, podemos obtener la probabilidad de que una judía verde de esa plantación, tomada al azar, mida más de 20 cm, o la probabilidad de que mida entre 15 y 18 cm, o la de que su longitud esté dentro de cualquier intervalo; basta calcular el área bajo la curva en el intervalo propio.

En una distribución de probabilidad de variable continua no tiene sentido la probabilidad de un valor puntual. Cuando nos preguntamos por la probabilidad de que una judía mida 20 cm, podemos querer decir que mide entre 19,5 cm y 20,5 cm, o, acaso, entre 19,95 y 20,05 cm, si fuéramos capaces de medir longitudes de judías afinando tanto. Pero carece de sentido pretender saber si una judía tiene exactamente 20 cm. (¿Con cuántas cifras decimales de aproximación? Apenas respondamos un número, ya no es "exactamente", sino solo con esa aproximación).

Cálculo de parámetros en una distribución continua

Una función de probabilidad de variable continua está definida por una curva de ecuación $y = f(x)$, siendo $f(x) \geq 0$, que debe cumplir la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

es decir, el área bajo la curva de $f(x)$ debe ser 1. La media de la distribución es:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx,$$

y la desviación típica es la raíz cuadrada de:

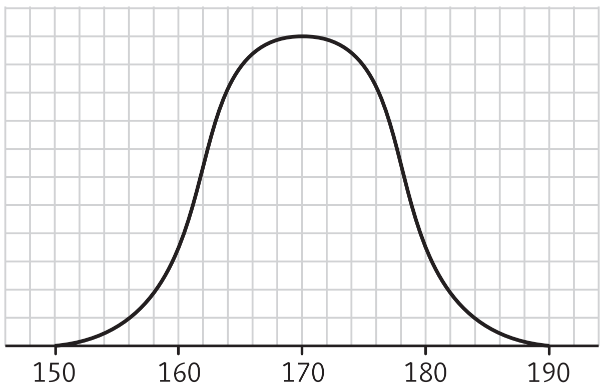
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \bar{x}^2.$$

Armando festivales y pasatiempos

Continúa de *Leñitas Geométricas* Nº 7, 5ª época, p. 26

Problemas y soluciones en distribuciones de variable continua

19. Las estaturas en cm de los jóvenes que acuden a hacer el servicio militar se distribuyen según la gráfica adjunta abajo.



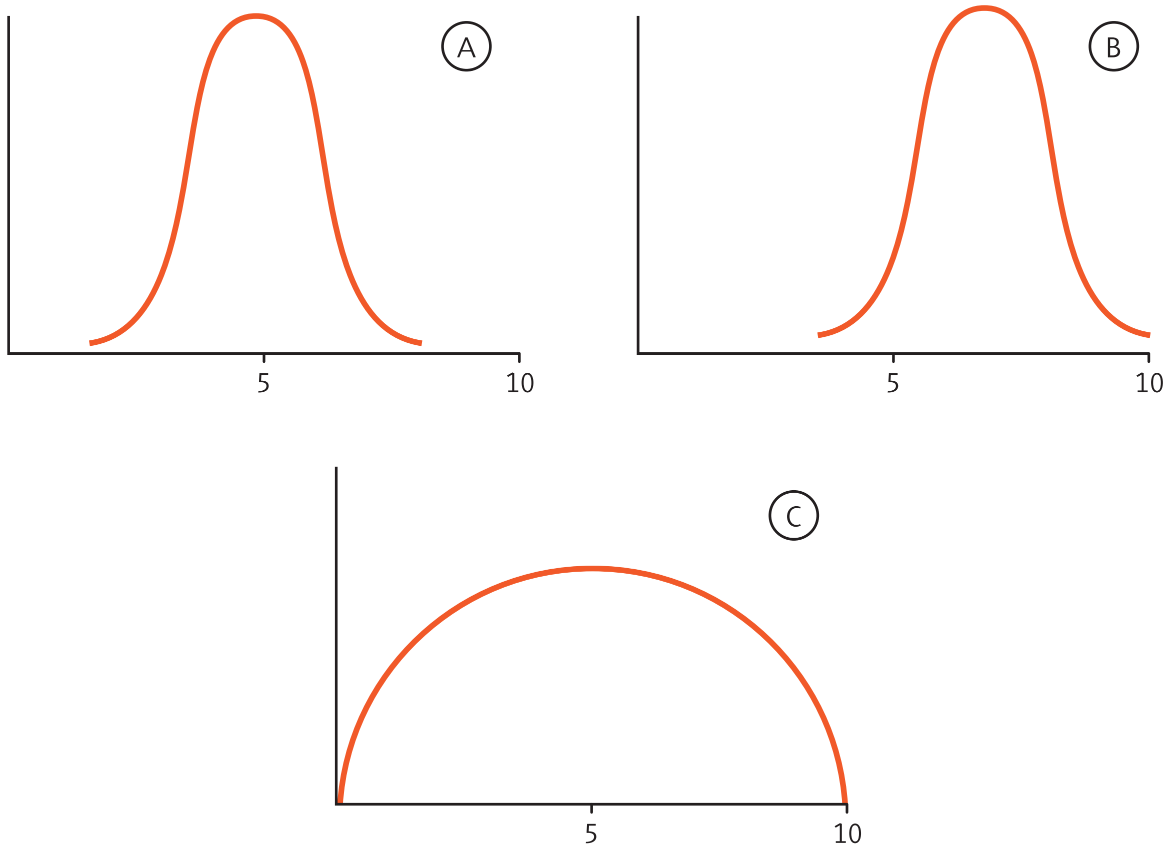
Cuente el número de cuadraditos que hay bajo la curva y verifique que son aproximadamente 100. Calcule la probabilidad de que un soldado mida entre 180 cm y 190 cm. Hágalo de forma aproximada valorando el área bajo la curva que hay en ese intervalo. ¿Qué porcentaje de soldados miden 160 cm? Calcule el área bajo la curva en el intervalo (159,5; 160,5).

Solución:

$$P(180 \le x \le 190) \approx 0{,}05.$$

El porcentaje de soldados que miden 160 cm es, aproximadamente, 3,5%.

20. Se ha hecho un estudio sobre la longitud de ciertas piezas *A*, *B* y *C*, obteniéndose las siguientes gráficas:



Las medias y desviaciones típicas obtenidas son:

$$\overline{x}_{\mathrm{I}} = 5, \quad \sigma_{\mathrm{I}} = 3{,}5; \quad \overline{x}_{\mathrm{II}} = 5, \quad \sigma_{\mathrm{II}} = 1{,}5; \quad \overline{x}_{\mathrm{III}} = 7, \quad \sigma_{\mathrm{III}} = 1{,}5.$$

Asigne a cada gráfica los parámetros adecuados.

Solución:

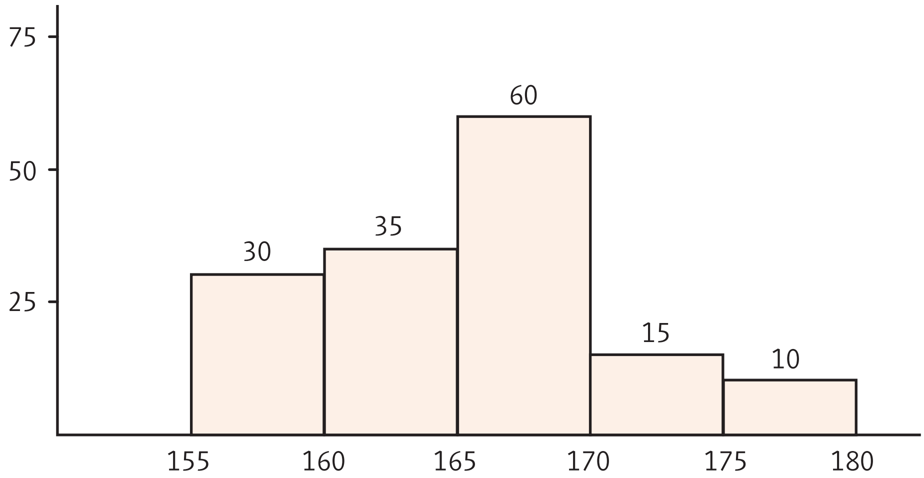
$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{II}; \quad \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{III}; \quad \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{I}$$

21. Al medir a 150 alumnos de 3° Bachillerato obtenemos la siguiente tabla:

Intervalo	155-160	160-165	165-170	170-175	175–180
Frecuencia absoluta	30	35	60	15	10

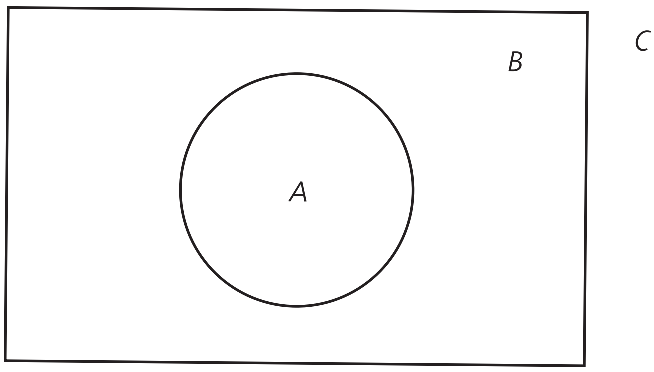
Represente los datos en un histograma y calcule la media y la desviación típica.

Solución:



$\overline{x} = 165{,}5$; $\sigma = 5{,}56$

22. Se lanza un dardo sobre una diana que tiene esta forma:



Se obtienen 10 puntos si el dardo se clava en la zona A, 2 puntos si se coloca en la zona B y ninguno si se sitúa en la zona C. Se lanzan un total de 100 dardos y se reparten así: en A, 20 dardos; en B, 50 dardos; en C, 30 dardos.

Haga una distribución de frecuencias y calcule la media de los puntos obtenidos, así como la desviación típica.

Solución:

Puntos	0	2	10
Dardos	30	50	20

$\overline{x} = 3$; $\sigma = 3{,}6$

23. Dos tiradores anotan los resultados que han obtenido en la diana del ejercicio anterior y dicen que sus distribuciones de probabilidad son:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{array}\right. \qquad \mathrm{II}\left\{\begin{array}{ccc} A & B & C \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{array}\right.$$

Calcule sus medias y desviaciones típicas. ¿Quién es mejor tirador?

Solución:

$\overline{x}_{I} = 4{,}6$; $\sigma_{I} = 4{,}47$; $\overline{x}_{II} = 4$; $\sigma_{II} = 4$.

I es el mejor tirador.

24. Las calificaciones en matemáticas obtenidas por un alumno a lo largo del curso han sido:

3, 8, 5, 6, 7, 6, 4, 5, 6, 5

¿Cuál es su nota media? ¿Y su desviación típica?

Solución:

$\overline{x} = 5{,}5$; $\sigma = 1{,}36$

25. Extraemos cuatro cartas de una baraja de 40 y contamos el número de bastos. Haga una tabla de probabilidades y calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Nº bastos	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{5481}{18278}$	$\frac{8120}{18278}$	$\frac{3915}{18278}$	$\frac{720}{18278}$	$\frac{42}{18278}$

$\overline{x} = 1$, $\sigma = 0{,}832$

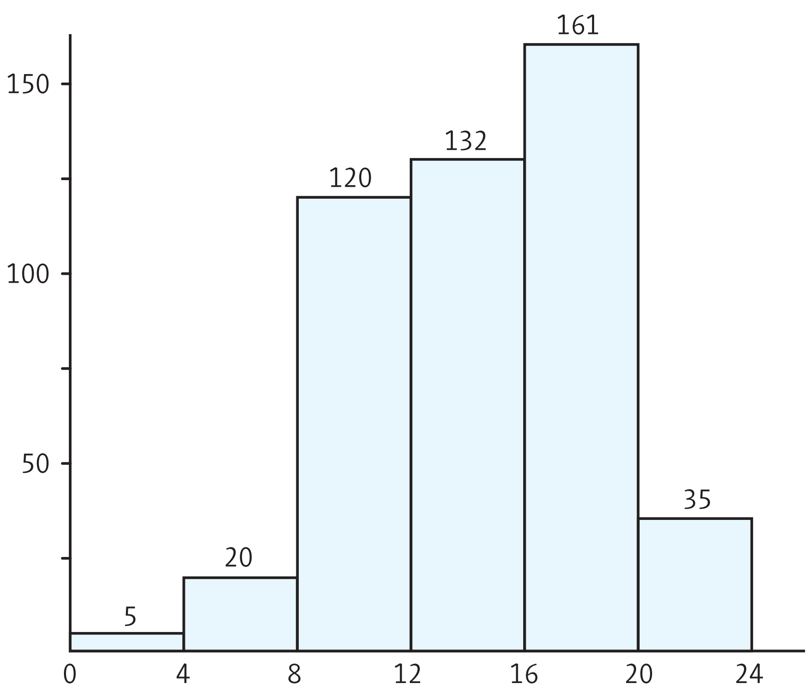
26. En una gasolinera estudian el número de vehículos que repostan a lo largo de un día, obteniéndose:

Hora	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
Vehículo	5	20	120	132	161	35

Represente los datos en un histograma. ¿En qué intervalo de horas el número de vehículos es máximo? Calcule la media y la desviación típica. ¿Qué significado tiene?

Solución:

$\overline{x} = 14{,}47$; $\sigma = 4{,}27$



27. Sobre una mesa colocamos invertidas las siete fichas dobles del dominó, de forma que no veamos su puntuación. Damos la vuelta a una de ellas y anotamos la suma de sus puntos.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Puntos	2	4	6	8	10	12	14
Probabilidad	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

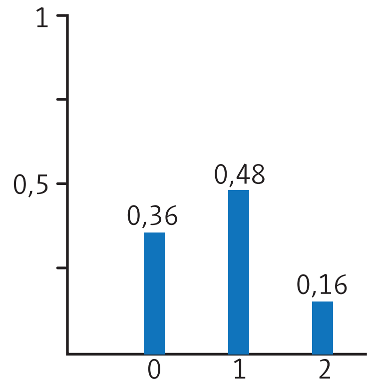
$\bar{x} = 8$, $\sigma = 4$

28. Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos dos veces y anotamos el número de cruces.

Haga una tabla con la distribución de probabilidad, represéntela gráficamente y calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Nº de cruces	0	1	2
Probabilidad	0,36	0,48	0,16



$\bar{x} = 0{,}8$; $\sigma = 0{,}693$

29. La distribución de probabilidad de un suceso viene dada por:

X,	2	3	4	5
P,	0,1	0,3	0,2	0,3

¿Cuánto vale $P(3)$? Calcule la media y la desviación típica.

Solución:

$P(3) = 0{,}1$; $\bar{x} = 3{,}3$; $\sigma = 1{,}417$

30. En un monedero hay 5 monedas: una de peseta, dos de duro y dos de cinco duros. Sacamos una moneda al azar y anotamos su valor en pesetas. Establezca la distribución de probabilidad y calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Valor	1	5	25
Probabilidad	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$\bar{x} = 12{,}2$; $\sigma = 10{,}55$

31. Una empresa hace un estudio de mercado para lanzar un producto *A* u otro producto *B*. Según el estudio, si comercializa *A*, tiene la probabilidad 0,8 de ganar 30 millones y una probabilidad 0,2 de perder 10 millones. Si comercializa *B*, tiene una probabilidad 0,6 de ganar 20 millones y una probabilidad 0,4 de perder 4 millones. ¿Qué producto cree que debe comercializar? ¿Por qué?

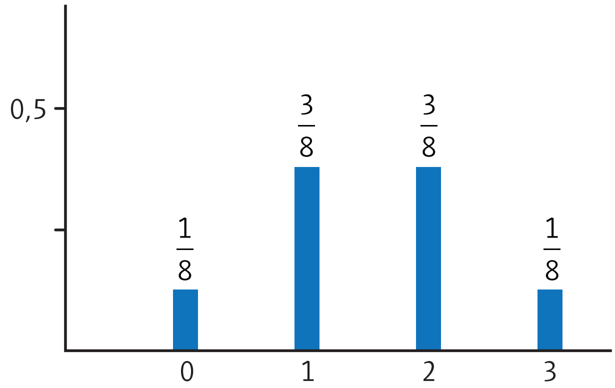
Solución:

Calculando las respectivas medias y desviaciones se obtiene: $\overline{x_A} = 22$, $\sigma_A = 16$ y $\overline{x_B} = 10{,}4$; $\sigma_B = 11{,}75$. Como la mayor parte de la probabilidad se sitúa en el intervalo $(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma)$, el producto *A*, en principio, parece tener mayores probabilidades de ganancia.

32. Se lanzan tres monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenidas. Haga una tabla con las probabilidades, represéntela gráficamente y calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Nº de caras	0	1	2	3
Probabilidad	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

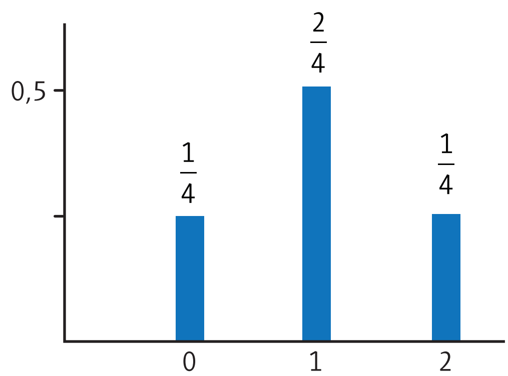


$\overline{x} = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}866$

33. En las familias con dos hijos se observa el número de hijos varones. Haga una tabla con las probabilidades, represéntela gráficamente y calcule la media y la desviación típica.

Solución:

Nº de varones	0	1	2
Probabilidad	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

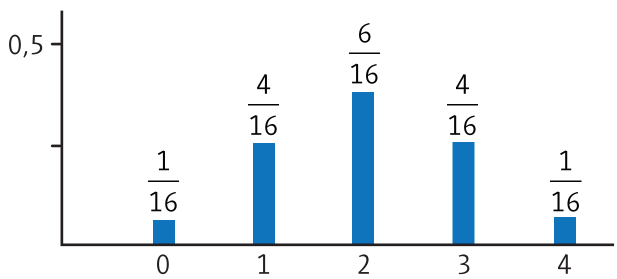


$\overline{x} = 1$, $\sigma = 0{,}707$

34. En las familias con cuatro hijos nos fijamos en el número de hijas. Haga una tabla con las probabilidades, represéntela gráficamente y calcule la media y la desviación típica.

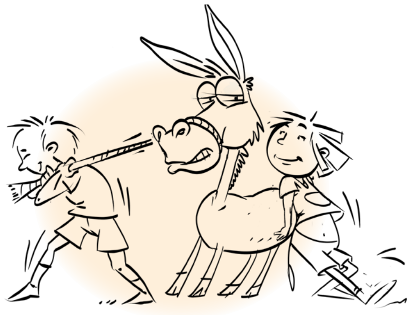
Solución:

Nº de hijas	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$



$\overline{x} = 2$; $\sigma = 1$.

Más sugerencias metodológicas para los festivales



Las distribuciones de probabilidad y sus correspondientes parámetros resultan muy inteligibles si, previamente, se han revisado las distribuciones de frecuencia (distribuciones estadísticas). Para ello, resulta muy útil que los participantes resuelvan ejercicios como el de la página 154 del BUP 3, con el cual, con solo recordar que la desviación típica significa *grado de alejamiento de los valores a la media*, llegan a comprender con mucha claridad el papel de $\bar{x}$ y σ en una distribución. Este ejercicio puede complementarse con el cálculo, para una, varias o las seis distribuciones, de la proporción en tanto por ciento de individuos que hay en los intervalos $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$; $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$; $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$. Por ejemplo, para la primera, $\boxed{a}$, ajedrez, cuyos parámetros son $\bar{x} = 42$, $\sigma = 16$, se obtendría: $\bar{x} - \sigma = 26$; $\bar{x} + \sigma = 58$.

En el intervalo (26,56) hay 12 o 13 individuos de un total de 19, que significa entre el 63% y el 68%. En el intervalo (10,74) están prácticamente el 100% de los individuos.

(La idea es que las gráficas y las actividades se correspondan así: 1 → $\boxed{d}$; 2 → $\boxed{b}$; 3 → $\boxed{c}$; 4 → $\boxed{f}$; 5 → $\boxed{a}$; 6 → $\boxed{e}$, pero esta asignación puede ser muy discutible).

De hecho, resulta interesante la discusión que pueda surgir entre los participantes pues para argumentar se debe tener muy claro el significado de los gráficos y esmerarse en explicarlo. La asignación de gráficas a parámetros es ahora sin discusión: $\boxed{a} \to C$; $\boxed{b} \to D$; $\boxed{c} \to A$; $\boxed{d} \to F$; $\boxed{e} \to E$; $\boxed{f} \to B$. No obstante, también es útil que los alumnos opten por un emparejamiento, intenten convencer de su opción y atiendan a otros argumentos.

Para la comprensión de las distribuciones de probabilidad de variable continua resulta eficaz la presentación de la página 168 del BUP 3; procurar que bajo el histograma inicial haya exactamente 100 cuadritos que se van redistribuyendo conforme las medidas van siendo más y más finas hasta llegar a la curva teórica, distribución de frecuencias expresadas o de probabilidad. En cada paso se aprecia que lo interesante es, no ya la altura de la gráfica en cada parte, sino el área encerrada en un intervalo. Obsérvese que en una magnitud continua no tienen sentido las medidas exactas, sino las dadas mediante un intervalo, tal como se explica en el último párrafo de la página 168 del BUP 3.

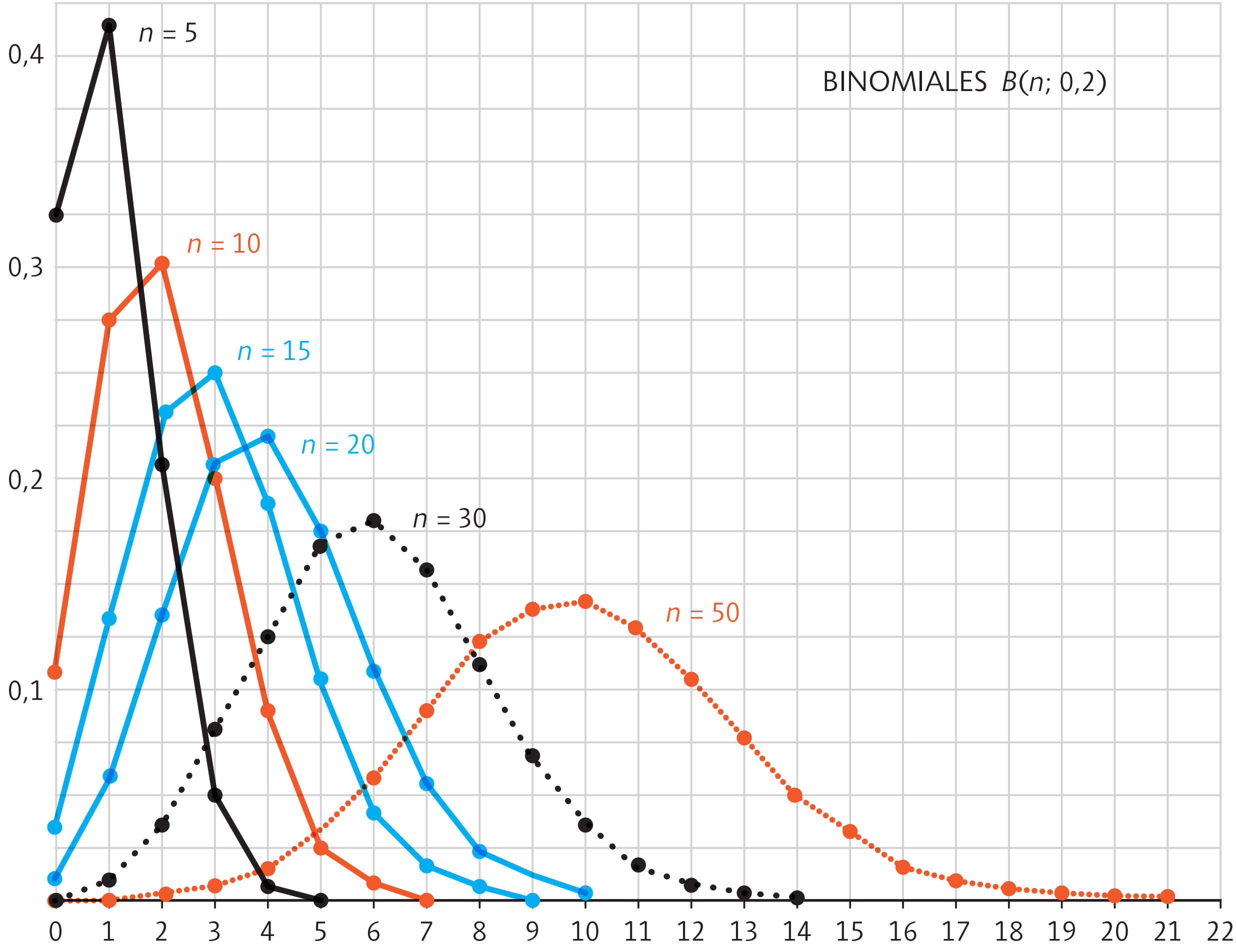
La curva normal es muy importante, pues son multitud las distribuciones que se rigen por ella. El proceso que se sigue en las páginas 175 y 176 del texto sirve para familiarizar al alumno con ella antes de comenzar a utilizar las tablas. Puede completarse con una actividad de la que participen todos los estudiantes: "Vamos a estudiar las estaturas de todos los soldados de un regimiento. Sabemos que se distribuyen según una curva normal. ¿Cuáles pueden ser su media y su desviación típica?".

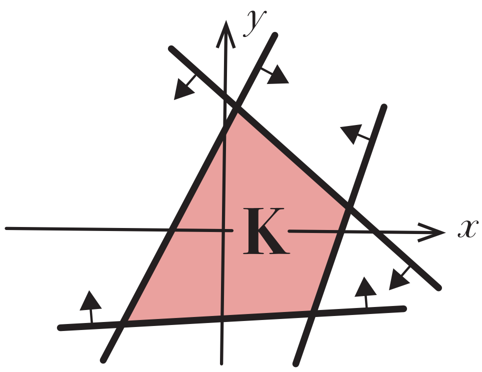
Supongamos que, tras discutir algo, se acuerda que $\bar{x} = 165$ cm y $\sigma = 5$ cm. Esto significaría que solo 0,13% medirían más de $165 + 3 \cdot 5 = 180$. Es decir, poco más del 1 por mil. No es razonable: hay que buscar otros parámetros. Cuando se haya llegado a unos parámetros que parezcan razonables, por ejemplo $\bar{x} = 170$, $\sigma = 6$, se podrá responder a preguntas del tipo: ¿qué porcentaje de soldados miden menos de 164 cm?; ¿[...] entre 176 y 182? ¿[...] más de 182 cm?, cuidando que las referencias que se utilicen sean del tipo $\bar{x} + K\sigma$, para $K = 0, 1, 2, 3$.

Obsérvese que, de esta forma, además de familiarizarse profundamente con las distribuciones normales, el alumno está *tipificando* sin siquiera darse cuenta de que lo hace. (Es decir, está explicando la variable x en "número de desviaciones típicas que se separa de la media": $\dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$). Así, cuando deba hacerlo para valores cualesquiera de la variable, lo tomará como algo muy razonable.

Para el estudio de la distribución binomial resulta útil la referencia al aparato de Galton y razones sobre él, tal como se hace en el texto de referencia. El paralelismo con "el número de caras que se obtiene al lanzar n monedas" sirve para hacer la transferencia a distribuciones binomiales con $p \neq \frac{1}{2}$, pues las monedas podrían ser chinchetas o cualquier otro instrumento aleatorio. La relación del aparato de Galton con el triángulo de Tartaglia (la similitud es no solo conceptual, sino hasta geométrica: tienen la misma forma) permite comprender y obtener de manera sencillísima los coeficientes de $p^K q^{n-K}$ para $K = 0, 1, \dots, n$, en el cálculo de la probabilidad $P[x = K]$.

La posibilidad del paso de una binomial $B(np)$ a una normal $N(np, \sqrt{npq})$ se hace evidente con las gráficas siguientes, que analizaremos más adelante.





Continúa de *Leñitas Geométricas* Nº 7, 5ª época

6. Región de soluciones de un sistema con tres incógnitas

Después de un minucioso análisis, dado en las *Leñitas Geométricas* anteriores, al estudiar ahora sistemas con tres incógnitas podemos reducir al mínimo la teoría indispensable. Junto con el sistema inicial:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m x + b_m y + c_m z + d_m \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

de nuevo, lo mismo que en la parte 5, examinaremos dos sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y+c_1z \geq 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx+b_my+c_mz \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y+c_1z = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx+b_my+c_mz = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Designaremos nuevamente la región de soluciones del sistema (1) por $\mathcal{K}$; la del sistema (2), por $\mathcal{K}_0$; y la del sistema (3), por $\mathcal{L}$. Utilizando la terminología acordada anteriormente, se puede decir que $\mathcal{K}$ representa cierta región poliédrica convexa en el espacio y $\mathcal{K}_0$, un cono poliedro convexo. Los lemas 1 y 2 de la parte 5 (véase *Leñitas Geométricas* Nº 7, 5ª época), como ya indicábamos, conservan su validez también aquí.

- **1. Caso en que el sistema de desigualdades (1) es normal.** En este caso, la región x no contiene rectas y, por lo tanto, tiene por lo menos un vértice. Efectivamente, si $\mathcal{K}$ yace en un plano –cosa posible conforme se indica en la parte 2 (véase *Leñitas Geométricas* Nº 3, 5ª época)–, entonces $\mathcal{K}$ es una región poligonal convexa sin rectas situada en dicho plano y, por eso, conforme se explica en el caso 2 de la parte 5, obligatoriamente tiene que tener vértices. Veamos los contornos de la región $\mathcal{K}$ cuando esta no yace en un plano.

Dichos contornos están formados por caras planas, cada una de las cuales, siendo región poligonal convexa que no contiene rectas, debe tener vértices. Ahora bien, no es difícil ver que el vértice de cualquier cara es, al mismo tiempo, vértice de la región $\mathcal{K}$.

En cada vértice A de la región $\mathcal{K}$ convergen, por lo menos, tres planos confines, para los cuales el punto A es el único punto común. En efecto, de no ser así, todos los planos confines que pasan por A tendrían que coincidir o tener una recta común. Pero entonces un segmento lo suficientemente pequeño, que esté situado en el plano común confín o en la recta común confín, pertenecerá a $\mathcal{K}$, lo que contradice a la definición del vértice.

Lo que acabamos de exponer nos obliga a inscribir modificaciones evidentes en el procedimiento de hallazgo de los vértices, descrito en el punto 2 de la parte 5. A saber, *subsistema regular* ahora deberemos llamar, no al subsistema de dos, sino de tres ecuaciones del sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx+b_my+c_mz+d_m = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

con la condición de que la solución (x, y, z) de este subsistema sea única. Siendo esta la interpretación de subsistema regular, el procedimiento para hallar los vértices se conserva exactamente el mismo que antes, concretamente:

Para hallar todos los vértices de la región $\mathcal{K}$ es preciso hallar las soluciones de todos los subsistemas regulares del sistema (4) y elegir aquellas soluciones que satisfacen el sistema inicial (1).

También conserva su fuerza el teorema tratado en el punto 2 de la parte 5: las modificaciones que se deben introducir en la demostración de dicho teorema son evidentes. Conserva su validez también la observación de que un sistema normal no tiene soluciones cuando la región $\mathcal{K}$ no posee vértices.

Ejemplo 1. Hallar los vértices de la región $\mathcal{K}$ determinada por el sistema de desigualdades:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z-1 \geq 0, \\ x+2y+z-1 \geq 0, \\ x+y+2z-1 \geq 0, \\ x+y+z-1 \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

En este caso, el correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0,\\ x+2y+z&=0,\\ x+y+2z&=0,\\ x+y+z&=0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos que la única solución es (0, 0, 0); el sistema (5) es normal. Para hallar los vértices tendremos que examinar todos los posibles subsistemas de tres ecuaciones del sistema (4):

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+2y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+2y+z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+2y+z-1&=0,\\ x+y+2z-1&=0,\\ x+y+z-1&=0. \end{aligned}\right\}$$

Realizando los cálculos necesarios, hallamos que todos los subsistemas son regulares y que sus soluciones son los puntos: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$, entre las cuales la primera no satisface el sistema (5), mientras que las tres restantes sí lo satisfacen. Por lo tanto, los vértices de la región $\mathcal{K}$ son:

$$A_1\ (1, 0, 0);\ A_2(0, 1, 0),\ A_3(0, 0, 1).$$

2. Sistema normal y homogéneo de desigualdades (2). Cada una de las desigualdades (2) determina un semiespacio cuyo plano confín o límite pasa por el origen de las coordenadas.

En este caso, la intersección de los planos confines es un único punto, el origen de las coordenadas [¡el sistema (2) es normal!].

En otros términos, el conjunto $\mathcal{K}_0$, siendo la región de soluciones del sistema (2), representa un cono poliedro convexo con un único vértice. Por la enumeración de conos poliedros convexos dada en la parte 4 (véase *Leñitas Geométricas* Nº 5, 5ª época), se deduce que, en nuestro caso, $\mathcal{K}_0$ es o una pirámide convexa ilimitada o bien un ángulo plano, un rayo o, finalmente, un punto (origen de las coordenadas). Este último caso lo dejaremos de momento a un lado. En todos los demás casos tendremos:

$$\mathcal{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_n),$$

siendo $B_1, B_2, \ldots, B_n$ puntos cualesquiera –uno por cada arista– del cono $\mathcal{K}_0$ (véase el teorema 2, de la parte 4). Estos puntos se pueden hallar partiendo de las siguientes condiciones.

Cada uno de ellos: a) pertenece a $\mathcal{K}_0$, es decir, satisface el sistema (2); y b) pertenece a la línea de intersección de dos caras distintas, es decir, satisface dos ecuaciones no proporcionales del sistema (3). Las ecuaciones $ax + by + cz = 0$ y $a'x + b'y + c'z = 0$ se llaman *no proporcionales*, si no se cumple tan solo una de las igualdades $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$; en este caso, los planos respectivos se cortan por una recta.

Si resulta que el único punto que satisface las condiciones: a) y b) es (0, 0, 0), entonces la región $\mathcal{K}_0$ coincide con el origen de las coordenadas.

Ejemplo 2. Hallar la región $\mathcal{K}_0$ de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&\geq 0,\\ x+2y+z&\geq 0,\\ x+y+2z&\geq 0,\\ x+y+z&\geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

y, a continuación, la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema dado en el ejemplo 1.

Observaremos, ante todo, que el sistema (6) está relacionado con el sistema de desigualdades (5) dado en el ejemplo 1; a saber, (6) es sistema homogéneo correspondiente a (5). Por lo tanto, el sistema (6) es normal.

En dicho caso, un sistema de dos ecuaciones no proporcionales se puede componer por seis modos distintos:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z=0,\\ x+y+2z=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y+z=0,\\ x+y+2z=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y+z=0,\\ x+y+z=0. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+2z=0,\\ x+2y+z=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+2y+z=0,\\ x+y+z=0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x+y+2z=0,\\ x+2y+z=0. \end{aligned}\right\}$$

Para cada uno de estos seis sistemas elegimos dos soluciones no nulas: (x, y, z) y $(-x, -y, -z)$. Por ejemplo, para el primer sistema se puede tomar $(3, -1, -1)$ y $(-3, 1, 1)$; las desigualdades (6) satisfacen únicamente la primera de estas soluciones. De aquí obtenemos el punto $B_1 = (3, -1, -1)$. Procediendo del mismo modo con los otros cinco sistemas, hallamos los puntos $B_2 = (-1, 3, -1)$ y $B_3 = (-1, -1, 3)$. O sea, la región $\mathcal{K}_0$ está compuesta por los puntos de la forma:

$$t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = (3t_1 - t_2 - t_3, -t_1 + 3t_2 - t_3, -t_1 - t_2 + 3t_3),$$

siendo t_1, t_2, t_3 números arbitrarios no negativos.

Veamos ahora el sistema de desigualdades (5) del ejemplo 1. El sistema homogéneo correspondiente a este, como ya indicábamos, es precisamente (6). Por consiguiente, la región $\mathcal{K}$ tiene la forma

$$\langle A_1, A_2, A_3\rangle + \mathcal{K}_0,$$

y está compuesta por los puntos

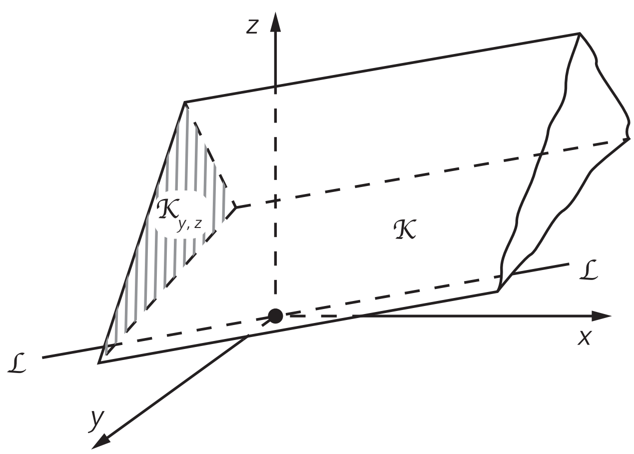
$$s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3 + t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 =$$
$$= s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0) + s_3(0, 0, 0) + t_1(3, -1, -1) + t_2(-1, 3, -1) + t_3(-1, -1, 3) =$$
$$= (s_1 + 3t_1 - t_2 - t_3), (s_2 - t_1 + 3t_2 - t_3), (s_3 - t_1 - t_2 + 3t_3),$$

donde t_1, t_2, t_3 son números arbitrarios no negativos y s_1, s_2, s_3, números no negativos, cuya suma es igual a 1.

3. Caso en que el sistema de desigualdades (1) no es normal. Esto significa que la región de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones (3) contiene puntos diferentes del origen de las coordenadas. Como $\mathcal{L}$ se presenta como una intersección de planos, entonces son posibles dos casos.

1) $\mathcal{L}$ es una recta. Conforme al lema 1, la región $\mathcal{K}$, junto con cada uno de sus puntos P, contiene la recta $P + \mathcal{L}$. Examinemos cualquier plano $\mathcal{J}$ no paralelo a $\mathcal{L}$. Conociendo qué puntos del plano $\mathcal{J}$ pertenecen a la región $\mathcal{K}$ (designamos al conjunto de dichos puntos por $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$), se puede hallar la propia región $\mathcal{K}$, ya que entonces $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{J}} + \mathcal{L}$.

Pero sea cual sea la recta $\mathcal{L}$, en calidad de plano $\mathcal{J}$ no paralelo a ella, siempre puede elegirse uno de los planos de coordenadas xOy, xOz o yOz. Supongamos, por ejemplo, que $\mathcal{L}$ no es paralela al plano yOz. Tomamos este plano por $\mathcal{J}$. En este caso, el conjunto $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$ (designémoslo ahora por $\mathcal{K}_{y,z}$) es una parte del plano yOz, incluida en $\mathcal{K}$ (véase la figura de abajo).



Para hallar este conjunto debemos considerar en el sistema (1), $x = 0$. Entonces, obtenemos el sistema de desigualdades:

$$\left.\begin{aligned} b_1y+c_1z+d_1&=0,\\ \dots\dots\dots&\\ b_my+c_mz+d_m&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

el cual puede resolverse por medio del procedimiento expuesto en la parte 5.

Una vez hallado el conjunto $\mathcal{K}_{x,y}$, podemos escribir

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{x,y} + \mathcal{L} \qquad (8)$$

(si la recta $\mathcal{L}$ no es paralela al plano yOz), lo que da una descripción completa de la región $\mathcal{K}$.

Observación. Si resulta que el conjunto $\mathcal{K}_{y,z}$ está vacío, entonces también $\mathcal{K}$ está vacío. Esto significa que el sistema (1) es incompatible.

Ejemplo 3. Hallar la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z-1&\geq 0,\\ 3x-y+4z-1&\geq 0,\\ -x-2y+3z&\geq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Veamos el correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -2x+y+z&=0,\\ 3x-y+4z&=0,\\ -x-2y+3z&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Resolviendo este sistema hallamos que la tercera ecuación es consecuencia de las dos primeras, o sea, el sistema se reduce a las dos primeras ecuaciones. El conjunto de soluciones de este sistema es una recta, por la cual se cortan los planos

$$-2x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad -3x - y + 4z = 0.$$

Elijamos un punto cualquiera B en la recta $\mathcal{L}$, diferente del origen de las coordenadas. Para ello, basta con hallar tres números cualesquiera x, y, z (no iguales a cero al mismo tiempo), que satisfagan las dos primeras ecuaciones del sistema (10). Tomamos, por ejemplo, 1, 1, 1. O sea, $\mathcal{L}$ es una recta $\overline{OB}$ en la que $B = (1, 1, 1)$.

Es fácil ver que la recta $\mathcal{L}$ no es paralela, por ejemplo, al plano de coordenadas yOz. Suponiendo en el sistema (9) $x = 0$, obtenemos el sistema normal

$$\left.\begin{aligned} y+z-1&=0,\\ -y+4z&=0,\\ -2y+3z&=0.\end{aligned}\right\}$$

con dos incógnitas y y z. La región de sus soluciones $\mathcal{K}_{y,z}$ se puede hallar por el procedimiento expuesto en la parte 5. Realizando los cálculos precisos, hallamos que $\mathcal{K}_{y,z}$ es un conjunto compuesto por un punto $A\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ (en el plano yOz). Por lo tanto, la región buscada $\mathcal{K}$ está compuesta por todos los puntos de la forma

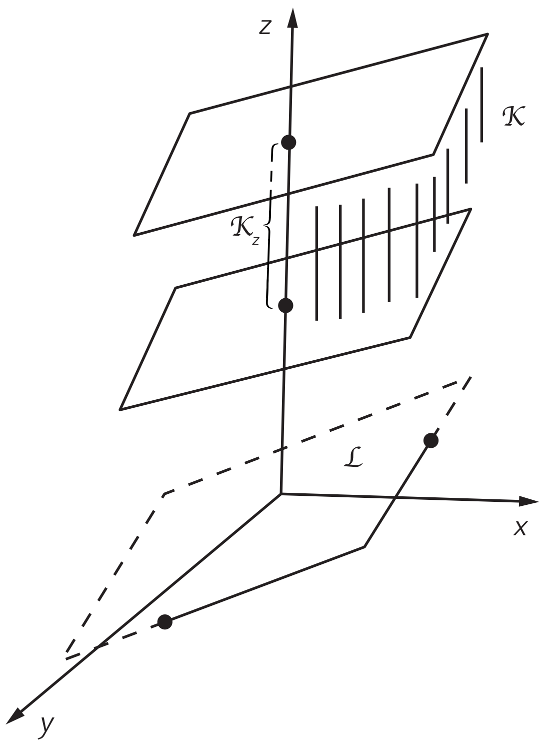
$$A + tB = \left(0,\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)+t(1,1,1)=\left(t\cdot\frac{3}{5}+t\cdot\frac{2}{5}+t\right),$$

siendo t cualquier número no negativo (la región $\mathcal{K}$ es una recta paralela a $\mathcal{L}$).

2) $\mathcal{L}$ es un plano. Entonces, en calidad de conjunto secante $\mathcal{J}$, tomamos cualquier recta no paralela a este plano; por ejemplo, se puede tomar uno de los ejes de coordenadas. Supongamos que el eje z no es paralelo a $\mathcal{L}$; tomémoslo por $\mathcal{J}$. Para hallar el conjunto $\mathcal{K}_z$, parte del eje z, incluido en $\mathcal{K}$, debemos considerar en el sistema (1), $x = 0$ e $y = 0$. Entonces, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{aligned} c_1z+d_1&\geq 0,\\ \dots\dots\dots&\\ c_mz+d_m&\geq 0.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

que se resuelve sin gran trabajo.



Después de hallar el conjunto $\mathcal{K}_z$, podemos escribir (véase la figura de arriba)

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_z + \mathcal{L} \qquad (12)$$

(si el plano $\mathcal{L}$ no es paralelo al eje z), lo que nos da una descripción completa de $\mathcal{K}$.

Observación. Si el conjunto $\mathcal{K}_z$ resulta vacío, entonces $\mathcal{K}$ también está vacío. En este caso, el sistema (1) es incompatible.

Ejemplo 4. Hallar la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x - y + z + 1 \geq 0,\\ -x + y - z + 2 \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

En el caso dado, el respectivo sistema homogéneo de ecuaciones tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} x - y + z = 0,\\ -x + y - z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Aquí, la segunda ecuación es consecuencia de la primera; por eso, la región de soluciones del sistema (14) es el plano $\mathcal{L}$, determinado por la ecuación $x - y + z = 0$.

No es difícil imaginar que este plano corta el eje z solamente en un punto y, por lo tanto, no es paralelo al eje z. Hallaremos el conjunto $\mathcal{K}_z$.

Suponiendo en el sistema (13) $x = 0$ e $y = 0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} z + 1 \geq 0,\\ -z + 2 \geq 0. \end{aligned}\right\}$$

del cual se deduce que

$$-1 \leq z \leq 2. \qquad (15)$$

Así pues, $\mathcal{K}$ es el conjunto $\mathcal{K}_z + \mathcal{L}$, compuesto por puntos de la forma

$$(0, 0, z) + (x, y - x + y) = (x, y, z - x + y),$$

donde x e y son números arbitrarios y z satisface las desigualdades (15).

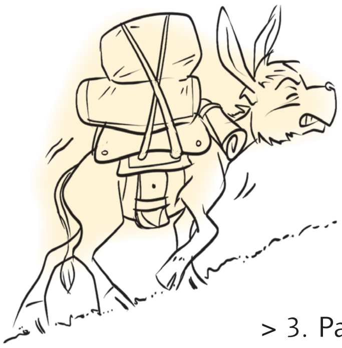
Para finalizar esta parte, formularemos dos teoremas que son la generalización de los dos últimos teoremas dados en la parte 5 para el caso tridimensional. Para ello, la única modificación que se precisa en la formulación de los teoremas allí mencionados consiste en sustituir la palabra "plano" por "espacio".

Teorema. Cualquier región poliédrica convexa (no vacía) en el espacio puede ser representada en forma de suma $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \langle B_1, B_2, \ldots, B_q\rangle$.

Teorema. Cualquier conjunto de la forma $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \langle B_1, B_2, \ldots, B_q\rangle$ en el espacio es o todo el espacio, o bien cierta región convexa y poliédrica en él.

Las demostraciones de estos dos teoremas son casi idénticas a las demostraciones de los respectivos teoremas para el caso bidimensional. Concedemos la realización detallada de estas demostraciones.

7. Sistemas de desigualdades lineales con cualquier número de incógnitas



En las partes anteriores hemos concentrado nuestra atención en los sistemas de desigualdades con dos o tres incógnitas. Esto se debe principalmente a dos circunstancias: en primer lugar, por el hecho de que la investigación de estos sistemas no es complicada y está totalmente dentro de los márgenes de la matemática "escolar"; en segundo lugar (en este caso es un hecho más importante), porque las soluciones de estos sistemas tienen un sentido geométrico evidente (puntos en un plano o en el espacio). No obstante, tienen mayor aplicación (por ejemplo, en cuestiones de programación lineal) los sistemas de desigualdades con un número de incógnitas $n > 3$. Pasarlos de largo sería empobrecer considerablemente la exposición del tema. Por eso, procuraremos, aunque sea en forma breve, dar algunas explicaciones para cualquier caso cuando $n > 3$.

Para dar una interpretación geométrica a los sistemas de desigualdades lineales con n incógnitas es preciso referirse al llamado *espacio n-dimensional*. Comenzaremos por dar una definición de los respectivos conceptos, si bien limitándonos a lo más indispensable. Conforme a la definición, un punto en un espacio n-dimensional está determinado por el conjunto ordenado de n números

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

llamados *coordenadas de dicho punto*. El motivo para semejante definición radica en un hecho fundamental de la geometría analítica, según el cual un punto en un plano se caracteriza por dos números, mientras que en el espacio, por tres. En lo sucesivo, en lugar de la frase "el punto M tiene las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$", nos limitaremos a la expresión $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o simplemente $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El punto $(0, 0, \ldots, 0)$ se llama *origen de las coordenadas*, o simplemente *origen*.

En primer lugar, explicaremos qué se comprende por *segmento* en un espacio n-dimensional. Según lo desarrollado en la parte 1 (*Leñitas Geométricas* Nº 1, 5ª época), en un espacio ordinario el segmento $\overline{M_1M_2}$ puede ser caracterizado como conjunto de todos los puntos de la forma

$$s_1M_1 + s_2M_2,$$

donde s_1 y s_2 son dos números no negativos cualesquiera, cuya suma es igual a 1. Pasando del espacio tridimensional al espacio n-dimensional, admitimos dicha característica por definición de segmento. Más exacto, sean

$$M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \text{ y } M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$$

dos puntos arbitrarios en un espacio n-dimensional. Entonces, el segmento $\overline{M'M''}$ se llama conjunto de todos los puntos de la forma

$$s'M' + s''M'' = (s'x'_1 + s''x''_1, s'x'_2 + s''x''_2, \ldots, s'x'_n + s''x''_n), \qquad (1)$$

siendo s' y s'' dos cualesquiera números no negativos, cuya suma es 1. Siendo $s' = 1$ y $s'' = 0$, obtenemos el punto M': y siendo $s' = 0$ y $s'' = 1$, obtenemos el punto M'', o sea, los extremos del segmento $\overline{M'M''}$. Los demás puntos (que se obtienen siendo $s' > 0$ y $s'' > 0$) se llaman *puntos internos del segmento*.

Entre otros conceptos referentes al espacio n-dimensional, nos será necesario el concepto de plano hiperbólico o hiperplano. Este es la generalización del concepto de plano en un espacio tridimensional ordinario. El prefijo "hiper" tiene aquí un sentido completamente determinado. Y es que en un espacio n-dimensional puede haber "planos" de diferentes tipos: unidimensionales (llamados *líneas rectas*), bidimensionales, etc., y, finalmente, *planos* $(n - 1)$-dimensionales. Estos últimos llevan el nombre de *hiperplanos*.

Definición. Hiperplano en un espacio *n*-dimensional se llama al conjunto de puntos $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de primer grado

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_2 + b = 0,$$

en la cual por lo menos uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (coeficientes de las incógnitas) es diferente de cero. Cuando $n = 3$ la ecuación (2) toma la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$, que es, simplemente, la forma de la ecuación de un plano en un espacio ordinario (en el cual las coordenadas se designan por x_1, x_2, x_3 y no por x, y, z como es habitual).

Con relación al hiperplano (2), todo el espacio *n*-dimensional se divide en dos partes: región donde se cumple la desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0, \qquad (3)$$

y región en la que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \leq 0. \qquad (4)$$

Estas regiones se llaman *semiespacios*. Así, cada hiperplano divide todo el espacio en dos semiespacios, para los cuales este hiperplano es parte común. El concepto de cuerpo convexo también se generaliza en el caso *n*-dimensional. Un conjunto de puntos, en un espacio *n*-dimensional, se llama *convexo*, si junto con dos cualesquiera de sus puntos M' y M'' contiene también todo el segmento $\overline{M'M''}$.

No es difícil demostrar que cualquier semiespacio es un conjunto convexo. Efectivamente, pongamos que los puntos $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ y $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ pertenecen al semiespacio (3). Demostremos que cualquier punto M en el segmento $\overline{M'M''}$ también pertenece a este semiespacio. Las coordenadas del punto M se expresan bajo la forma (1) o, lo que es lo mismo, bajo la forma

$$\begin{gathered} x_1 = sx_1' + (1-s)x_1'', \\ x_2 = sx_2' + (1-s)x_2'', \\ \ldots\ldots\ldots \\ (0 \leq s \leq 1). \\ x_n = sx_n' + (1-s)x_n''. \end{gathered}$$

Sustituyendo por estas expresiones en el primer miembro de (3), escribimos

$$\begin{gathered} a_1\left[sx_1' + (1-s)x_1''\right] + a_2\left[sx_2' + (1-s)x_2''\right] + \ldots + a_n\left[sx_n' + (1-s)x_n''\right] + b = \\ = s(a_1x_1' + a_2x_2' + \ldots + a_nx_n') + (1-s)(a_1x_1'' + a_2x_2'' + \ldots + a_nx_n'') + sb + (1-s)b \end{gathered}$$

[hemos sustituido el número b por la suma $sb + (1 - s)b$], lo que es igual a

$$s\left[a_1x_1' + \ldots + a_nx_n' + b\right] + (1-s)\left[a_1x_1'' + \ldots + a_nx_n'' + b\right].$$

Cada una de las dos sumas comprendidas entre corchetes no es negativa, puesto que ambos puntos M' y M'' pertenecen al semiespacio (3). Por lo tanto, toda la expresión escrita tampoco es negativa [pues, $s \geq 0$ y $(1 - s) \geq 0$]. Con esto queda expuesta qué terminología geométrica corresponde a un sistema de semiespacio convexo.

Después de todo lo manifestado, no será difícil comprender qué terminología geométrica deberá corresponder a un sistema de desigualdades lineales con n incógnitas. Sea dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geq 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c \geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Cada una de las desigualdades escritas determina cierto semiespacio y todas en conjunto, cierta región $\mathcal{K}$ en un espacio *n*-dimensional, formada por la intersección de una cantidad finita de semiespacios. La región $\mathcal{K}$ es convexa, puesto que también lo es cualquiera de los semiespacios que la constituyen.

De forma análoga al caso tridimensional, una región en un espacio *n*-dimensional– siendo esta la intersección de un número finito de semiespacios– se denomina *región poliédrica convexa* y en el caso en que dicha intersección es un conjunto limitado, simplemente, *poliedro convexo*. Aquí el término *conjunto limitado* debe interpretarse en el sentido de que las coordenadas de todos los puntos de la región considerada no superan en valor absoluto a cierta constante c: $|x_1| \le c, \dots, |x_n| \le c$.

O sea, el conjunto de puntos en un espacio n-dimensional, cuyas coordenadas satisfacen el sistema (5), es una región $\mathcal{K}$ poliédrica convexa, formada por la intersección de todos los semiespacios que corresponden a las desigualdades del sistema dado. Subrayamos una vez más que llamamos a esta región *poliedro convexo* cuando es limitada.

Los métodos de descripción real de la región $\mathcal{K}$, examinados en la parte 5 para sistemas con dos incógnitas y en la parte 6 para sistemas con tres incógnitas, pueden ser utilizados, con las modificaciones correspondientes, para casos de n incógnitas. No obstante, no nos detendremos en ellos, puesto que una descripción completa necesitaría mucho espacio. Además, siendo grande la cantidad de incógnitas, estos métodos se hacen poco eficaces: su utilización está relacionada con cálculos sumamente desmesurados.

Es notable que los teoremas generales sobre la estructura de conjuntos poliédricos convexos en un espacio tridimensional conserven totalmente su validez para espacios n-dimensionales, aunque su demostración es más complicada. Nos limitaremos a dar la formulación de estos teoremas y las aclaraciones indispensables a ellas.

Teorema 1. La cápsula convexa de cualquier sistema finito de puntos $A_1, A_2, \dots, A_p$ es un poliedro convexo.

Para mayor precisión, subrayamos que este teorema establece una relación entre dos tipos de conjuntos definidos de diferente forma: entre la cápsula convexa de un sistema de puntos $A_1, A_2, \dots, A_p$, designada por $\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$ y definida como la multitud de todos los puntos de la forma

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \dots + s_pA_p,$$

siendo $s_1, s_2, \dots, s_p$, cualesquiera números no negativos cuya suma es 1, y poliedros convexos, o sea, regiones limitadas, obtenidas como resultado de la intersección de una cantidad finita de semiespacios.

En espacios bidimensionales y tridimensionales, la validez del teorema 1 es evidente (aunque sea por la evidencia del sentido de capsula convexa), mientras que para casos polidimensionales no lo es y requiere demostración.

Teorema 1′ (recíproco del teorema 1). Cualquier poliedro convexo coincide con la cápsula convexa de cierto sistema finito de puntos.

Realmente se puede afirmar aún más: un poliedro convexo coincide con la cápsula convexa de sus vértices. La definición de vértice es la misma que para el caso bidimensional (vértice es aquel punto del poliedro que no es punto interno con relación a ningún segmento totalmente perteneciente a este poliedro). Se puede demostrar que el número de vértices es siempre finito.

Teorema 2. Cualquier conjunto de la forma $(B_1, B_2, \dots, B_q)$, o coincide con todo el espacio, o bien representa cierto cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas.

Recordemos que el símbolo $(B_1, B_2, \dots, B_q)$ significa el conjunto de todos los puntos representados de la forma

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \dots + t_qB_q,$$

siendo $t_1, t_2, \dots, t_p$, cualesquiera números no negativos. Un cono poliedro convexo se define como la intersección de un número finito de semiespacios cuyos hiperplanos confines tienen un punto común (vértice del cono). La justeza del teorema 2 en un espacio tridimensional fue demostrada en la parte 4 (teorema 1). Con relación al caso polidimensional, lo veremos más adelante.

Teorema 2′. Cualquier cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas puede ser representado como $(B_1, B_2, \dots, B_q)$.

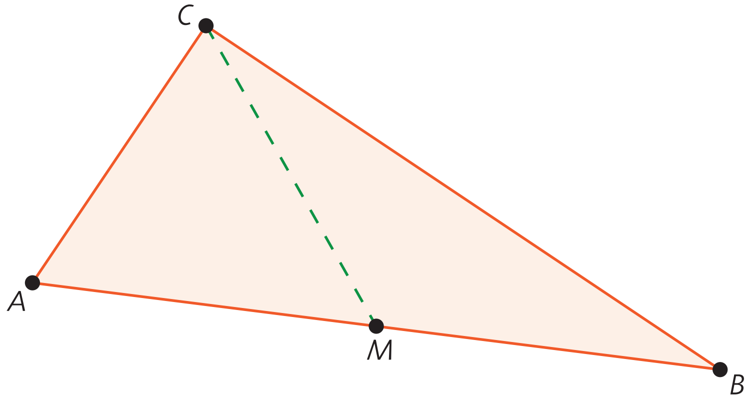
Teorema 3. Cualquier región convexa poliédrica puede ser representada en forma de suma:

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q).$$

Teorema 3′. Cualquier suma de la forma indicada representa o todo el espacio, o cierta región poliédrica convexa en este espacio.

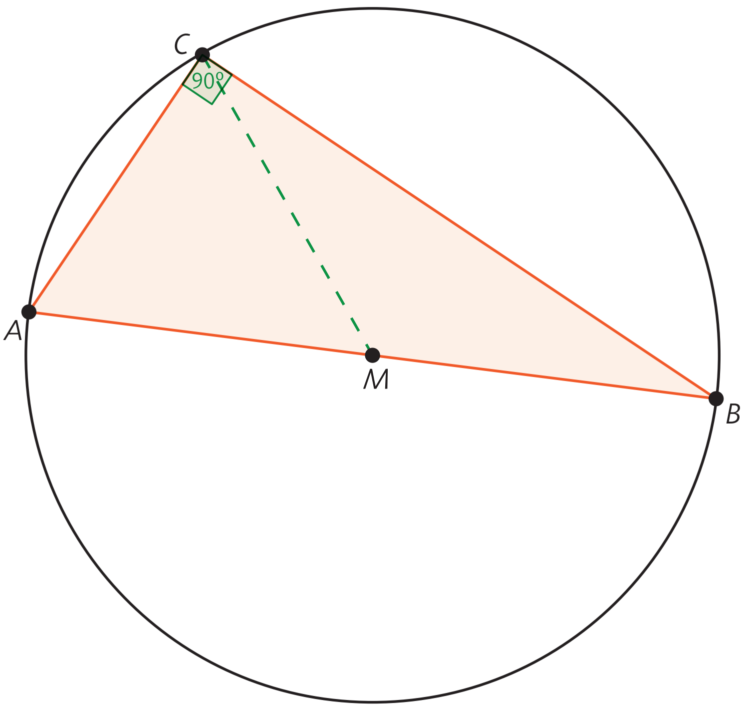
Las demostraciones de estos teoremas las daremos más adelante.

En el triángulo ABC, la longitud de la mediana que parte del vértice C es la mitad de la longitud del lado AB. Hallar el valor del ángulo en el vértice C.



Solución

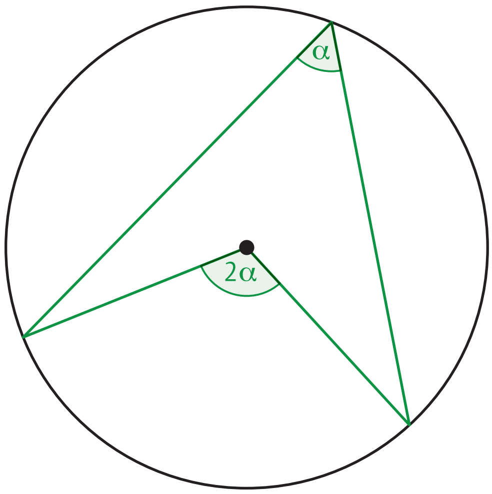
Si M es el punto medio de AB, entonces, por la condición en el enunciado del problema, AM, BM y CM tienen la misma longitud. Resulta entonces que M es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo, siendo AB uno de sus diámetros.

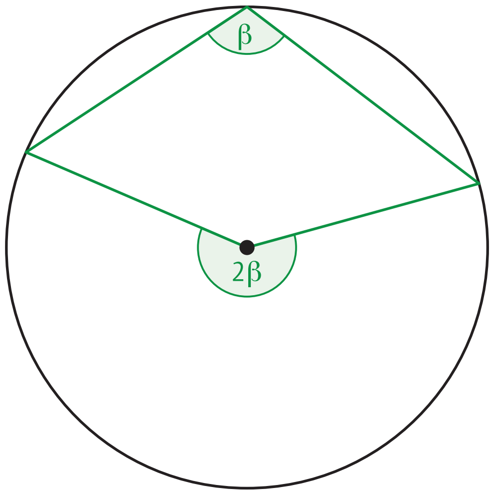


Luego, por ángulo inscripto, el ángulo en C mide 90º.

Nota. Es oportuno recordar la siguiente propiedad del ángulo inscripto:

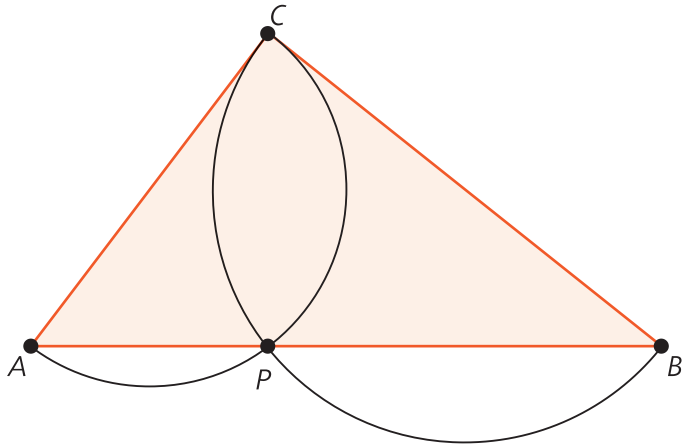
El valor de un ángulo inscripto en una circunferencia es la mitad del valor del ángulo central correspondiente.





Respuesta del Nº 16

Se trazan dos semicircunferencias usando como diámetro los lados *AC* y *BC* del triángulo *ABC*, tal como muestra la siguiente figura.



Explicar por qué el punto *P*, punto de intersección de las semicircunferencias, pertenece al lado *AB*.

Solución

El pie de la altura *h*, trazada desde el vértice *C*, está en el arco capaz, que corresponde a 90º, trazado sobre el lado *AC*. También está en el arco capaz, que corresponde a 90º, trazado sobre el lado *BC*; es decir, el pie de la altura y el punto *P*, antes mencionado, son los mismos.