



Leñitas Geométricas*

para el Fogón Matemático de los Festivales

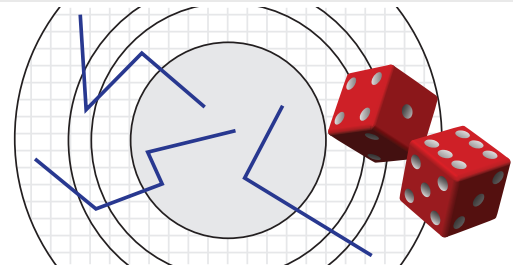
De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✖ N° 8
22 de junio de 2023

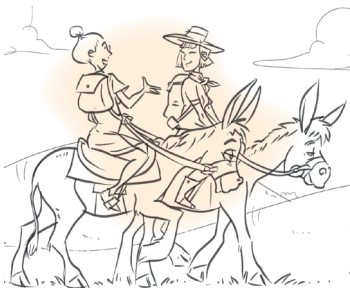


"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

El Método Montecarlo



Una aventura al siglo XVIII



La campana de Gauss sonaba antes que Gauss

La teoría de probabilidades contó con una gran cantidad de aficionados que se dedicaron a su estudio durante los comienzos del siglo XVIII, entre los cuales uno de los más importantes fue Abraham de Moivre (1667-1754). De Moivre era francés de nacimiento y hugonote, así que poco después de la revocación del Edicto de Nantes se trasladó a Inglaterra, donde entabló amistad con Isaac Newton y Edmund Halley, y se dedicó a dar clases particulares de matemáticas.

En 1697 fue elegido miembro de la Royal Society, y poco después, de las academias de París y Berlín. Esperaba conseguir también un puesto en la universidad para enseñar matemática, sin lograrlo, debido, en parte al menos, a no ser de origen inglés. Gottfried Leibniz también intentó en vano postularlo para un puesto profesional en Alemania. Sin embargo, y a pesar de las largas horas de clases necesarias para ganarse la vida, De Moivre llevó a cabo una considerable cantidad de investigaciones.

Publicación reciente

Los números complejos
en la geometría del plano.
Teorema de Ptolomeo.
Potencia.

fenchu@oma.org.ar

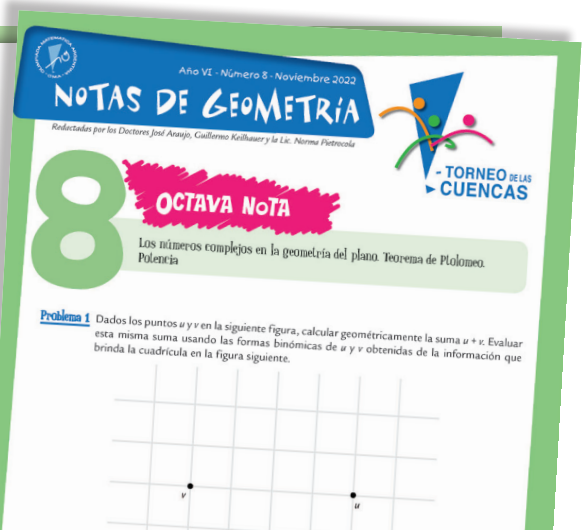
☎ 11 4826 8976

📞 +54 9 11 5035 7537



¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

En 1711 publicó en las *Philosophical Transactions* una extensa memoria sobre las leyes del azar, que posteriormente amplió a un famoso libro, *Doctrine of Chances*, editado en 1718 y más tarde en otras ediciones. Tanto la memoria en cuestión como el libro contenían numerosas cuestiones relativas a los dados, el problema de los puntos (con desiguales probabilidades de ganar), la extracción de bolas de diversos colores de una bolsa y varios otros juegos. Algunos de estos problemas habían aparecido mientras tanto en el *Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, que se había publicado antes que *Doctrine of Chances*, pero después de la memoria de De Moivre.

En el prólogo a *Doctrine of Chances* el autor menciona los trabajos de Jacques, Jean y Nicolaus Bernoulli sobre la teoría de probabilidades. Las distintas ediciones del libro contienen más de cincuenta problemas sobre probabilidades, así como cuestiones relativas a anualidades de vida. Como regla general, De Moivre derivaba la teoría de permutaciones y combinaciones de los principios de la teoría de probabilidades, mientras que ahora se acostumbra a hacerlo al revés. Por ejemplo, para hallar el número de permutaciones de dos letras tomadas de entre las seis a, b, c, d, e, f, razona diciendo que la probabilidad de que una letra concreta sea la primera es $\frac{1}{6}$, y la probabilidad de que otra letra concreta sea la segunda es $\frac{1}{5}$. Por lo tanto, la probabilidad de que estas dos letras aparezcan en ese orden es $\frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$, de lo cual concluye que el número de todas las permutaciones posibles, tomadas de dos en dos, es 30.

A De Moivre se le suele atribuir el principio, publicado en *Doctrina of Chances*, de que la probabilidad de un suceso compuesto es el producto de las probabilidades de los sucesos componentes, pero lo cierto es que esto aparece ya implícitamente en obras anteriores.

Él estaba especialmente interesado en desarrollar métodos y notaciones generales, para la teoría de las probabilidades, bajo la forma de lo que imaginaba como un "álgebra" nueva.

Hay una generalización de un problema formulada anteriormente por Christiaan Huygens y que se conoce, con toda justicia, como *problema de De Moivre*: se trata de hallar la probabilidad de obtener un número de puntos dado al lanzar n dados que tienen cada uno m caras. Algunos de sus resultados en probabilidades se publicaron en un volumen posterior, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, en 1730. En un suplemento a esta obra incluye también algunos resultados que aparecen a la vez en *Métodos diferenciales*, de James Stirling (1692-1770), obra que se publicó el mismo año que *Miscellanea analytica...* de De Moivre. Entre estos hallazgos figura la fórmula que nos da la aproximación $n! \approx n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$, que se suele conocer como *fórmula de Stirling*, aunque De Moivre la conocía con anterioridad; y, además, una serie llamada también *de Stirling* que relaciona el $\ln n!$ con los números de Bernoulli.

Todo parece indicar que De Moivre fue el primero en utilizar la fórmula de las probabilidades

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". *Miguel de Guzmán*



fenchu@oma.org.ar

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

¿Ya lo tenés?

Godfrey Harold Hardy

**Apología
de un
matemático**



resultado que aparece discretamente en un folleto publicado de manera privada en 1733 con el título de *Aproximaciones a la sumas términos del binomio $(a + b)^n$ en serie expansiva*. Esta obra breve, que representa la primera vez que aparece la ley o curva de distribución de los errores, fue traducida por De Moivre mismo e incluida en la segunda edición de su *Doctrine of Chances*, en 1738. Hubo muchos otros aspectos de la teoría de probabilidades que atrajeron su atención, incluidos diversos problemas actuariales. En su obra *Annuities upon Lives*, que inicialmente formaba parte de *Doctrine of Chances* y después se reimprimió en tirada separada en más de media docena de ediciones, De Moivre adopta una regla de andar por casa, conocida como *hipótesis de De Moivre de los decrementos iguales*, que afirma que las anualidades se pueden calcular suponiendo que el número de personas de un grupo dado que mueren es el mismo cada año.

La invasión del pensamiento estocástico en nuestra cultura

Como sabemos, el azar se introdujo en el mundo de la matemática a partir del siglo XVII, a través de consideraciones sobre los juegos y las apuestas. Desde entonces, el pensamiento determinista y el pensamiento estocástico (que significa aleatorio, azaroso, aparentemente caótico) han venido jugando sus papeles, unas veces como rivales, otras como colaboradores en el desarrollo de la ciencia.

Se puede decir que, en el siglo XX, el pensamiento aleatorio ha invadido no solo la ciencia, sino incluso la cultura y el modo de pensar cotidiano, con la convicción profunda de que en nuestros días hemos de aprender a vivir en un mundo que es a la vez determinista y estocástico.



La estadística es el instrumento matemático para manejar lo estocástico. El diseño estadístico de experimentos y el análisis estadístico de los datos que de ellos resultan son las herramientas esenciales para los científicos y técnicos de muchas y diversas disciplinas. Desde el punto de vista del gran público, la estadística salta a la vista prominentemente como la base científica para los muestreos adecuados de la población, a fin de proporcionar a los diversos partidos y al Gobierno el conocimiento necesario sobre la viabilidad o conveniencia de posibles futuras decisiones políticas, sociales o económicas.

Cuando en 1979 se produjo el accidente nuclear en Three Mile Island, en Estados Unidos, se nombró una comisión orientada a estudiar las medidas que se deberían tomar. Su presidente fue John Kemeny, un relevante experto de la teoría de la probabilidad.

Las decisiones que nos afectan a todos en gran parte están fundamentadas en el índice de crecimiento de la producción, en el de los precios al consumo, en el de la inflación..., todos ellos parámetros estadísticos indicativos de la marcha de la economía.

El control estadístico en los accidentes de reactores nucleares

La Oficina de Responsabilidad del Gobierno de los Estados Unidos informó más de 150 incidentes producidos entre 2001 y 2006 en plantas nucleares que no funcionaban dentro de las pautas de seguridad aceptables. Según una encuesta de 2010 sobre accidentes energéticos, hubo al menos 56 accidentes en reactores nucleares en los Estados Unidos. El accidente de Three Mile Island fue una fusión parcial del núcleo del reactor de la Unidad 2 de la planta de energía nuclear del mismo nombre, en el condado de Dauphin, cerca de Harrisburg.



Vista de la planta de Three Mile Island

Fue el accidente más significativo en la historia de la industria estadounidense de generación de energía nuclear comercial, el cual resultó en la liberación de hasta 481 PBq de gases radiactivos y menos de 740 GBq del particularmente peligroso Yodo-131.

El acontecimiento de Three Mile Island fue considerado el más grave hasta que fue superado por el accidente nuclear de Chernóbil, en abril de 1986, y el de Fukushima I, en marzo de 2011.

El accidente comenzó a las 4.00 a.m. del miércoles 28 de marzo de 1979 con una falla en el sistema nuclear secundario, seguida de la apertura de una válvula de alivio operada por piloto automático en el sistema primario, lo que permitió la fuga de grandes cantidades de refrigerante.

Las fallas mecánicas tuvieron lugar debido a la incapacidad inicial de los operadores del reactor para reconocer la situación como un accidente por pérdida de refrigerante. Esta situación era consecuencia de una capacitación inadecuada sumada a factores humanos como errores de diseño industrial relacionados con la presencia de indicadores ambiguos en la sala de control en la interfaz de usuario del panel de control.

El alcance y la complejidad del accidente quedaron claros en el transcurso de cinco días, cuando los empleados de Metropolitan Edison, los funcionarios del Estado de Pensilvania y los miembros de la Comisión Reguladora Nuclear de EE. UU. trataron de comprender el problema, comunicaron la situación a la prensa y la comunidad local decidió si el accidente requería una evacuación de emergencia hasta que, finalmente, se dio cuenta de que la crisis había finalizado.

Estructura de datos en estadística

La función de la estadística es triple. Ante los enormes colectivos de posible información que las ciencias de la naturaleza o las ciencias humanas le presentan a su consideración, como así también la tecnología que de ellas depende, debe ingeniárselas para proceder razonablemente a: 1) recoger datos de manera selectiva; 2) organizar, resumir y entender la masa de datos recogida; 3) extraer conclusiones de la información así obtenida.

Los datos recogidos no provienen siempre de un mismo proceso. La naturaleza de este proceso es un punto muy esencial a la hora de realizar el análisis subsiguiente. El diseño de experimentos estudia, en cada circunstancia particular, cuál deberá ser el modo correcto del proceso de recolección de datos. Por otra parte, en cada observación de un elemento del colectivo se suelen tomar varias medidas y las relaciones entre ellas pueden ser de capital importancia.

Este aspecto viene estudiado por el análisis de regresión y correlación. En los procesos que se observan a lo largo del tiempo puede ser muy interesante tratar de descubrir periodicidades y fenómenos semejantes. Tal es el objeto de estudio de las *series temporales* y su *análisis espectral*.

☰ DOS GRANDES CREADORES: RONALD FISHER Y ABRAHAM WALD

Se puede afirmar que casi todos estos aspectos reseñados de la estadística son aventuras de nuestro siglo. Entre sus creadores ocupan un lugar muy importante sir Ronald Fisher y Abraham Wald. Ronald Fisher (1890-1962) fue un científico muy eminente en dos campos: la genética y la estadística.



Retrato de Ronald Fisher



Alrededor de los años veinte se ocupó del diseño de experimentos en agricultura, y de su trabajo pionero nació la teoría moderna sobre diseño de experimentos. Fue también el introductor del análisis de la varianza. Una de sus ideas innovadoras consistió en su insistencia respecto de la conveniencia de realizar los experimentos bajo una selección verdaderamente aleatoria de los elementos de la experimentación.

Abraham Wald (1902-1950) era un matemático que comenzó sus trabajos en estadística muy tarde dentro de su carrera científica, motivado por las acuciantes necesidades de estudios matemáticos aplicados que trajo consigo la Segunda Guerra Mundial. Murió en 1950, en un accidente aéreo, pero una docena de años de trabajo en estadística le alcanzó para crear dos campos importantes en ella: el análisis secuencial y la teoría de la decisión.

Nació el 31 de octubre de 1902 en Kolozsvár, en Hungría (ahora Cluj-Napoca, Rumania). Falleció el 13 de diciembre de 1950 en Travancore, India. Sus ejes de investigación fueron, además de la teoría de la decisión ya mencionada, la geometría y la econometría.

Su biografía

Abraham Wald nació en una familia judía en Hungría. Era una familia de intelectuales, pero al ser judíos se vieron obligados a ganarse la vida en oficios muy por debajo de sus habilidades. En este país en ese momento, tanto las escuelas primarias como las secundarias requerían que los alumnos asistieran los sábados y la familia Wald no podía permitir que su hijo pasara en la escuela ese día sagrado para la comunidad. Como consecuencia, Abraham no pudo ir a la escuela y fue educado en casa por miembros de su familia. Esto ciertamente no lo puso en desventaja desde el punto de vista educativo, ya que su familia estaba conformada por maestros muy bien informados y competentes.

Después de la Primera Guerra Mundial, gran parte de la tierra que había sido parte de Hungría se entregó a los países vecinos y desde entonces la ciudad devenida Cluj-Napoca pasó a formar parte de Rumania. A Wald se le permitió asistir a la Universidad de Cluj, pero parece que esto no fue fácil para él debido a su condición de judío. Sin embargo, sus destacadas habilidades en matemática lo llevaron a desear continuar con la investigación matemática, por lo que en 1927 ingresó a la Universidad de Viena para estudiar con Karl Menger. Trabajó bajo la supervisión de este en geometría y obtuvo su doctorado en 1931.

Viena en 1930 no era un lugar para que un joven judío obtuviera un puesto académico, sin importar cuán talentoso fuera. De hecho, había pocos puestos académicos disponibles. La única forma en que Wald podía mantenerse a sí mismo para poder llevar adelante sus investigaciones era tomando un empleo. Aceptó ocupar el puesto de tutor de matemática de Karl Schlesinger, un destacado banquero y economista austriaco. Entre 1931 y 1937, Wald publicó 21 artículos sobre geometría que Menger describía como: “[un trabajo] profundo, hermoso y de fundamental importancia”. Sin embargo, su trabajo con Schlesinger no solo le dio seguridad financiera y, por lo tanto, la oportunidad de emprender investigaciones en geometría: también despertó su interés por aplicar sus habilidades matemáticas a los problemas de economía y econometría que interesaban al banquero.

Durante este periodo, Wald publicó 10 artículos enfocados en economía y econometría, así como una importante monografía sobre movimientos estacionales en series temporales, en 1936. El objetivo principal era brindar métodos para eliminar esta variación estacional. Oskar Morgenstern escribe que en esta monografía Wald: “[...] desarrolló técnicas superiores a todas las demás”.

Un indicio de los problemas que Wald tenía en Viena en ese momento por ser judío es el destino del seminario de Menger. Wald fue miembro de este seminario, que incluía conferencias de ambos y también de otros invitados. Los oradores planteaban problemas abiertos e informaban sobre publicaciones e investigaciones recientes. Finalmente, Wald incluso compartió su trabajo en econometría en este marco, en particular escribiendo un artículo sobre la existencia de una solución al modelo económico competitivo.

Sin embargo, el seminario se vio obligado a dejar de funcionar en 1936, después de que fuera criticado por sus colaboradores judíos, uno de los cuales, por supuesto, era Wald. Si durante esos años la vida era difícil para un judío en Viena, pronto se volvería mucho peor, en 1938, cuando las fuerzas nazis invadieron Austria. Para una persona judía como Wald, las condiciones bajo los nazis eran, en el mejor de los casos, extremadamente difíciles y en el peor, muy peligrosas.

La Comisión Cowles lo invitó a los Estados Unidos para realizar allí investigaciones econométricas, Dejó Austria en el verano de 1938. Es casi seguro que esta “mudanza” le salvó la vida, ya que todos los miembros de su familia, que habían quedado atrás, murieron en las cámaras de gas del campo de concentración nazi de Auschwitz, excepto uno. En septiembre de ese año, Wald ya era miembro de la Carnegie Corporation y estudiaba estadística con Harold Hotelling en la Universidad de Columbia, en Nueva York.

Siguió siendo miembro de la Carnegie Corporation hasta 1941, pero en ese momento ya había comenzado a dar conferencias en la Universidad de Columbia, desde el inicio del año académico 1939-1940. Fue nombrado miembro de la Facultad de la Universidad de Columbia en 1941 y permaneció allí hasta su muerte. Además de su enseñanza y su investigación en Columbia, emprendió un trabajo de guerra después de que Estados Unidos entrara en la Segunda Guerra Mundial, colaborando en proyectos militares con el Grupo de Investigación Estadística en Columbia.



Retrato de Abraham Wald

Usó su experiencia estadística para desarrollar un método orientado a estimar la vulnerabilidad de las aeronaves. Como mencionamos anteriormente, en Viena Wald había trabajado en matemática pura, principalmente geometría y econometría. Su primera investigación en matemática pura fue sobre espacios métricos –el teorema de intercambio de Ernst Steinitz sobre extensión de cuerpos–, así como el trabajo en espacios vectoriales de dimensión infinita y algunos resultados hermosos en geometría diferencial.

Sin embargo, sus hallazgos más relevantes Wald los consiguió en estadística. Jacob Wolfowitz, quien primero fue su alumno y luego su colega y colaborador, describió un artículo que Wald publicó en *Annals of Mathematical Statistics* en 1939 como: “[...] probablemente el artículo individual más importante de Wald”.

En este trabajo, Wald “[...] señala que los dos principales problemas de la teoría estadística en ese momento, la prueba de hipótesis y la estimación, pueden considerarse como casos especiales simples de un problema más general, conocido hoy en día como ‘problema de decisión estadística’. [...] Define funciones de pérdida, funciones de riesgo, distribuciones a priori, reglas de decisión de Bayes, reglas de decisión admisibles y reglas de decisión minimax, y demuestra que una regla de decisión minimax tiene un riesgo constante bajo ciertas condiciones de regularidad”.

Wald también desarrolló generalizaciones del problema de la ruina del jugador que juegan un papel importante en el análisis secuencial estadístico. Inventó el tema del análisis secuencial en respuesta a la demanda de métodos más eficientes de control de calidad industrial durante la Segunda Guerra Mundial.

La idea aquí es simple, pero Wald fue el primero en convertirla en una teoría estadística. Es mejor analizar los datos producidos secuencialmente en lugar de recopilar todos los datos y luego analizarlos. En este enfoque, uno no elige un tamaño de muestra fijo, sino que puede finalizar el muestreo en cualquier momento si los resultados lo justifican.

Wald fue el primero en resolver el problema general de las pruebas secuenciales de hipótesis estadísticas. La propiedad óptima de la prueba de razón de probabilidad secuencial fue conjeturada por él mismo en 1943 y en un artículo conjunto con Wolfowitz demostró esta propiedad en 1948. Este y otros trabajos relacionados estaban muy dirigidos a aplicaciones prácticas y sus teoremas sobre la distribución del número requerido de observaciones y sobre las probabilidades asociadas a los errores encontraron utilidades inmediatas. Sus principales resultados sobre el análisis secuencial y la teoría de las funciones de decisión, otro tema fundado por él, se recogen en su monografía *Sequential Analysis* (1947).

Uno de los intereses permanentes de Wald desde los tiempos de su trabajo con Karl Schlesinger fue la economía. Probó resultados importantes, siendo quizás el más significativo la existencia de una solución al modelo

económico competitivo que, como señalamos anteriormente, fue escrito para el seminario de Menger. Su otro trabajo en esta área, en colaboración con Henry Mann en 1943, estaba relacionado con “[...] correcciones estacionales a series de tiempo, fórmulas aproximadas para números índices económicos, superficies de indiferencia, la existencia y unicidad de soluciones de formas extendidas del sistema walrasiano de ecuaciones de producción, el problema del duopolio de Cournot” y, finalmente, ecuaciones en diferencias estocásticas.

Wolfowitz escribe que “Una de sus grandes contribuciones a la estadística fue aportarle precisión matemática en la formulación de problemas y rigor matemático en la argumentación”. Estas cualidades, de las que a menudo carecía cuando comenzó su carrera estadística en 1938, han transformado el tema, aunque no necesariamente para satisfacción de todos.

No fue únicamente en la investigación que Wald tuvo una notable influencia en la estadística: también tuvo una marcada influencia como docente, aunque solo enseñó durante unos diez años. Las mismas cualidades de precisión y rigor que mostró en la investigación fueron aplicadas a su enseñanza, pero esto no significó que sus conferencias fueran complicadas. Por el contrario, sus conferencias eran reconocidas por su claridad y él era un maestro en derivar resultados complicados de maneras asombrosamente simples.

Las notas que sus alumnos tomaron durante sus conferencias en Columbia circularon y, debido a su extraordinaria claridad, llegaron a los estudiantes de estadística en muchas universidades diferentes de los Estados Unidos. Después de que Wald emigró a los Estados Unidos, conoció a Lucille Lang y se casaron. En 1950, Wald recibió una invitación del gobierno indio para dar una conferencia sobre estadísticas en ese país. Fue a la India con su esposa y ambos murieron en un trágico accidente aéreo.

H. A. Freeman, que asistió a las conferencias de Wald en Columbia, escribía acerca del carácter de Wald: “Wald era un hombre tranquilo y gentil, profundamente inmerso en su trabajo. Era bastante distante de las conversaciones triviales y tenía pocos pasatiempos. Pero no fue indiferente al reconocimiento...”.

Ejemplos de aplicación del Método de Montecarlo

5. Análisis de un sistema de servicios

→ **1. Descripción del problema.** Consideremos uno de los sistemas más sencillos de servicios. Consta de n líneas (canales o centros de servicio), cada una de las cuales se puede emplear para “atender a los consumidores”. El sistema recibe pedidos, con la particularidad de que los momentos de recepción son aleatorios. Todo pedido va a la línea número 1. Si en el momento de recepción del k -ésimo pedido (designemos este momento por T_k) la línea está libre, comienza a cumplir el pedido durante un tiempo t_{oc} (t_{oc} es entonces el tiempo de ocupación de la línea). Si en el momento T_k la línea número 1 está ocupada, el pedido se transmite instantáneamente a la línea número 2, etc. Por último, si en el momento T_k resultan ocupadas todas las líneas, el sistema rechaza el pedido.

Es preciso determinar el promedio de pedidos que atenderá y rechazará el sistema durante un tiempo T . Está claro que semejantes problemas pueden surgir al analizar el funcionamiento de cualquier empresa y no solo de las empresas de servicios. En algunos casos muy especiales se logra la solución analítica. Pero en casos complejos (que trataremos más tarde), el método de Montecarlo constituye el único método de cálculo.

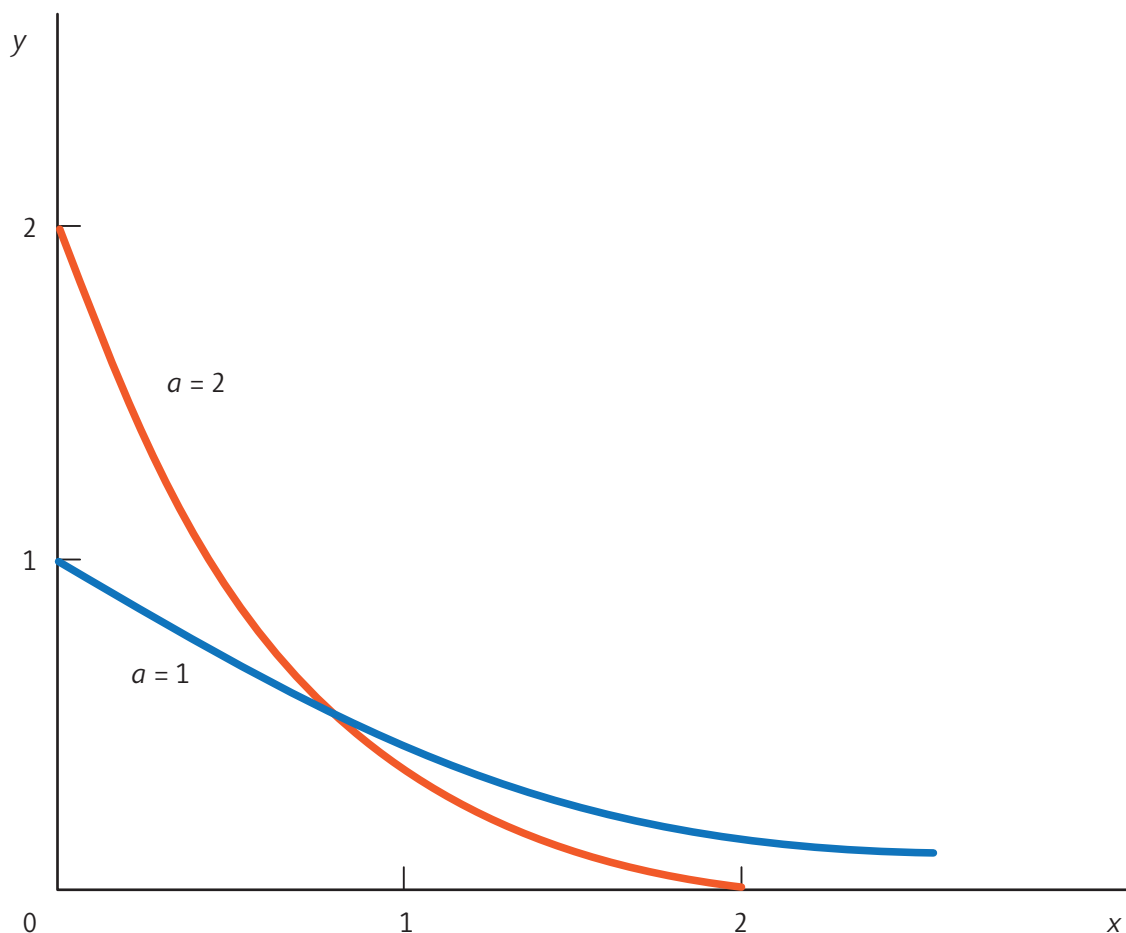
→ **2. Flujo elemental de pedidos.** El primer problema que se plantea al analizar sistemas de este tipo es: ¿qué representa el flujo de pedidos? Este problema se resuelve de manera experimental sobre la base de un estudio suficientemente prolongado de los pedidos. El análisis de los flujos de pedidos correspondientes a distintas condiciones ha permitido destacar algunos casos que suelen darse con suficiente frecuencia.

Un flujo de pedidos se denomina *flujo elemental* (o flujo de Poisson) si el intervalo de tiempo τ que transcurre entre dos pedidos sucesivos representa una variable aleatoria distribuida en el intervalo $(0, \infty)$ con la densidad

$$p(x) = ae^{-ax} \tag{26}$$



La ley (26) lleva también el nombre de distribución exponencial (véase la figura de abajo, donde hemos representado las densidades (26) para $a = 1$ y $a = 2$).



Es fácil calcular la esperanza matemática de τ :

$$M\tau = \int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} xae^{-ax}dx.$$

Integrando por partes ($u = x$ y $dv = ae^{-ax}dx$), obtenemos:

$$M\tau = \left[-xe^{-ax}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\tau} e^{-ax}dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

El parámetro a se denomina densidad del flujo de pedidos.

La fórmula correspondiente al sorteo de τ se obtiene fácilmente de la ecuación (23) (véase *Leñitas Geométricas* 6, 5ª época), que tiene en nuestro caso la forma:

$$\int_0^{\tau} ae^{-ax}dx = \gamma.$$

Calculando la integral del primer miembro, obtenemos la relación de donde resulta:

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln(1-\gamma).$$

Como la variable $(1 - \gamma)$ tiene la misma distribución que γ , podemos emplear, en lugar de la última fórmula, esta otra:

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln\gamma. \tag{27}$$

➔ **3. Esquema de cálculo.** Consideremos, pues, el funcionamiento del sistema descrito en el punto 5.1 en el caso de un flujo elemental de pedidos.



Pongamos cada línea en correspondencia con una célula de la memoria interior de la máquina calculadora electrónica inscribiendo en la célula el momento en que la línea queda libre. Sea t_i el momento en que queda libre la i -ésima línea. Aceptamos que los cálculos se inician en el momento $T_1 = 0$ en el que se recibe el primer pedido. Podemos aceptar que en este momento todos los t_i son iguales a T_1 , ya que todas las líneas están libres. El tiempo final del cálculo será $T_{\text{final}} = T_1 + T$.

El primer pedido va a la línea número 1. Por consiguiente, esta línea permanecerá ocupada durante el tiempo T_{oc} . Por eso, debemos tomar, en lugar de t_1 , el valor nuevo $(t_1)_{nv} = T_1 + t_{oc}$, agregar 1 al contador de los pedidos cumplidos y pasar a considerar el segundo pedido. Supongamos que hemos considerado ya k pedidos. Debemos entonces sortear el momento de recepción del $(k + 1)$ -ésimo pedido.

Con este fin escogemos el valor siguiente de γ y calculamos, a partir de la fórmula (27), el valor siguiente $\tau = \tau_k$. Después, determinamos el momento de recepción:

$$T_{k+1} = T_k + \tau_k.$$

¿Estará libre la primera línea para este momento? Para responder, debemos comprobar la condición

$$t_1 \leq T_{k+1}. \quad (28)$$

Si esta condición se cumple, ello significa que en el momento T_{k+1} la línea ya está libre y puede atender el pedido. Debemos sustituir t_1 por $T_{k+1} + t_{oc}$, agregar 1 al contador de pedidos cumplidos y pasar a considerar el pedido siguiente.

Si la condición (28) no se cumple, ello significa que la primera línea está ocupada en el momento T_{k+1} . Comprobamos entonces si la segunda línea está libre, o no:

$$t_2 \leq T_{k+1}. \quad (29)$$

Si se cumple la condición (29), sustituimos t_2 por $T_{k+1} + t_{oc}$, agregamos 1 al contador de pedidos cumplidos y pasamos a considerar el pedido siguiente.

Si la condición (29) no se cumple, comprobamos la condición

$$t_3 \leq T_{k+1}.$$

Puede ocurrir que para todo i del 1 al n se tenga:

$$t_i > T_{k+1}$$

o sea, puede suceder que todas las líneas estén ocupadas en el momento T_{k+1} . En este caso, agregamos 1 al contador de pedidos rechazados y pasamos a considerar el pedido siguiente.

Cada vez que calculemos T_{k+1} , deberemos comprobar además la condición de finalización del experimento $T_{k+1} > T_{\text{fin}}$.

Si esta condición se cumple, finalizamos el experimento. En los contadores de pedidos cumplidos y de pedidos rechazados tendremos entonces los números μ_{cum} y μ_{rech} .

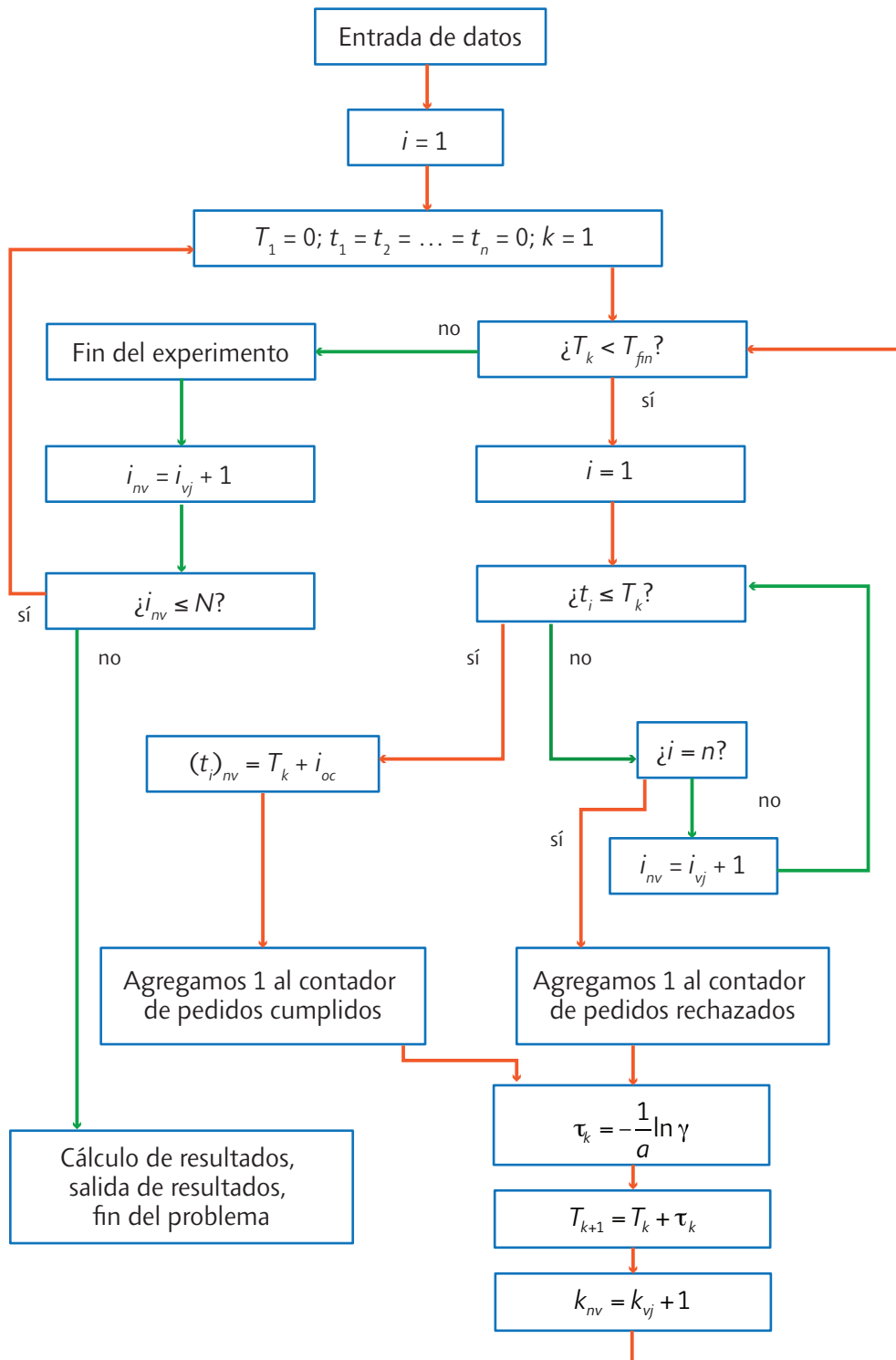
Este experimento se repite N veces (empleando distintos valores de γ) y se toma la media de los resultados encontrados

$$M\mu_{cum} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{cum(j)}$$

$$M\mu_{rech} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{rech(j)}$$

donde $\mu_{cum(j)}$ y $\mu_{rech(j)}$ representan los valores de μ_{cum} y de μ_{rech} en el j -ésimo experimento.

En la figura siguiente aparece el esquema sinóptico del programa correspondiente a este cálculo (si es necesario, podemos obtener en la sección "Fin del experimento" los valores de $\mu_{cum(j)}$ y de $\mu_{rech(j)}$ que resultan de cada uno de los experimentos).



→ **4. Problemas más complejos.** Es fácil persuadirse de que este mismo método puede aplicarse en sistemas mucho más complejos.



Por ejemplo, t_{oc} puede ser una variable aleatoria, en vez de una magnitud constante, y tomar diferentes valores para distintas líneas (lo que significa que las líneas se distinguen por sus equipos o por la calificación del personal). El esquema de cálculo, en esencia, continuará siendo el mismo, pero habrá que sortear cada vez los valores de t_{oc} , correspondiendo a cada línea una fórmula de sorteo propia.

También se pueden considerar los llamados sistemas con espera que, en lugar de rechazar inmediatamente el pedido que no pueden cumplir, lo conservan durante cierto tiempo t_p (tiempo de permanencia del pedido en el sistema). Si en el transcurso de este tiempo se libera una de las líneas, esta atiende el pedido.

Además, se pueden considerar sistemas en los que el pedido de turno es atendido por la línea que se libera antes que otras. Por otra parte, es factible tomar en consideración las intermitencias aleatorias de las líneas, el tiempo aleatorio de reparación de las mismas, la variación según el tiempo de la densidad del flujo de pedidos y otros muchos factores.

Por supuesto, el análisis de estos sistemas exige determinados esfuerzos. Para obtener resultados de valor práctico debe ser ideado un modelo correcto. Esto requiere un estudio suficientemente minucioso de los flujos reales de pedidos, el cronometraje del funcionamiento de las secciones del sistema, etcétera.

Hablando en términos generales, es preciso conocer las leyes probabilísticas de funcionamiento de las secciones del sistema. En este caso, el método de Montecarlo permite hallar las leyes probabilísticas del funcionamiento de todo el sistema, por complejo que sea.

Estos métodos de análisis resultan muy útiles cuando se trata de proyectar una empresa: en lugar de realizar un experimento real costoso (y a veces imposible de realizar), podemos experimentar en la máquina calculadora electrónica simulando distintas variantes de organización del trabajo o del empleo de los equipos.

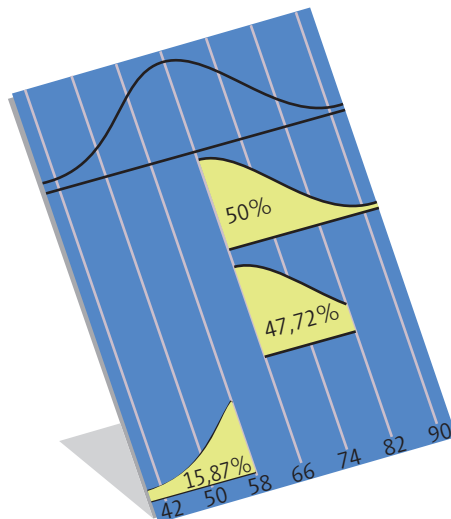
 **MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL**

Para observar, leer y experimentar

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

Problema. La distribución de pesos de los soldados de una camada sigue la $N(66,8)$ y queremos saber qué proporción de ellos pesa:

- a) más de 66 kg; b) entre 66 y 82 kg; c) menos de 58 kg;
- d) menos de 70 kg; e) más de 80 kg; f) entre 70 y 80 kg.



Para resolverlo, expresemos los límites de los pesos cuyas proporciones se piden en función de $\bar{x} = 66$ y de $\sigma = 8$.

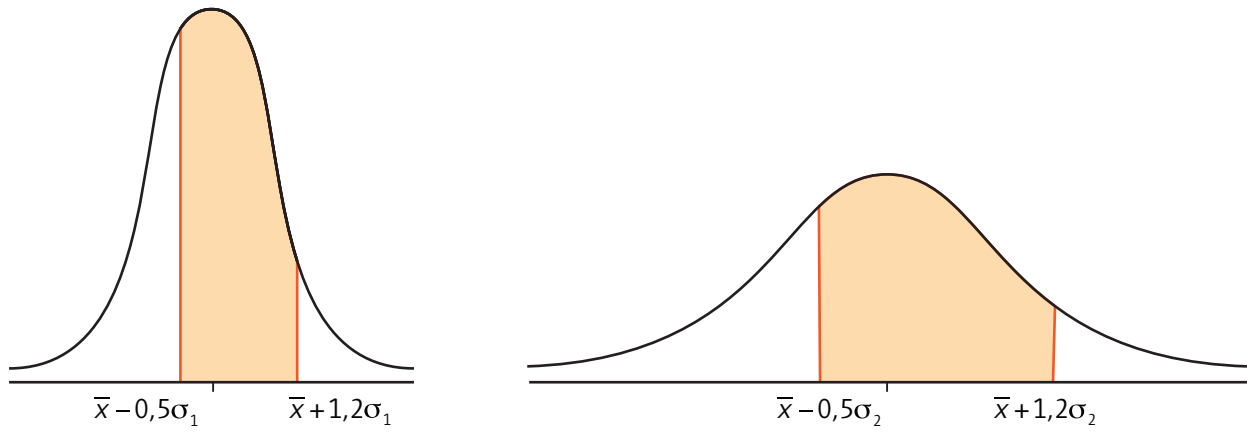
- a) $x > \bar{x}$; b) $\bar{x} < x < \bar{x} + 2\sigma$; c) $x < \bar{x} - \sigma$;
- d) $x < \bar{x} + 0,5\sigma$; e) $x > \bar{x} + 1,75\sigma$; f) $x + 0,5\sigma < x < \bar{x} + 1,75\sigma$.

De momento, con la información que tenemos del párrafo anterior solo podemos responder a las tres primeras preguntas (véase la figura de arriba):

- a) 50%; b) $34,13\% + 13,59\% = 47,72\%$; c) $13,59\% + 2,15\% + 0,13\% = 15,87\%$.

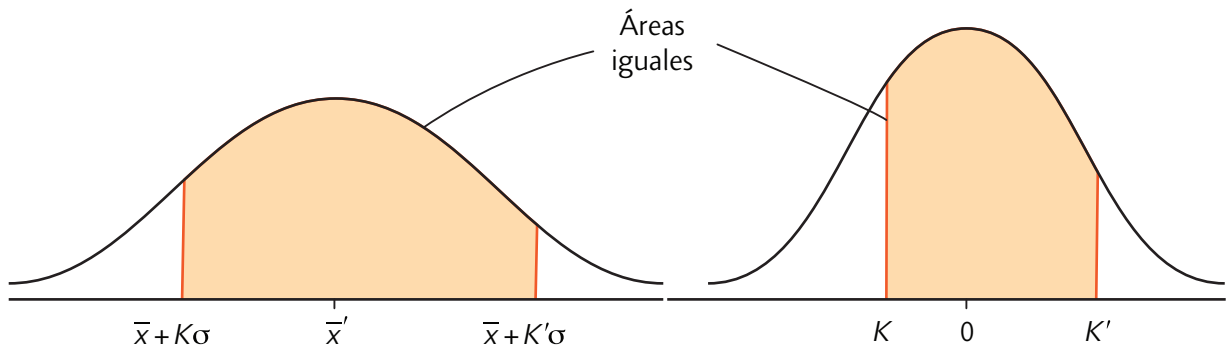
¿Cómo calcular probabilidades en una distribución normal cuando los límites entre los que se mueve la variable difieren de la media en un número no entero de desviaciones típicas?

Todas las curvas normales son esencialmente iguales



Estas dos curvas normales representadas arriba son distintas porque tienen distinta desviación típica, σ_1 y σ_2 . En ambas se ha señalado el área que hay entre 0,5 desviaciones típicas a la izquierda de la media y 1,2 desviaciones típicas a la derecha de la media. Pues bien, ambas áreas son iguales.

En general, el área bajo una curva normal cualquiera $N(\bar{x}, a)$ entre dos valores $\bar{x} + Ka$ y $\bar{x} + K'a$ solo depende de K y de K' . Por tanto, coincide con el área bajo la curva normal $N(0,1)$ entre K y K' .

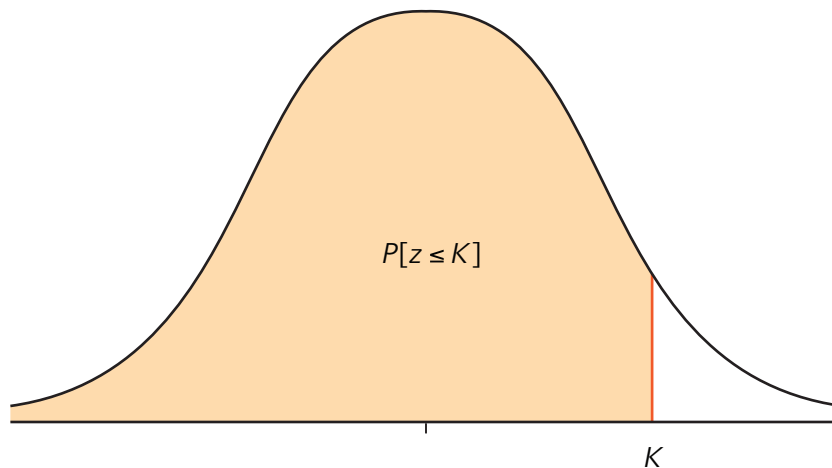


Esto significa que, en esencia, todas las curvas normales son idénticas, salvo que haya un cambio de origen y de escala.

Esta coincidencia permite conocer la distribución de áreas bajo una curva normal cualquiera si se conoce la de una de ellas. Concretamente, la de la más sencilla: la $N(0,1)$.

Descripción de la tabla de áreas bajo la $N(0,1)$

Hay unas tablas que nos dan, ya calculadas, las áreas del tipo que aparece en la figura de abajo, correspondientes a las probabilidades, $P[z \leq K]$, a las que llamaremos $\Phi(K)$.



	K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades y décimas	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6065	0,6103	0,6141
	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
	0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
	0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	1,0	0,8413	0,8438	0,8561	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441

Como se puede ver, en este fragmento de tabla de arriba aparecen todos los valores de $\phi(K)$ para $K = 0$ hasta $K = 1,59$, de centésima en centésima.

Ejemplos

$$P[z \leq 1,27] = \phi(1,27) = 0,8980$$

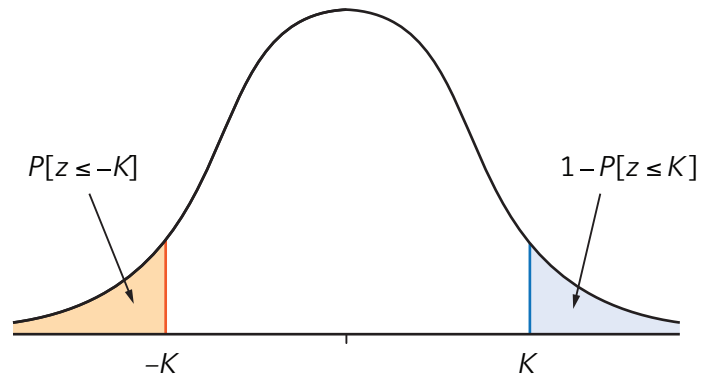
$$P[z \leq 0,60] = \phi(0,60) = 0,7258$$

$$P[z \leq 0,08] = \phi(0,08) = 0,5319$$

$$P[z \leq 1,54] = \phi(1,54) = 0,9382$$

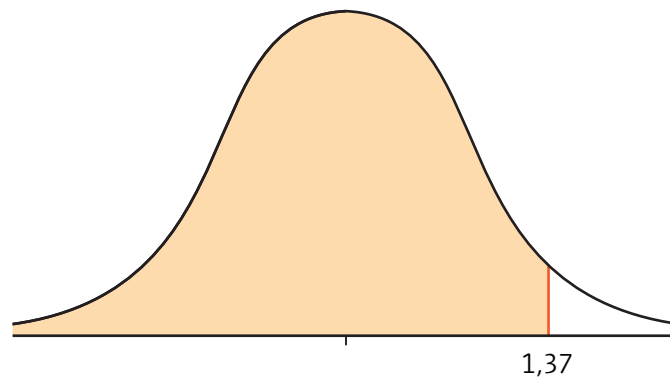
Cálculo de probabilidades en una distribución $N(0,1)$

- $P[z \leq K] = \phi(K)$ se obtienen directamente en las tablas, para $K \geq 0$.
- $P[z \leq -K] = 1 - P[z \leq K] = 1 - \phi(K)$, para valores negativos (figura siguiente).

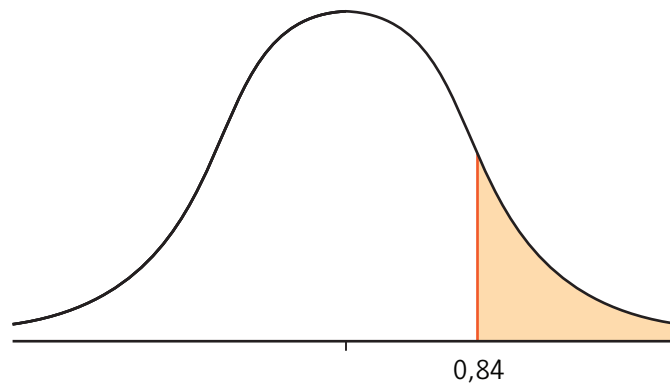


Los restantes tipos de probabilidad se obtienen a partir de estos, como puede verlo en los ejemplos que aparecen a continuación.

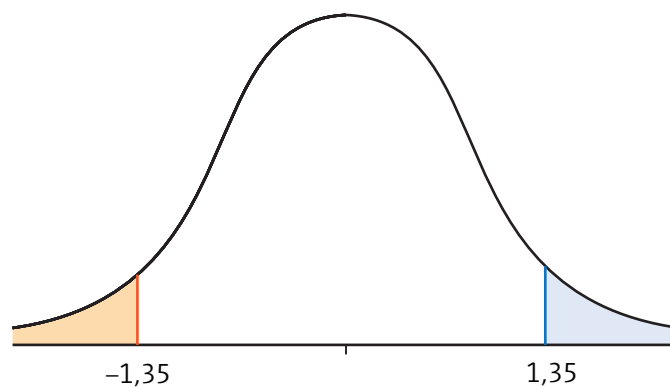
Ejemplos



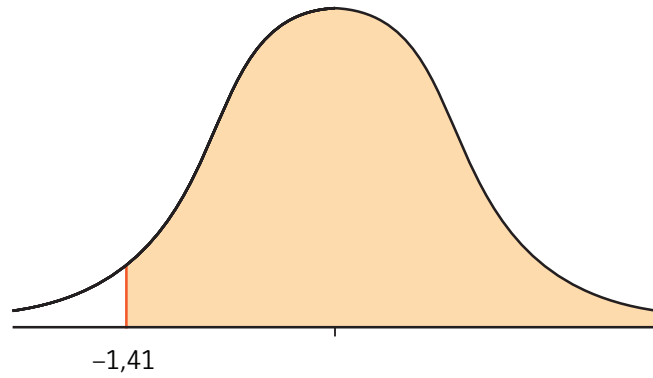
$$P[z \leq 1,37] = \Phi(1,37) = 0,9147$$



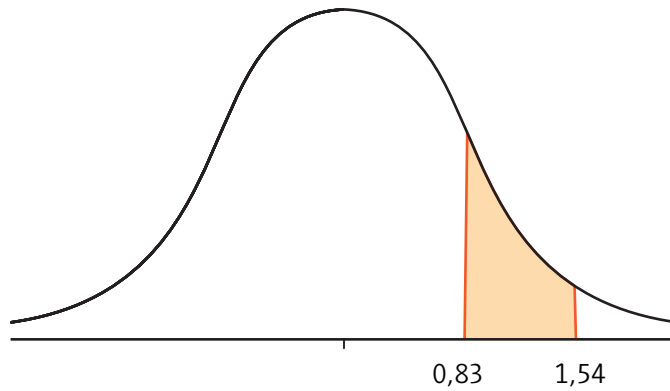
$$P[z \geq 0,84] = 1 - P[z \leq 0,84] = 1 - \Phi(0,84) = 1 - 0,7996 = 0,2004.$$



$$P[z \leq -1,35] = P[z \geq 1,35] = 1 - \Phi(1,35) = 1 - 0,9115 = 0,0885.$$



$$P[z \geq -1,41] = P[z \leq 1,41] = 0,9207.$$



$$P[0,83 \leq z \leq 1,54] = P[z \leq 1,54] - P[z \leq 0,83] = \phi(1,54) - \phi(0,83) = 0,9382 - 0,7967 = 0,1415.$$

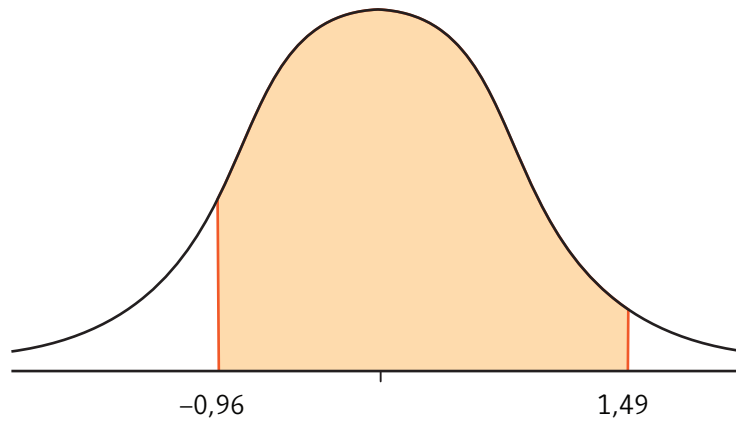
CASIO®

CALCULADORA CIENTÍFICA FX-82LA PLUS

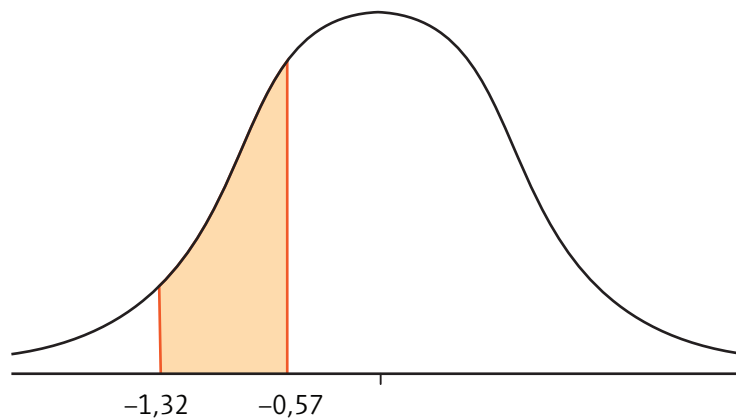
Descubrí toda la línea CASIO en

www.calculadoras.ar

The image shows three Casio FX-82LA PLUS scientific calculators. The central one is black and displays the mathematical expression $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{6}{3\sqrt{3}}$ and the result $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. To its right are two more calculators, one in pink and one in blue, both displaying the result $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. The calculators are labeled 'fx-82LA PLUS' and '2nd edition'.



$$P[-0,96 \leq z \leq 1,49] = P[z \leq 1,49] - P[z \leq -0,96] = P[z \leq 1,49] - [1 - P(z \leq 0,96)] = \phi(1,49) + \phi(0,96) - 1 = 0,9319 + 0,8315 - 1 = 0,7634.$$



$$P[-1,32 \leq z \leq -0,57] = P[0,57 \leq z \leq 1,32] = \phi(1,32) - \phi(0,57) = 0,9066 - 0,7157 = 0,1909.$$



Introducción a las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se destacan por su definición geométrica entre las funciones que estudiamos en la matemática elemental. Sin detenerse en variantes insustanciales de una misma idea, se puede decir que el seno y el coseno se introducen como coordenadas del punto de la circunferencia unidad; la variable independiente se interpreta como ángulo o arco de la circunferencia.

En esta sección se explicará cómo, partiendo de otras curvas –la hipérbola equilátera y la lemniscata de Bernoulli (curva que tiene la forma de un ocho)–, se pueden introducir funciones importantes e interesantes, afines a las trigonométricas, que por un lado se asemejan a estas y por otro lado, poseen nuevas propiedades asombrosas. Estas funciones se denominan *hiperbólicas* y *lemniscáticas*, respectivamente. Siguiendo la analogía, aquí las denominaremos *circulares* a las *funciones trigonométricas*.

Consideramos todas estas funciones como casos particulares del seno generalizado, que es la función inversa de la integral de tipo

$$x \int_0^y \frac{dz}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}$$

El seno circular corresponde al caso $m = -1$ y $n = 0$; el seno hiperbólico, al caso $m = 1$ y $n = 0$; y el seno lemniscático, al caso $m = 0$ y $n = -1$. Si $m = -1 - k^2$ y $n = k^2$ ($0 < k < 1$), la función inversa de la integral es el seno de Jacobi; al estudio de esta función conduce el problema del péndulo matemático.

Para estudiar las propiedades de todas estas funciones de un modo uniforme, es necesario, ante todo, definir las en cuanto que funciones de variable compleja y demostrar a continuación el teorema de adición. Seguimos de esta forma el camino que a finales del siglo XVIII el joven Carl Friedrich Gauss trazó en su diario matemático.

Debemos estar familiarizados con los elementos de la geometría analítica y del cálculo diferencial e integral que corresponden a los cursos que se dictan en las escuelas técnicas. Todos los elementos necesarios referentes a la integración en el plano complejo serán explicados, aunque omitiendo las demostraciones.

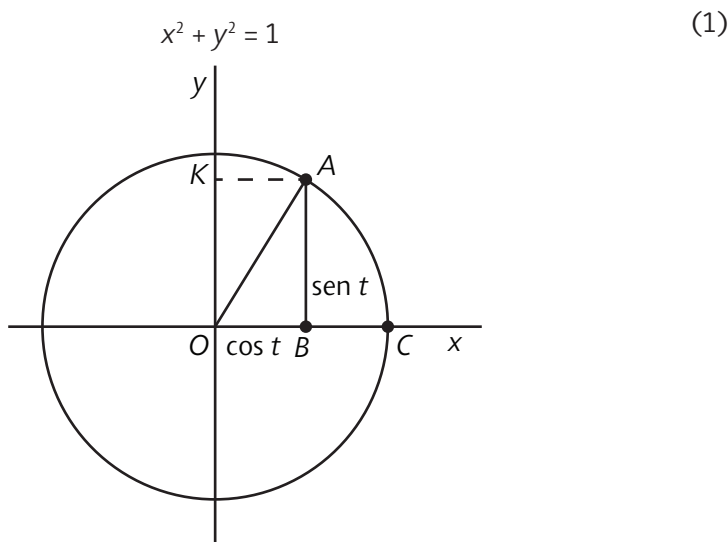
El objetivo que perseguimos es familiarizarnos con la dominada teoría de las funciones de variable compleja, con los representantes más elementales de la clase de funciones elípticas (las funciones lemniscáticas), así como con funciones más generales (las funciones elípticas de Jacobi).

Para concluir, advertimos que esta sección debe ser leída con atención y teniendo lápiz y papel a mano. Cabe aclarar que su desarrollo histórico corre a partir del tiempo de los hermanos Bernoulli y de Leonhard Euler.

Definición geométrica de las funciones circulares, hiperbólicas y lemniscáticas

1. En el curso escolar de matemática estudiamos la definición y las propiedades de las funciones circulares. Expondremos aquí sucintamente hechos conocidos en la forma que nos conviene para resaltar claramente la semejanza y la diferencia.

Partiremos de la circunferencia unidad:



La longitud de un arco t que va del punto C al punto A se determina con una exactitud de $2\pi k$, o sea, de un múltiplo entero de la longitud completa de la circunferencia (véase la figura anterior); aquí, k es el número de vueltas enteras alrededor del origen de coordenadas que describe el punto móvil A antes de llegar de C a A ; se considera positivo el sentido de recorrido opuesto al movimiento de la aguja de un reloj.

Las coordenadas x e y del punto A no dependen del número de vueltas enteras y , por consiguiente, son funciones periódicas de t de período 2π . Por definición, ponemos

$$x = \cos t \quad \text{e} \quad y = \sin t. \tag{2}$$

De aquí se deduce que para todo t

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1. \quad (3)$$

De la simetría de la circunferencia respecto al eje Ox se desprende que

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t. \quad (4)$$

Si se emplea también la simetría respecto de la bisectriz del primero y del tercer cuadrante, por cuyo efecto t se transforma en $\frac{\pi}{2} - t$, x se transforma en y e y , en x , encontraremos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t. \quad (5)$$

Cada una de las fórmulas (5) permite reducir la definición de una función circular a otra, por ejemplo, definir $\cos t$ partiendo del $\operatorname{sen} t$ definido anteriormente.

De las fórmulas (4) y (5) se pueden deducir, como corolarios, todas las demás fórmulas de "reducción". Así, por ejemplo, se obtienen cuatro pares de fórmulas, empleándose para la demostración de cada par siguiente las fórmulas anteriores:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-t)\right] = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t, \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &= \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - t(-t)\right] = \cos(-t) = \cos t; \\ \cos(\pi - t) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos t, \\ \operatorname{sen}(\pi - t) &= \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t; \\ \cos(\pi + t) &= \cos(\pi - (-t)) = -\cos(-t) = -\cos t, \\ \operatorname{sen}(\pi + t) &= \operatorname{sen}[\pi - (-t)] = \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \\ \cos(2\pi + t) &= \cos[\pi + (\pi + t)] = -\cos(\pi + t) = \cos t, \\ \operatorname{sen}(2\pi + t) &= \operatorname{sen}[\pi + (\pi + t)] = -\operatorname{sen}(\pi + t) = \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Notemos que el segundo par de fórmulas se puede deducir inmediatamente de la simetría de la circunferencia respecto del eje Oy ; el tercer par, de la simetría respecto del origen de coordenadas. En cuanto al último par de fórmulas, estas expresan la periodicidad de las funciones circulares de la que hemos hablado más arriba.

La definición (2) y la ecuación (1) permiten dar una respuesta a la pregunta sobre el número y el carácter de las soluciones de ecuaciones de tipo:

$$\operatorname{sen} t = \alpha \quad \text{o} \quad \cos t = \alpha,$$

donde α es un número real.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación:

$$\operatorname{sen} t = \alpha. \quad (6)$$

Se puede afirmar que no tiene solución alguna para $|\alpha| > 1$. Para $|\alpha| \leq 1$ en el semiintervalo $0 \leq t < 2\pi$ existe una solución por lo menos. A saber:

si $\alpha = 1$, una solución $t = \frac{\pi}{2}$;

si $0 < \alpha < 1$, dos soluciones t_1 y t_2 , siendo $0 < t_1 < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < t_2 = \pi - t_1 < \pi$;

si $\alpha = 0$, dos soluciones $t_1 = 0$ y $t_2 = \pi$;

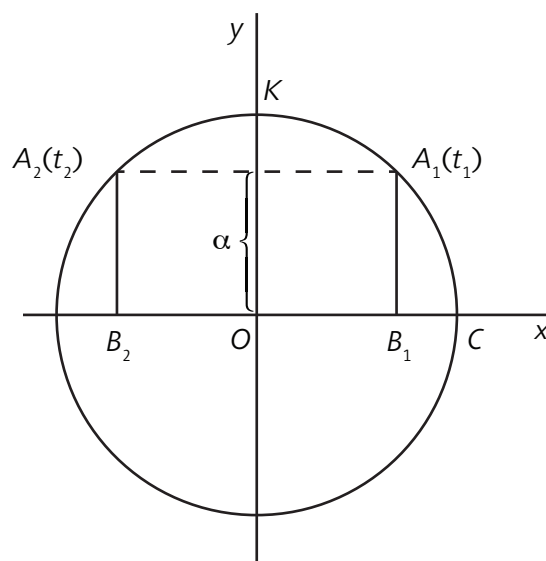
si $-1 < \alpha < 0$, dos soluciones t_1 y t_2 , siendo $\pi < t_1 < \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} < t_2 = 3\pi - t_1 < 2\pi$;

sí $\alpha = -1$, una solución $t = \frac{3\pi}{2}$.

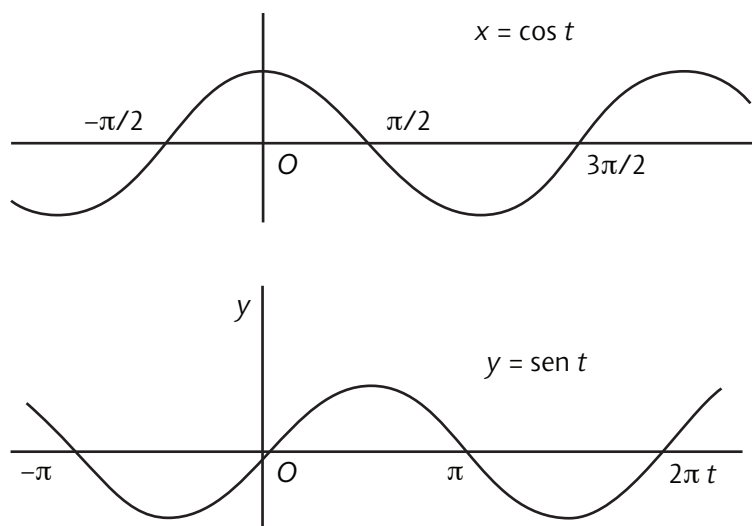
Es evidente que en cada uno de los casos $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$ se puede hablar de dos soluciones que se confunden en un punto. Si $t_1 \neq t_2$, los valores correspondientes del coseno son opuestos:

$$\cos t_1 = -\cos t_2.$$

La solución de la ecuación (6) se reduce geoméricamente a la determinación de los puntos de la circunferencia (1) que tienen la ordenada dada $y = \alpha$ y al cálculo de la longitud de los arcos que terminan en los puntos determinados (véase la figura siguiente).



Todo lo expuesto en este punto queda bien reflejado en las gráficas de $\sin t$ y de $\cos t$; para construirlas es suficiente basarse en las definiciones aceptadas (véase las figuras de abajo).



Notemos que el parámetro t en la definición (2) puede ser interpretado geoméricamente no solo como la longitud del arco CA , sino también como el área duplicada del sector OCA :

$$t = 2 \text{ áreas } OCA. \quad (7)$$

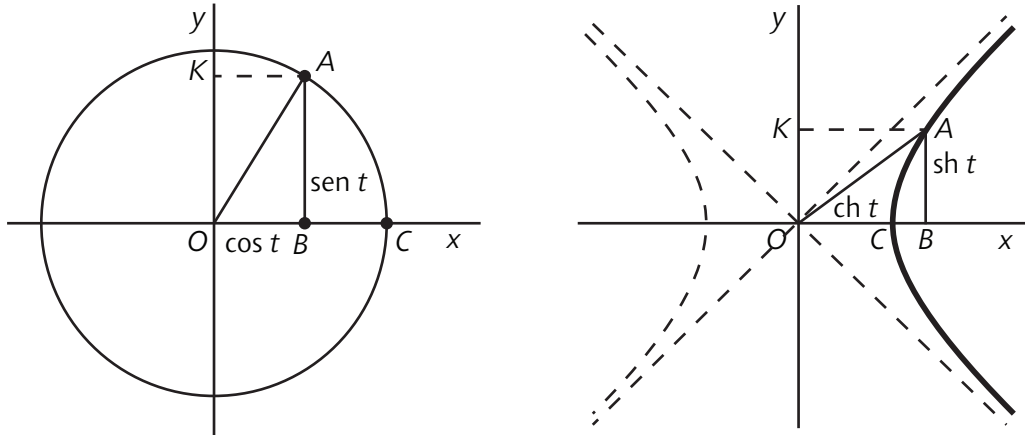
El sector debe ser considerado aquí como la figura que describe el radio móvil al desplazarse de la posición OC a la posición OA . Si el radio realiza k vueltas enteras (k puede tener uno u otro signo según el

sentido de rotación), el área que describe es igual a $k\pi$; por consiguiente, la definición de t por la fórmula (7) comprende el sumando $2k\pi$.

2. Tomemos ahora, en vez de la circunferencia unidad, la hipérbola equilátera unidad:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (8)$$

Entre las ecuaciones (1) y (8) existe una semejanza mucho mayor que entre las curvas que les corresponden, como lo muestran las figuras siguientes.



Quizá sea poco decir esto: las ecuaciones (1) y (8) difieren solo en el signo de y^2 , mientras que las curvas que las figuras representan no se parecen en nada. Sin embargo, más vale dar crédito a las ecuaciones que a nuestros ojos. La semejanza entre ecuaciones trae consigo una semejanza muy profunda entre las curvas, lo que se observa claramente al comparar las funciones circulares e hiperbólicas.

Designemos por t el área duplicada del sector OCA :

$$t = 2 \text{ áreas } OCA;$$

consideraremos el área OCA positiva si el giro desde \overline{OC} hacia \overline{OA} se realiza en el sentido positivo, y negativo en el caso contrario. Si el punto A describe la rama de la derecha de la hipérbola representada en la figura de arriba a la derecha y aumenta desde $-\infty$ hasta $+\infty$, entonces también t aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, respectivamente. Las coordenadas x e y del punto A pueden ser consideradas como funciones unívocas de t . Por definición, ponemos:

$$x = \text{ch } t \quad \text{e} \quad y = \text{sh } t. \quad (9)$$

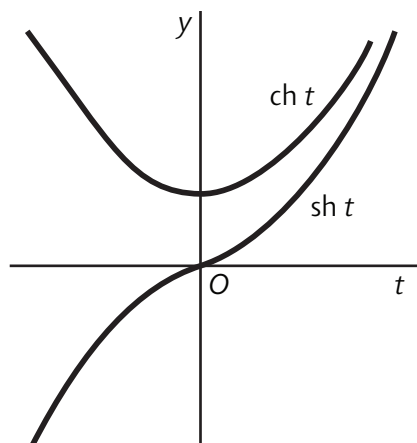
Aquí, ch y sh son las letras iniciales de las denominaciones latinas *cosinus hyperbolicus* (coseno hiperbólico) y *sinus hyperbolicus* (seno hiperbólico), respectivamente. De la definición se deduce que para todo t

$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1. \quad (10)$$

Empleando la simetría de la hipérbola respecto del eje Ox , llegamos a la conclusión de que

$$\text{ch}(-t) = \text{ch } t \quad \text{y} \quad \text{sh}(-t) = -\text{sh } t \quad (11)$$

como puede verse en las gráficas de $\text{ch } t$ y $\text{sh } t$ en la figura siguiente.



La ecuación

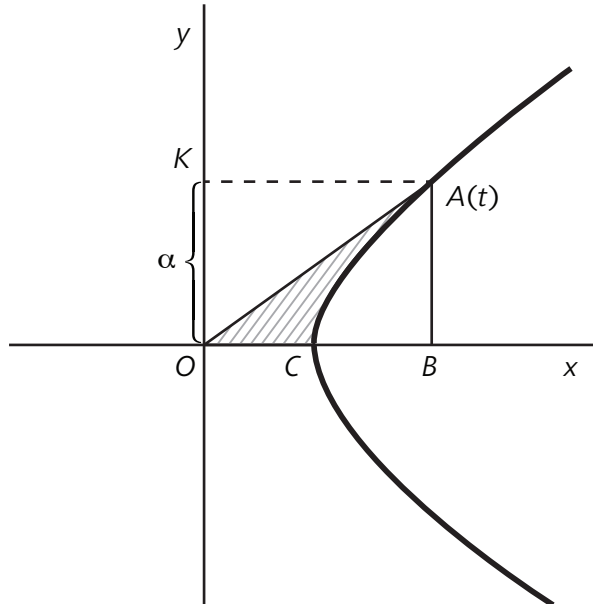
$$\operatorname{sh} t = \alpha \quad (12)$$

tiene una raíz y solo una, para cualquier valor real de α ; la ecuación

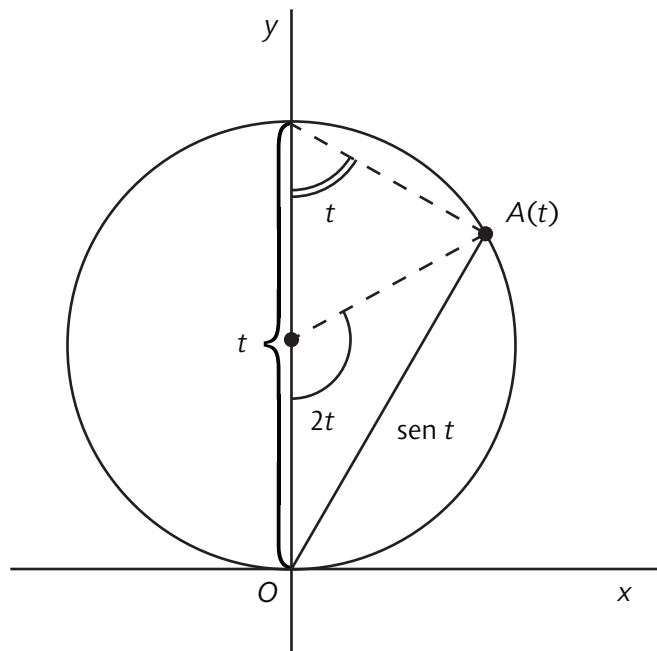
$$\operatorname{ch} t = \alpha \quad (13)$$

no tiene ninguna raíz, si $\alpha < 1$; tiene una raíz $t = 0$, si $\alpha = 1$; tiene dos raíces t_1 y $t_2 = -t_1$, si $\alpha > 1$.

Geoméricamente, la solución de las ecuaciones (12) y (13) se puede reducir a la determinación de los puntos de la rama de la derecha de la hipérbola (10) que tienen la ordenada y y la abscisa $x \geq 1$ dadas y al cálculo de las áreas de los sectores correspondientes a los puntos determinados (véase la figura siguiente).



3. Observemos, antes de definir las funciones lemniscáticas, que existe una interpretación geométrica de las funciones circulares distinta de la expuesta en el punto 1. Consideremos la circunferencia de diámetro 1 tangente al eje Ox en el punto O : $x^2 + y^2 - y = 0$ (figura de abajo).



Es evidente que la cuerda \overline{OA} , correspondiente al arco homónimo de longitud t , es igual a $\operatorname{sen} t$. Por eso, podríamos edificar la teoría de las funciones circulares, poniendo, por definición:

$$\operatorname{sen} t = \overline{OA} \quad \text{y} \quad t = \widehat{OA}. \quad (14)$$

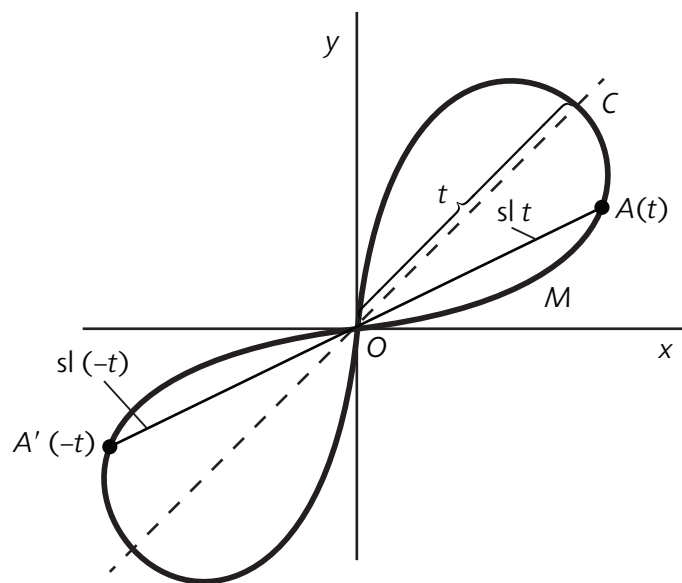
De esta definición se deduce que $\text{sen } t$ aumenta de 0 a 1, cuando t aumenta desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$; si t continúa aumentando, el seno decrece y se hace cero para $t = \pi$ (π es en las condiciones dadas por la longitud de la circunferencia).

Completamos nuestra definición aceptando que $\text{sen } t$ cambia de signo cada vez que, al crecer t , pasa por el valor nulo. Entonces, en la fórmula (14) la longitud de OA debe tomarse con el signo “-”, si $2\pi < t < 3\pi$; con el signo “+”, si $2\pi < t < 3\pi$, etc. Solo con esta condición suplementaria la definición nueva coincidirá con la antigua y, en particular, obtendremos que el periodo de $\text{sen } r$ es 2π (y no π como sucedería si se aceptase que la longitud de la cuerda OA es positiva para todos los valores posibles del arco OA que difieran en múltiplos enteros de π).

La segunda función circular, el coseno, se define a través del seno mediante la igualdad:

$$\cos t = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right). \quad (15)$$

4. Consideremos la lemniscata de Bernoulli representada en la figura siguiente.



Es la curva formada por todos los puntos del plano para los cuales es una constante el producto de sus distancias a dos puntos dados llamados *focos de la lemniscata*. En el caso dado, los focos se han escogido en los puntos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y la constante es igual a $\frac{1}{2}$. Por eso, la ecuación de la lemniscata tiene la forma:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

o, después de elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0. \quad (16)$$

De esta forma, la lemniscata de Bernoulli es una curva algebraica de cuarto grado.

Introduzcamos las coordenadas polares r y φ tomando Ox por eje polar; entonces

$$x = r \cos \varphi \quad \text{e} \quad y = r \text{sen } \varphi.$$

Por consiguiente, la ecuación de la lemniscata en las coordenadas polares tiene la forma:

$$r^2 = \text{sen } 2\varphi \quad (17)$$

Para $\varphi = \frac{\pi}{4}$ obtenemos el valor máximo $r = 1$.

De la ecuación (17) [o (16)] se deduce que la lemniscata es simétrica respecto del origen de coordenadas; además, es simétrica respecto de ambas bisectrices de los cuadrantes. En efecto, si $x = a$ e $y = b$ satisfacen la ecuación (16), entonces las coordenadas de los puntos $(-a, -b)$, (b, a) y $(-b, -a)$ también la satisfacen.

5. Supongamos que el punto móvil M arranca del origen y describe la parte de la lemniscata comprendida en el primer cuadrante, desplazándose en el sentido positivo, o sea, opuesto al movimiento de la aguja de un reloj. Puesto que al regresar por primera vez al origen se desplaza por un arco tangente a Oy , es natural exigir que, al continuar su movimiento a lo largo de la lemniscata (en el tercer cuadrante), pase al arco tangente a este mismo eje.

Entonces, al sentido de recorrido de la parte de la lemniscata comprendida en el tercer cuadrante habrá que considerarlo positivo si coincide con el movimiento de la aguja de un reloj; así lo haremos. Cuando el punto concluye el primer recorrido completo de la lemniscata e inicia uno nuevo, pasa del tercer cuadrante al primero a lo largo del arco tangente a Ox , etcétera.

Designemos por 2ω la longitud de toda la lemniscata, de modo que la longitud del arco OMC es igual a $\frac{\omega}{2}$. Lo mismo que en el caso de la circunferencia, aceptamos que el punto variable M pasa por el origen

O del arco en su extremo A después de un número de recorridos completos a lo largo de toda la lemniscata en uno u otro sentido. En conformidad con esto, la longitud t de cualquier arco OA se determina solo con una exactitud de un múltiplo 2ω ; por ello r –la longitud de la cuerda OA – será una función periódica de t de periodo 2ω .

Completaremos la definición de esta función aceptando que cambia de signo cada vez que pasa por el valor nulo cuando t aumenta continuamente.

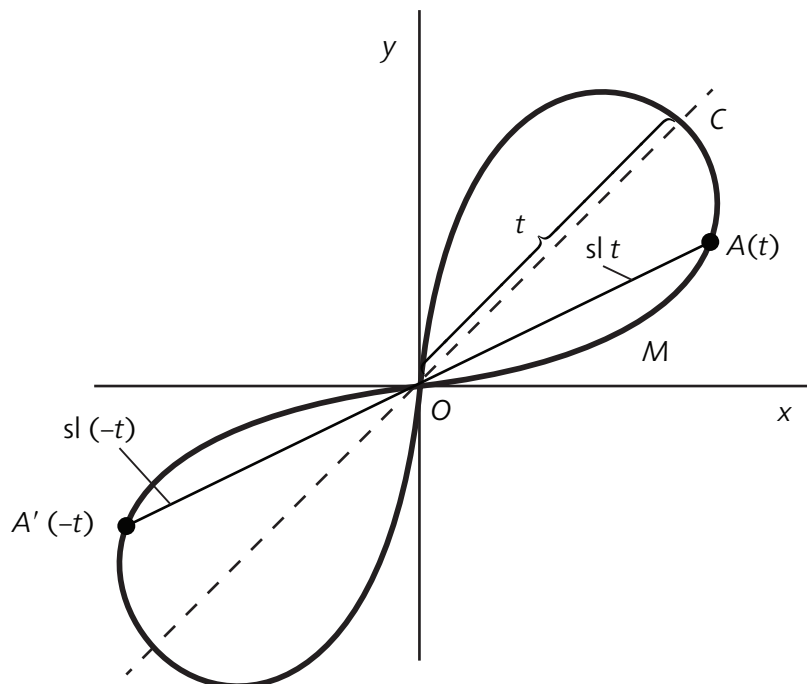
Denominaremos la función, definida de esta forma para todos los valores reales de t , *seno lemniscático* (por analogía con el seno circular) y la designaremos así:

$$OA = r = sl\ t. \quad (18)$$

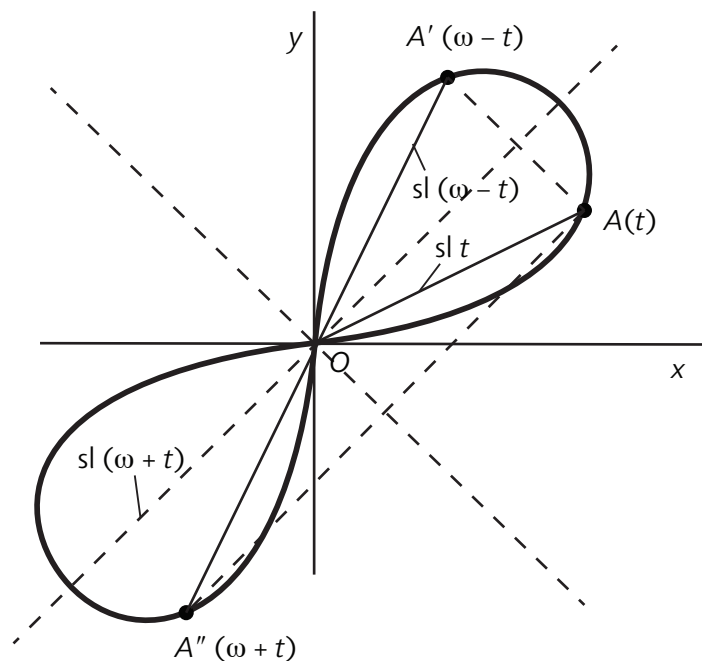
Aquí sl son las letras iniciales de la denominación latina *sinus lemniscaticus*. Observemos, en particular, que

$$sl\ \frac{\omega}{2} = 1. \quad (18')$$

De la simetría de la lemniscata respecto del punto O y de lo convenido en cuanto a los signos, se deduce que si t es una función impar (véase la figura siguiente):



$$sl(-t) = -sl\ t. \quad (19)$$



La simetría respecto de la bisectriz del primer (y tercer) cuadrante (véase la figura anterior):

$$\text{sl}(\omega - t) = \text{sl } t. \quad (20)$$

Análogamente, la simetría respecto de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes conduce a la relación:

$$\text{sl}(\omega + t) = -\text{sl } t. \quad (21)$$

Es verdad que (21) es un simple corolario de (19) y (20). En efecto:

$$\text{sl}(\omega + t) = \text{sl}[\omega + (-t)] = \text{sl}(-t) = -\text{sl } t.$$

El coseno lemniscático se define a través del seno mediante la fórmula

$$\text{cl } t = \text{sl} \left[\frac{\omega}{2} - t \right]. \quad (22)$$

De aquí se deduce, en particular, que él también es una función periódica de periodo 2ω . Pero a diferencia del $\text{sl } t$, la función $\text{cl } t$ es par. En efecto, empleando sucesivamente (22), (21), (19) y otra vez (22), encontramos

$$\text{cl}(-t) = \text{sl} \left(-\frac{\omega}{2} + t \right) = -\text{sl} \left(-\frac{\omega}{2} - t \right) = \text{sl} \left(\frac{\omega}{2} - t \right) = \text{cl } t. \quad (23)$$

Comprobaremos fácilmente la validez de las igualdades:

$$\text{cl}(\omega - t) = -\text{cl } t \quad \text{y} \quad \text{cl}(\omega + t) = -\text{cl } t. \quad (24)$$

La definición de las funciones lemniscáticas y la ecuación (16) permiten estimar el número y el carácter de las soluciones de las ecuaciones de tipo $\text{sl } t = \alpha$ o $\text{cl } t = \alpha$, donde α es un número real. Aquí tiene lugar una analogía completa con el caso de las funciones circulares (punto 1).

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\text{sl } t = \alpha \quad (25)$$

Se puede afirmar que no tiene ninguna solución para $|\alpha| > 1$.

Para $|\alpha| \leq 1$ en el semiintervalo $0 \leq t < 2\omega$ existe una solución por lo menos. A saber:

si $\alpha = 1$, una solución $t = \frac{\omega}{2}$;

si $0 < \alpha < 1$, dos soluciones t_1 y t_2 , siendo $0 < t_1 < \frac{\omega}{2}$ y $\frac{\omega}{2} < t_2 = \omega - t_1 < \omega$;

si $\alpha = 0$, dos soluciones $t_1 = 0$ y $t_2 = \omega$;

si $-1 < \alpha < 0$ dos soluciones t_1 y t_2 siendo $\omega < t_1 < \frac{3\omega}{2}$ y $\frac{3\omega}{2} < t_2 = 3\omega - t_1 < 2\omega$;

si $\alpha = -1$, una solución $t = \frac{3\omega}{2}$.

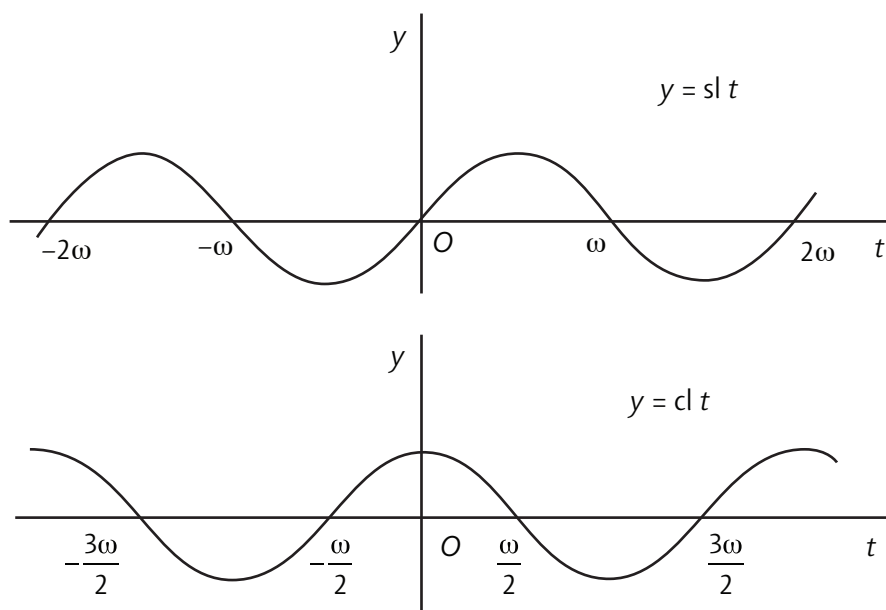
Es evidente que en cada uno de los casos $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$ se puede hablar de dos soluciones que se confunden en un punto.

Observemos, además, que si $t_1 \neq t_2$, los valores correspondientes de $\text{cl } t$ son opuestos:

$$\text{cl } t_1 = -\text{cl } t_2.$$

Geoméricamente, la solución de la ecuación (25) se reduce a la determinación de los puntos de intersección de la lemniscata (16) y la circunferencia $x^2 + y^2 = \alpha^2$, a la selección de aquellos de estos puntos para los cuales $r = \overline{OA}$ tiene el mismo signo que α y, finalmente, al cálculo de las longitudes de los arcos correspondientes.

Todo lo expuesto en este punto queda reflejado en las gráficas de $\text{sl } t$ y de $\text{cl } t$ que recuerdan por su forma la senoide y la cosenoide (véase la figura siguiente).



La trigonometría analítica

Nuevas curvas en tiempos de Fermat

Tanto la obra de Gilles de Roberval como la de Evangelista Torricelli contienen muchos y muy buenos resultados, de los que solo podemos mencionar aquí unos pocos. Entre las contribuciones de Roberval está el primer bosquejo, hecho en 1635, de la mitad de un arco de la curva "seno". Esto es importante porque nos indica que la trigonometría iba apartándose gradualmente del énfasis en los aspectos computacionales que la había dominado durante siglos, para ir acercándose a un enfoque funcional (que culminaría con Euler).

Por medio de su método de indivisibles, Roberval pudo demostrar un resultado que nosotros escribiríamos, en notación moderna, como

$$\int_a^b \text{sen } x \, dx = \cos a - \cos b$$

lo que nos indica de nuevo que en esta época los problemas relativos a áreas tendían a ser más fáciles de manejar que los relativos a tangentes. Roberval y Torricelli, trabajando de manera independiente uno del otro, pero siguiendo líneas notablemente parecidas, extendieron la comparación que había hecho Bonaventura

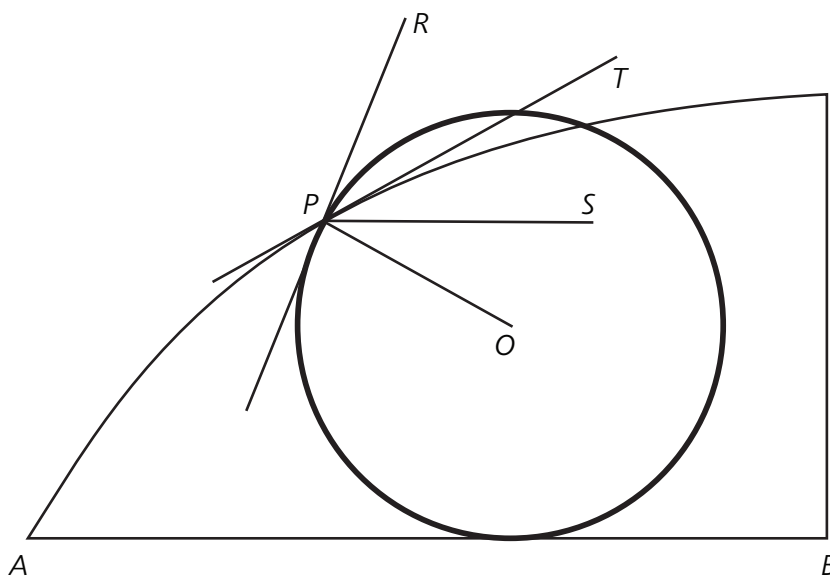
Cavalieri entre la espiral y la parábola, considerando la longitud del arco a la vez que el área. Durante la década de 1640 demostraron que la longitud de la primera vuelta de la espiral $r = a\theta$ es igual a la longitud de la parábola $x^2 = 2ay$ desde $x = 0$ a $x = 2\pi a$.

El interés que la espiral despertó en esta época pudo haber surgido de la correspondencia entre Galileo Galilei y Marin Mersenne acerca del problema de la trayectoria de caída libre de un cuerpo pesado sobre una tierra en rotación, pero lo cierto es que la discusión no tardó en ampliarse considerablemente. Pierre de Fermat, buscando como siempre generalizaciones, introdujo las espirales de orden superior $r^n = a\theta$ y comparó los arcos de estas curvas con los de sus parábolas de orden superior $x^{n-1} = 2ay$.

Toricelli estudió diversos tipos de espirales, descubriendo la rectificación de la espiral logarítmica, como hemos visto. Durante el periodo que va aproximadamente de 1630 a 1650 hubo una notable unidad de intereses matemáticos en Europa, lo que se puede atribuir en buena parte, sin duda, a la ágil intercomunicación entre los matemáticos a través de Mersenne.

Toricelli dio dos cuadraturas diferentes, una haciendo uso del método de los indivisibles de Cavalieri y la otra por el antiguo y venerable método de exhaustión. Para hallar la tangente a la cicloide, en cambio, ambos matemáticos utilizaron una composición de movimientos que recordaba inmediatamente la determinación de la tangente a la espiral por Arquímedes.

Roberval consideraba un punto P de la cicloide como sometido a dos movimientos simultáneos, uno de traslación con el círculo y el otro de rotación, ambos con velocidades iguales.



Según va rodando sobre la recta base \overline{AB} el círculo generador (véase la figura anterior), el punto P es arrastrado horizontalmente, mientras que, al mismo tiempo, gira alrededor de O , el centro del círculo. Podemos pues trazar por P un segmento horizontal \overline{PS} para representar el movimiento de traslación, y otro segmento igual \overline{PR} tangente en P al círculo generador, para representar el movimiento de rotación.

Al ser iguales los movimientos de traslación y de rotación (es decir, al ser iguales sus velocidades, como diríamos nosotros), la bisectriz \overline{PT} del ángulo RPS nos dará la dirección del movimiento real del punto P en ese instante, luego \overline{PT} es la tangente buscada de la cicloide.

Los problemas que se podían abordar utilizando métodos infinitesimales eran en esta época los más populares, con gran diferencia, y Toricelli en particular disfrutaba con ellos, evidentemente. En su obra *De dimensione parabolae*, por ejemplo, presenta ¡veintiuna demostraciones diferentes! de la cuadratura de la parábola (no una ni dos, señores), a partir de planteamientos que se dividen más o menos equitativamente entre el uso de indivisibles y el método de exhaustión.

Una de las demostraciones del primer tipo es casi idéntica a la cuadratura "mecánica" dada por Arquímedes en el *Método*, que, casi con toda seguridad, era desconocido entonces; y, como podía suponerse, una del segundo tipo es prácticamente la que da Arquímedes en su tratado *Sobre la cuadratura de la parábola*, que se había conservado y era bien conocido en esta época.

Si Torricelli hubiera dado el paso de aritmetizar sus métodos en este contexto, hubiera estado muy cerca del concepto moderno de límite, pero desgraciadamente estaba aún bajo la pesada influencia geométrica de Cavalieri y se mantuvo dentro de ella. No obstante, Torricelli superó en mucho a su maestro en la flexible utilización de los indivisibles para obtener nuevos descubrimientos.

Un resultado nuevo, de 1641, que agradó extraordinariamente a Torricelli fue su demostración de que al girar en torno al eje Ox un área infinita, tal como la limitada por la hipérbola $xy = a^2$, una ordenada $x = b$ y el eje de abscisas, por ejemplo, el volumen del sólido engendrado puede ser finito. Torricelli creía haber sido el primero en descubrir que una figura de dimensiones infinitas podía tener una extensión finita, pero en este sentido probablemente se le adelantó Fermat en sus trabajos sobre las áreas bajo las hipérbolas de orden superior, y posiblemente también Roberval, y, desde luego, Oresme en el siglo XIV.

Entre los problemas de los que estaba ocupándose Torricelli inmediatamente antes de su prematura muerte en 1647, había uno en el que venía a representar la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como $x = \log y$, en lo que es quizá la primera representación gráfica de una función logarítmica, treinta años después de la muerte del descubridor de los logaritmos, considerados entonces únicamente como recurso de ayuda a la computación.

Toricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje Ox . Torricelli fue uno de los matemáticos más prometedores del siglo XVII, al que se suele considerar como el siglo de los genios. Mersenne había divulgado en Italia la obra de Fermat, de Descartes y de Roberval, tanto a través de su correspondencia con Galileo, que databa de 1635, como en su peregrinación a Roma en 1644; Torricelli dominó rápidamente los nuevos métodos, aunque dio siempre preeminencia al planteamiento geométrico antes que al algebraico.

La breve asociación de Torricelli con Galileo, ya viejo y ciego, en 1641 y 1642, había despertado también en el joven estudiante el interés por las ciencias físicas, y hoy, paradójicamente, se lo conoce más como el inventor del barómetro que como matemático. Torricelli estudió las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles disparados desde un punto fijo con velocidad inicial constante, pero con ángulos de elevación sobre la horizontal variables, descubriendo que la envolvente de todas estas parábolas es otra parábola, la llamada "parábola de seguridad".

Al pasar de la ecuación para la distancia en función del tiempo a la de la velocidad en función del tiempo y recíprocamente, Torricelli se dio cuenta del carácter inverso que presentan los problemas de cuadraturas y de determinación de tangentes. Si hubiera vivido una normal cantidad de años, es muy posible que hubiera sido él el inventor del cálculo infinitesimal, pero el cruel destino truncó su vida, en Florencia, solo unos días después de haber cumplido 39 años.

Aventuras a la era de Bernoulli

Las funciones y las series

A Jacques Bernoulli le fascinaban de una manera especial las series de los inversos de los números figurados, pero, aunque sabía que la serie de los inversos de los cuadrados perfectos es convergente, no fue capaz de hallar la suma de esta serie. Dado que los términos de la serie

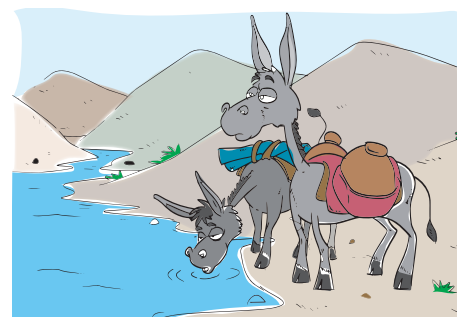
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

son menores o iguales, término a término, que los de la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

y esta última serie se sabía que era convergente a 2, estaba claro para Bernoulli que la primera también debía ser convergente.

A través de su correspondencia con otros matemáticos de la época, Jacques Bernoulli se encontraba al corriente de los problemas que se habían hecho famosos, muchos de los cuales los había resuelto de manera personal.



Entre estos problemas estaban los de encontrar las ecuaciones de la catenaria, la tractriz y la isócrona, todos los cuales habían sido tratados ya por Huygens y Leibniz. El problema de la isócrona, lo que pedía era encontrar la ecuación de una curva plana tal que un objeto que cayese a lo largo de ella lo hiciese con una velocidad vertical uniforme, y Bernoulli demostró que la curva buscada es una parábola semicúbica.

Fue en el estudio de problemas tales como estos que los hermanos Bernoulli descubrieron la potencia del cálculo, y se mantuvieron en estrecho contacto con Leibniz en todo lo relativo a este nuevo campo. Jacques Bernoulli utilizó la palabra "integral" en su trabajo sobre la isócrona en el *Acta Eruditorum* de 1690, y unos años más tarde Leibniz se manifestó de acuerdo en que *calculus integralis* sería un nombre mejor para el inverso del *calculus differentialis* que el de *calculus summatoris*.

A las ecuaciones diferenciales contribuyó Jacques Bernoulli con el estudio de la "ecuación de Bernoulli"

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

que tanto él como Leibniz y Jean Bernoulli consiguieron resolver, Jean reduciéndola a una ecuación lineal por medio de la sustitución $z = y^{1-n}$. Los hermanos Bernoulli entraron en un agudo conflicto uno con el otro, precisamente en conexión con un problema de cálculo de variaciones. (Jacques era el quinto de los hermanos, mientras que Jean era el décimo, y el más joven estaba quizá resentido por lo que consideraba como inaceptable condescendencia por parte de su hermano mayor).

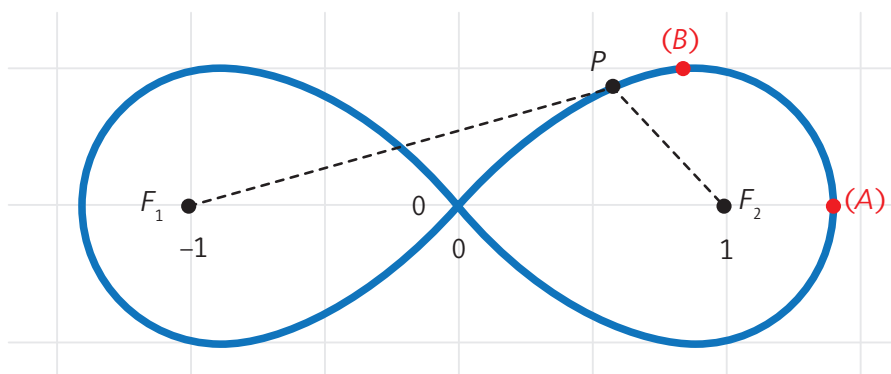
Tanto Leibniz como ambos Bernoulli se hallaban buscando una solución al problema de la braquistócrona, es decir, el de encontrar una curva tal que una partícula caiga deslizándose a lo largo de ella de un punto a otro situado más bajo que el primero, pero no en la misma vertical, en el mínimo tiempo posible.

Jean encontró una demostración incorrecta de que la curva tenía que ser una cicloide, y retó a su hermano a descubrir la curva buscada; después que Jacques hubo demostrado correctamente que la curva en cuestión era una cicloide, Jean intentó sustituir su propia demostración por la de su hermano.



La espiral logarítmica

Jacques Bernoulli estaba extraordinariamente interesado tanto en el cálculo como en el estudio de curvas, y una de estas curvas lleva su nombre; se trata de la "lemniscata de Bernoulli", que viene dada en coordenadas polares por la ecuación $r^2 = a \cdot \cos 2\theta$.

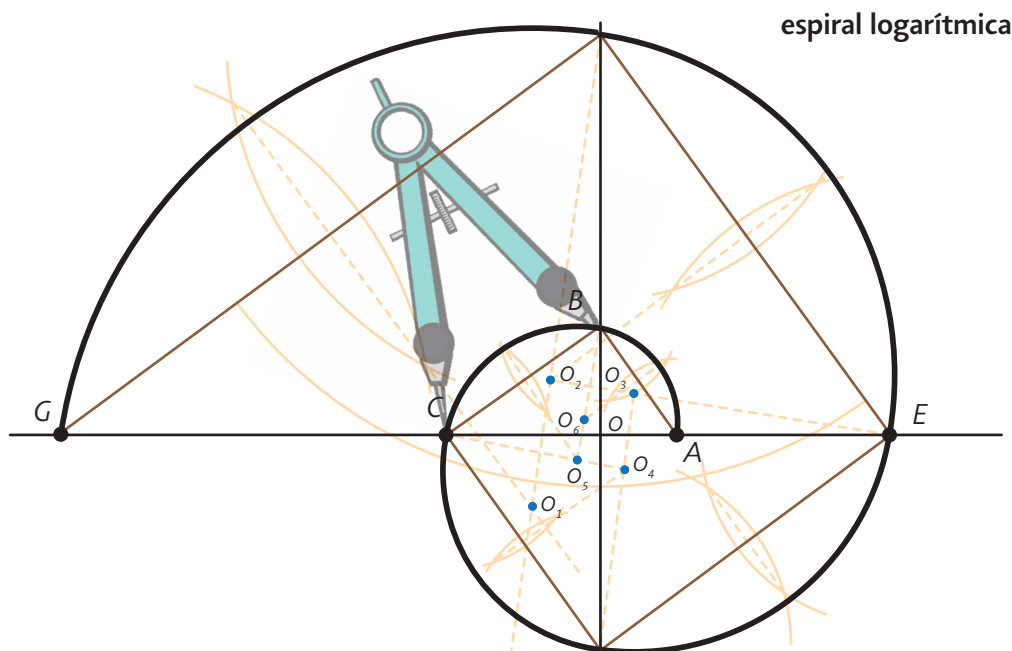


Esta curva se describe en el *Acta Eruditorum* de 1694 como recordando la figura de un ocho o bien una cinta anudada (*lemniscus*).

Sin embargo, la curva que atrajo más fuertemente su imaginación fue la espiral logarítmica. Esta curva había sido mencionada ya por René Descartes y había sido rectificada por Torricelli, pero Bernoulli mostró que tenía varias propiedades sorprendentes que no habían sido observadas con anterioridad:

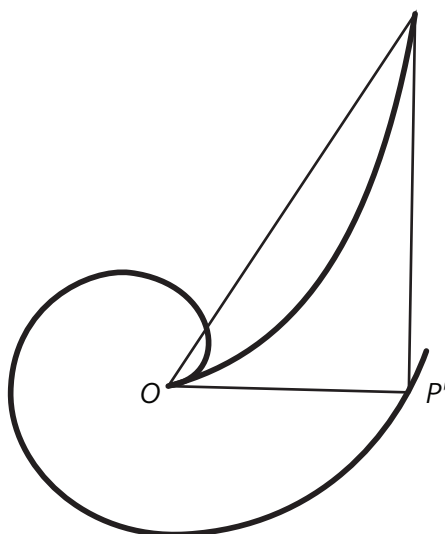
- 1) la evoluta de una espiral logarítmica es otra espiral logarítmica igual;
- 2) la curva pedal de una espiral logarítmica con respecto a su polo (es decir, el lugar geométrico de las proyecciones del polo sobre las tangentes a la curva dada) es otra espiral logarítmica igual;
- 3) la cáustica de reflexión para los rayos que parten del polo (es decir, la envolvente de los rayos reflejados en puntos de la curva dada) es otra espiral logarítmica igual; y

4) la cáustica de refracción para los rayos que surgen del polo (es decir, la envolvente de los rayos refractados en puntos de la curva) es otra espiral logarítmica igual.



Resulta fácil comprender los sentimientos que llevaron a Bernoulli a pedir que grabaran sobre su tumba la espiral logarítmica, junto con la inscripción “Aun siendo modificada, resurjo en la misma”.

Jacques Bernoulli se vio conducido a un tipo de espiral diferente al repetir el procedimiento de Cavalieri de “doblar” la mitad de la parábola $x^2 = ay$ alrededor del origen para obtener una espiral de Arquímedes.



Pero con la diferencia de que mientras Cavalieri había estudiado esta transformación por métodos esencialmente sintéticos, Bernoulli utilizó en cambio coordenadas rectangulares y polares.

Newton había usado ya anteriormente las coordenadas polares (quizá tan tempranamente como en 1671), pero la prioridad en la publicación parece corresponder a Bernoulli, que propuso medir las abscisas a lo largo de la circunferencia de un círculo fijo, y las ordenadas radialmente a lo largo de las normales, en el *Acta Eruditorum* de 1691.

Tres años más tarde, propuso en la misma revista una modificación que estaba más de acuerdo con el sistema de Newton; la coordenada y era ahora la longitud del radio vector del punto, y x era el arco determinado por los lados del ángulo vectorial en una circunferencia de radio a trazada con centro en el polo. Estas coordenadas eran esencialmente lo que hoy escribiríamos como $(r, a\theta)$.

Bernoulli, lo mismo que Newton, estaba interesado principalmente en las aplicaciones de este nuevo sistema al cálculo y dedujo, por lo tanto, fórmulas para la longitud del arco y para el radio de curvatura de una curva

en coordenadas polares. Para el caso de su "espiral parabólica" $r^2 = a\theta$, observó que el cálculo de la longitud del arco mediante la fórmula $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ conduce a una integral en la que figura la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado, primer ejemplo concreto de lo que llamamos ahora una *integral elíptica*.

El cálculo diferencial

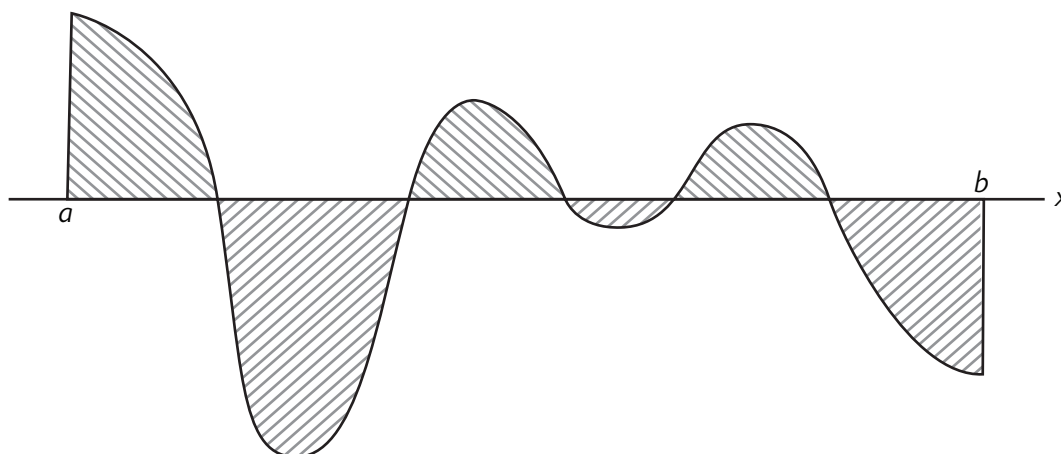


Continuación de *Leñitas Geométricas* 6, 5ª época.

→ **3. Observaciones generales sobre el concepto de integral. Definición general.** En nuestra definición geométrica de la integral como área de una superficie, supusimos implícitamente que $f(x)$ nunca es negativa en el intervalo $[a, b]$ de integración, es decir que ninguna parte de la gráfica de la curva se encuentra por debajo del eje de las x . Pero en nuestra definición analítica de la integral como límite de la sucesión de sumas S_n , aquella hipótesis es innecesaria.



Tomamos a secas las pequeñas cantidades $f(x_j) \cdot \Delta x$, formamos su suma y pasamos al límite, procedimiento que sigue teniendo sentido, aunque algunos de los valores $f(x_j)$ sean negativos.



La interpretación geométrica mediante áreas (figura de arriba) nos dice que la integral de $f(x)$ es la suma algebraica de las áreas limitadas por la gráfica y el eje de las x , contando las que se encuentran por encima de él como positivas y negativas las que se encuentran por debajo.

Puede ocurrir que en las aplicaciones aparezcan integrales

$$\int_a^b f(x) dx,$$

en las que b es menor que a , por lo que la diferencia $\frac{b-a}{n} = \Delta x$ es un número negativo. En nuestra definición analítica, tenemos que $f(x_j) \cdot \Delta x$ es negativo si $f(x_j)$ es positivo y Δx negativo, etc. En otras palabras, el valor de la integral será el de la que se extiende de b a a , tomada con signo contrario. Así pues, se tiene la siguiente regla:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Debemos hacer constar que el valor de la integral sigue siendo el mismo, aunque no nos limitemos a puntos equidistantes de subdivisión, o, lo que es lo mismo, a diferencias de x iguales $\Delta x = x_{j+1} - x_j$. Podemos elegir los x_j de otro modo, de forma que las diferencias $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ no sean iguales entre sí (por lo que será necesario distinguirlas mediante subíndices). Aun en este caso, las sumas

$$S_n = f(x_1) \Delta x_0 + f(x_2) \Delta x_1 + \dots + f(x_n) \Delta x_{n-1}$$

y también la siguiente:

$$S'_n = f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

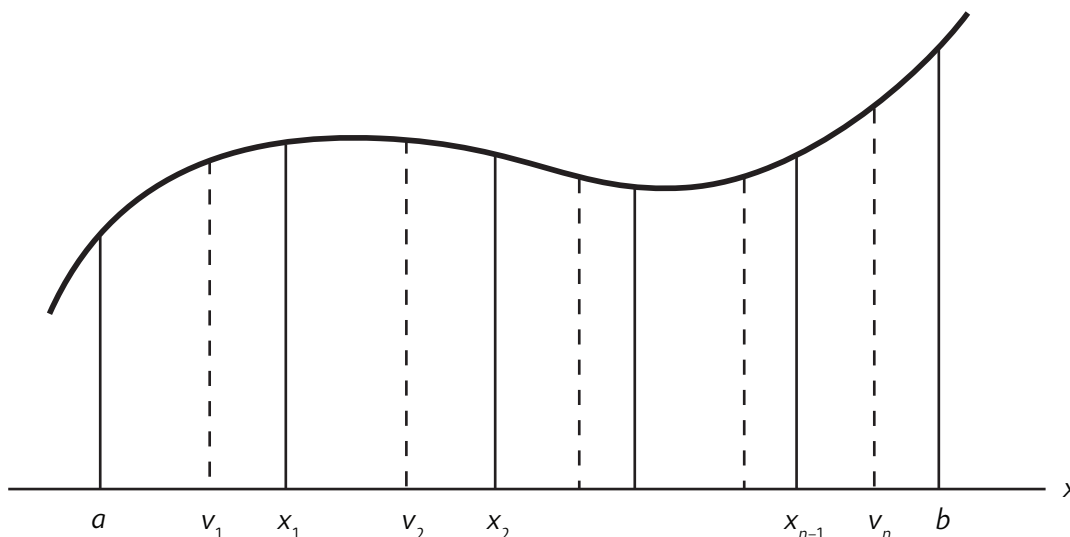
tienden al mismo límite, o sea, al valor de la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

teniendo cuidado en que, al aumentar n todas las diferencias $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ tienden a cero de tal manera que la mayor de ellas, para un cierto valor de n , tienda a cero al aumentar n . De acuerdo con todo esto, la definición final de integral está dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(v_j) \Delta x_j \quad (6a)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. En este límite, v_j puede indicar cualquier punto del intervalo $x_j \leq v_j \leq x_{j+1}$, siendo la única restricción que el intervalo mayor tienda a cero al aumentar n (véase la figura siguiente).



La existencia del límite (6a) no necesita demostración si suponemos que está definida el área bajo una curva y admitimos la posibilidad de aproximarse a ella mediante rectángulos. Sin embargo, como se deducirá de la discusión pertinente más adelante, un análisis más atento demostrará que para presentar de una manera lógica y completa la noción de integral es deseable y necesario demostrar la existencia del límite para cualquier función continua $f(x)$, sin tener que acudir al concepto geométrico de área.

➔ **4. Ejemplos de integración. Integración de x^n .** Hasta ahora nuestra discusión de la integral ha sido simplemente teórica. La cuestión capital consiste en saber si formando una suma y pasando al límite se llega realmente a un resultado tangible en casos concretos. Naturalmente, esto requerirá algún razonamiento especial adaptado a la función especial, cuya integral se quiere encontrar.

Cuando Arquímedes, hace 2.000 años, encontró el área del segmento parabólico, determinó lo que actualmente llamamos la *integral de la función $f(x) = x^2$* mediante un procedimiento muy ingenioso. En el siglo XVII, los precursores del cálculo integral moderno consiguieron resolver problemas de integración de funciones muy simples, tales como x^n , mediante procedimientos especiales e ingeniosos.



Solo después de adquirir una amplia experiencia con numerosos casos especiales pudo encontrarse un método sistemático de cálculo, que constituyó una solución general del problema y que amplió el campo de los problemas individuales resolubles. En el presente punto discutiremos algunos problemas especialmente instructivos que pertenecen a la etapa primitiva del cálculo pues nada sirve mejor para mostrar el paso al límite que constituye la esencia de la integración.

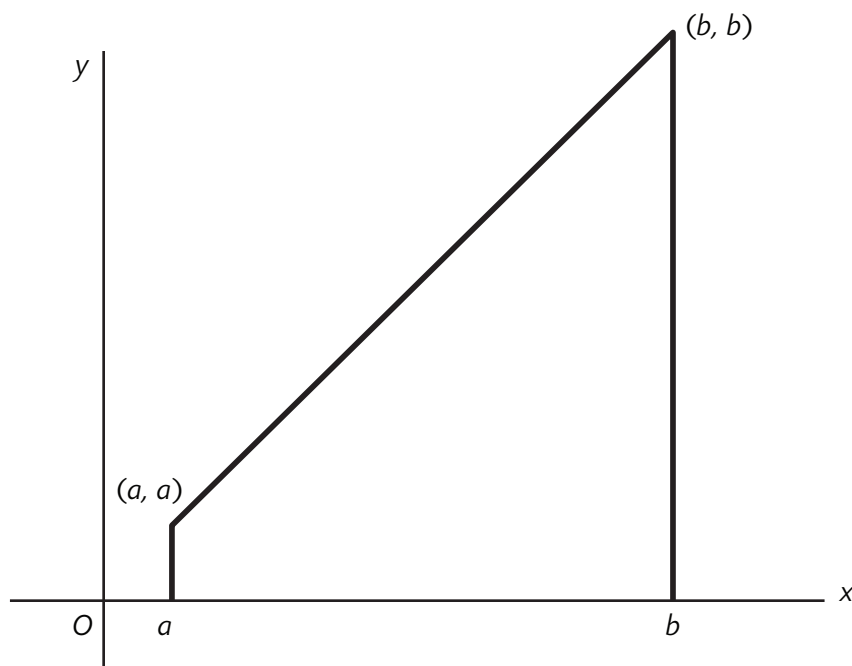
a) Empecemos por un ejemplo trivial. Si $y = f(x)$ es una constante, por ejemplo, $f(x) = 2$, evidentemente, en el área, o sea la integral $\int_a^b 2 dx$ es igual a $2 \cdot (b - a)$, puesto que el área de un rectángulo es igual a la base multiplicada por la altura. Comparemos este resultado con la definición de integral como límite, según (6) (véase *Leñitas Geométricas* 6, 5ª época). Si sustituimos en (5) $f(x_j)$ por 2 para todos los valores de j , encontraremos que

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta \cdot x = \sum_{j=1}^n 2 \Delta \cdot x = 2 \sum_{j=1}^n \Delta x = 2(b-a)$$

para todo n , puesto que

$$\sum_{j=1}^n \Delta x = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = (b - a).$$

b) Casi tan simple es la integración de $f(x) = x$. En este caso, $\int_a^b x dx$ es el área de un trapecoide (véase figura siguiente)



que, por geometría elemental, sabemos que es igual a

$$(b-a) \frac{b+a}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Este resultado coincide con la definición (6) de la integral, como se ve efectuando el paso al límite, sin utilizar la figura geométrica; si sustituimos $f(x) = x$ en (5), la suma S_n , se convierte en

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n x_j \Delta x = \sum_{j=1}^n (a + x_j \Delta x) \Delta x = (na + \Delta x + 2\Delta x + 3\Delta x + \dots + n\Delta x) \Delta x = \\ &= na\Delta x + (\Delta x)^2 (1+2+3+\dots+n). \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula para la suma de una progresión aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + n$, se tiene:

$$S_n = na\Delta x + \frac{n(n+1)}{2}(\Delta x)^2.$$

Puesto que $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, esto equivale a

$$S_n = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{2n}(b-a)^2.$$

Si ahora hacemos tender n a infinito, el último término tiende a cero y resulta

$$\lim S_n = \int_a^b f(x) dx = a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

de acuerdo con la interpretación geométrica de la integral como un área.

c) Algo menos trivial es la integración de la función $f(x) = x^2$. Arquímedes utilizó métodos geométricos para resolver el problema equivalente que consiste en hallar el área del segmento de parábola $y = x^2$. Procederemos analíticamente, basándonos en la definición (6a). Para simplificar la parte formal de los cálculos, tomaremos el "extremo inferior" a de la integral igual a cero; entonces, $\Delta x = \frac{b}{n}$. Puesto que $x_j = j \cdot \Delta x$ y $f(x_j) = j^2(\Delta x)^2$, se tiene la expresión:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^n f(j\Delta x) \Delta x = [1^2 \cdot (\Delta x)^2 + 2^2 \cdot (\Delta x)^2 + \dots + n^2 (\Delta x)^2] \Delta x = \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)(\Delta x)^3. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular realmente el límite, utilizando la fórmula:

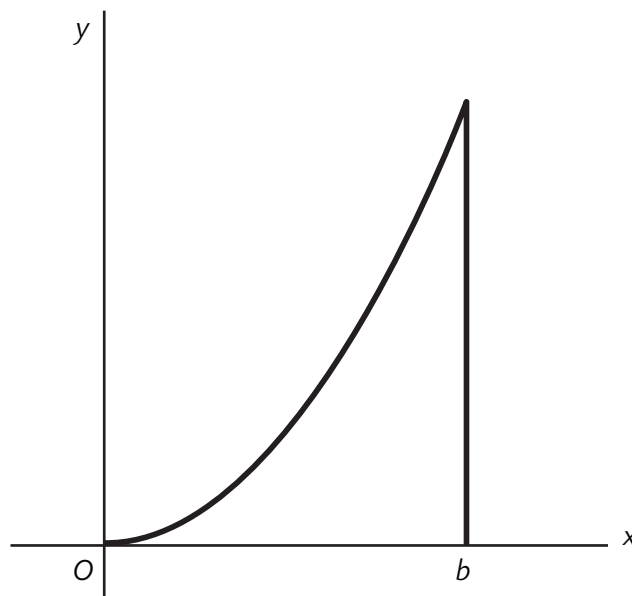
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

establecida anteriormente, y haciendo la sustitución $\Delta x = \frac{b}{n}$, tenemos:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{b^3}{n^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Esta transformación preliminar facilita el paso al límite, puesto que $\frac{1}{n}$ tiende a cero, al aumentar n indefinidamente. Así obtenemos que el límite es simplemente $\frac{b^3}{3}$, o sea,

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$



Aplicando este resultado al área desde O a a , tenemos que

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

y por sustracción

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Ejercicio. Demuestre de la misma manera, utilizando la conocida fórmula $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$, que

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$$

Desarrollando la fórmula general para la suma $1k + 2k + \dots + nk$ de las potencias k -ésimas de todos los números enteros desde 1 hasta n , se puede obtener el resultado

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k \text{ entero positivo}). \quad (7)$$

En lugar de proceder de esta manera, podemos obtener un resultado aún más general utilizando nuestra observación anterior, según la cual podemos calcular la integral mediante una subdivisión tal del intervalo que los puntos no sean equidistantes. Estableceremos la fórmula (7) no solo para cualquier entero positivo k sino para cualquier número racional arbitrario, positivo o negativo

$$k = u/v$$

donde v es un número entero y positivo, y u es otro entero, positivo o negativo. Se excluirá únicamente el valor $k = 1$, para el cual la fórmula (7) carece de significado. Supondremos, además, que $0 < a < b$.

Para obtener la integral (7) formamos S_n , eligiendo los puntos de subdivisión $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, en progresión geométrica. Pongamos $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = q$, por lo que $\frac{b}{a} = q^n$, y definamos $x_0 = a, x_1 = aq, x_2 = aq^2, \dots, x_n = aq^n = b$.

Mediante este procedimiento el paso al límite se convierte en algo muy sencillo. Para la "suma de rectángulos" S_n encontraremos que

$$S_n = a^k(aq - a) + a^k q^k(aq^2 - aq) + a^k q^{2k}(aq^3 - aq^2) + \dots + a^k q^{(n-1)k}(aq^n - aq^{n-1})$$

puesto que $f(x_j) = x_j^k = a^k q^{jk}$ y $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = aq^{j+1} - aq^j$.

Como cada término contiene el factor $a^k(aq - a)$, podemos escribir

$$S_n = a^{k+1}(q - 1)[1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{(n-1)(k+1)}].$$

Sustituyendo q^{k+1} por t , observamos que la expresión entre corchetes es una progresión geométrica, cuya suma conocemos: es $\left(\frac{t^n - 1}{t - 1} \right)$. Pero $t^n = q^{n(k+1)} = \left(\frac{b}{a} \right)^{k+1} = \frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}$.

En consecuencia,

$$S_n = (q - 1) \left\{ \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{q^{k+1} - 1} \right\} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{N} \quad (8)$$

donde

$$N = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

Hasta ahora, n es invariable. Hagamos crecer n y determinemos el límite de N . Al aumentar n , la raíz n -ésima $\sqrt[n]{b} = q$ tenderá a 1, por lo que tanto el numerador como el denominador de N tenderán a cero, lo que impone una cierta cautela.

Supongamos primero que k es un entero positivo; podrá efectuarse entonces la división por $q - 1$, obteniendo: $N = q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1$. Si ahora n aumenta, q tiende a 1, o sea que q^2, q^3, \dots, q^k tienen el mismo límite, por lo que N tiende a $k + 1$, que es lo que se quería demostrar.

Ejercicio. Demuestre para cualquier número racional $k \neq -1$ que el límite es el mismo, es decir que $N \rightarrow k + 1$ y que, en consecuencia, el resultado (7) sigue siendo válido. De acuerdo con nuestro ejemplo, demuestre primero para números enteros y negativos k . Entonces: si $k = \frac{u}{v}$, escriba $q^{\frac{1}{v}} = s$, resultando

$$N = \frac{s^{(k+1)v} - 1}{s^v - 1} = \frac{s^{u+v} - 1}{s^v - 1} = \frac{s^{u+v} - 1}{s - 1} \cdot \frac{s^v - 1}{s - 1}.$$

Si n aumenta, tanto s como q tienden a 1, por lo que dos cocientes del segundo miembro tienden a $u + v$ y v , respectivamente, lo que proporciona nuevamente $k + 1$ para el límite de N .

Más adelante, veremos cómo los métodos más simples y potentes del cálculo reemplazan esta discusión larga y bastante artificiosa.

Ejercicios

1. Verifíquese la integración precedente de x^k para los casos siguientes: $k = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, -3, 3$.

2. Calcúlese el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{-1} x \, dx;$ b) $\int_1^2 x^2 \, dx;$ c) $\int_{-1}^{-2} x^3 \, dx;$ d) $\int_{-1}^1 x \, dx;$ e) $\int_0^n x \, dx.$

3. Determinése el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{+1} x^3 \, dx;$ b) $\int_{-2}^2 x^3 \cos x \, dx;$ c) $\int_{-1}^{+1} x^4 \cos^2 x, \sin^2 x \, dx;$ d) $\int_{-1}^{+1} \operatorname{tg} x \, dx$

(considérese la gráfica de cada una de las funciones bajo el signo integral, téngase en cuenta su simetría con respecto a $x = 0$, e intérpretense las integrales como áreas).

4. Intégrese $\sin x$ y $\cos x$ desde 0 hasta b haciendo $\Delta x = h$ y utilizando las fórmulas dadas.

5. Intégrese $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ desde 0 hasta b dividiendo el intervalo en partes iguales y utilizando en (6a) los valores $v_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$.

6. Utilizando el resultado (7) y la definición de integral con valores iguales de Δx demuéstrese para $n \rightarrow \infty$ la relación límite:

$$\frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \rightarrow \frac{1}{k+1} \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

Hágase $\frac{1}{n} = \Delta x$ y demuestre que el límite es igual a

$$\int_0^1 x^k \, dx.$$

7. Demuéstrese para $n \rightarrow \infty$, que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2+n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) \rightarrow 2(\sqrt{2} - 1).$$

(Escríbese esa suma de tal modo que aparezca como una integral).

8. Calcúlese el área del segmento parabólico limitado por un arco $\widehat{PP_2}$ y la cuerda correspondiente a la parábola $y = ax^2$ en función de las abscisas x_1 y x_2 de los dos puntos extremos.





PARA RESOLVER

con imaginación e inteligencia

Respuesta del N° 12

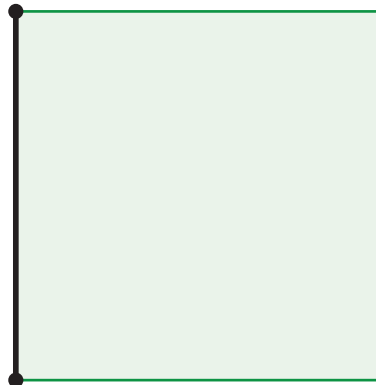


Usando un Geogebra defectuoso, con el que solo se pueden dibujar cuadrados y trazar segmentos, indicar cómo es posible dividir un segmento en 3 partes iguales.

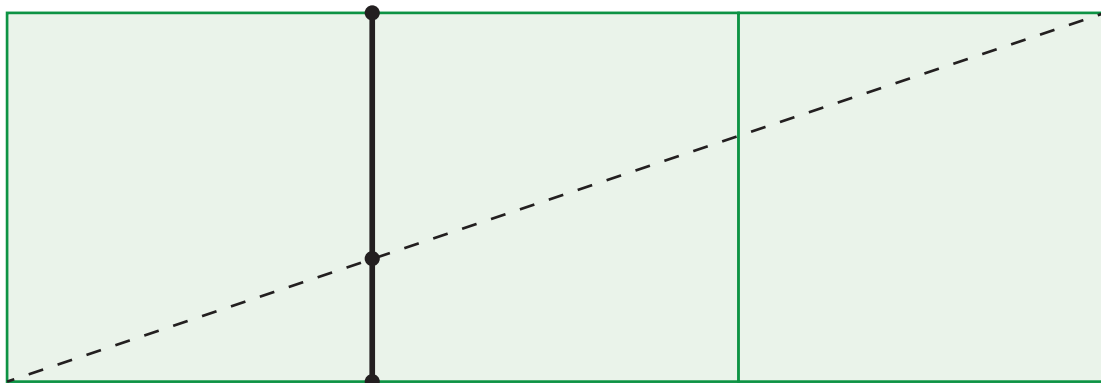


Solución

Sobre el segmento dibujamos un cuadrado.



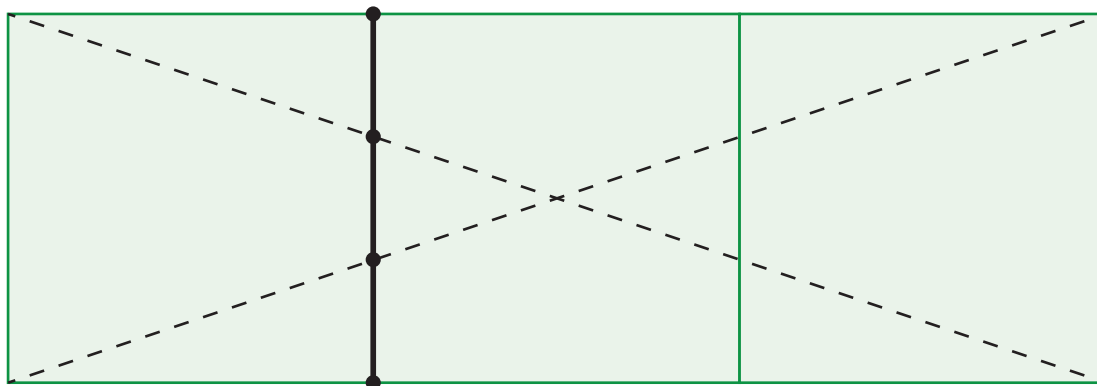
Sobre dos lados de este cuadrado, dibujamos un cuadrado y trazamos una diagonal del rectángulo resultante, tal como indica la figura.





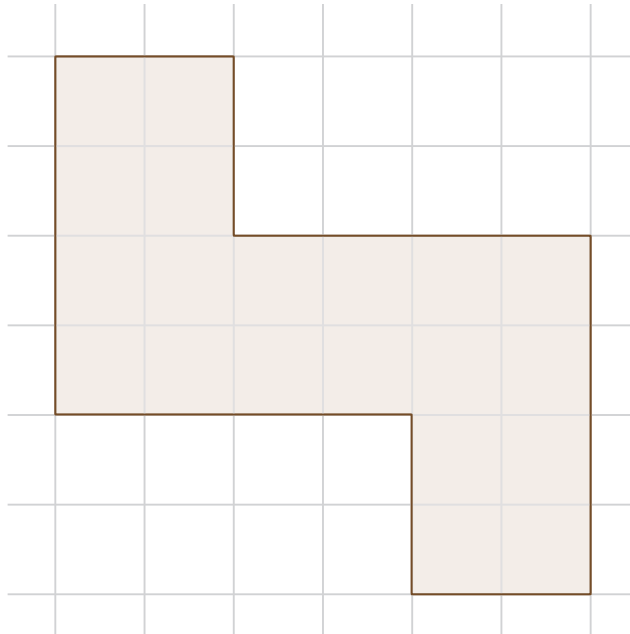
Por el teorema de Tales, dicha diagonal queda descompuesta por las líneas verticales en tres segmentos de igual longitud. Nuevamente, por el teorema de Tales, el segmento dado queda descompuesto por la diagonal en dos segmentos que guardan la relación 1:2, es decir, la longitud del segmento menor es un tercio de la longitud del segmento dado.

Trazando la otra diagonal del rectángulo, habremos descompuesto el segmento dado en 3 partes iguales.



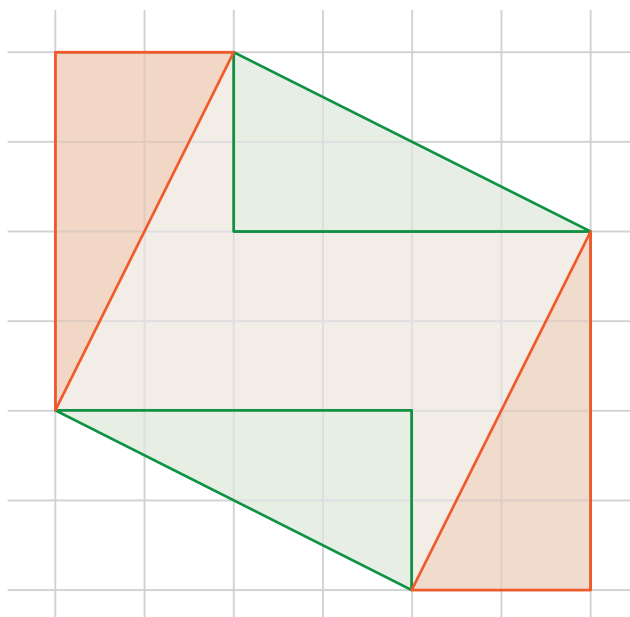


Mostrar que es posible armar un cuadrado haciendo dos cortes en el polígono de la figura y uniendo, de algún modo, las piezas obtenidas.



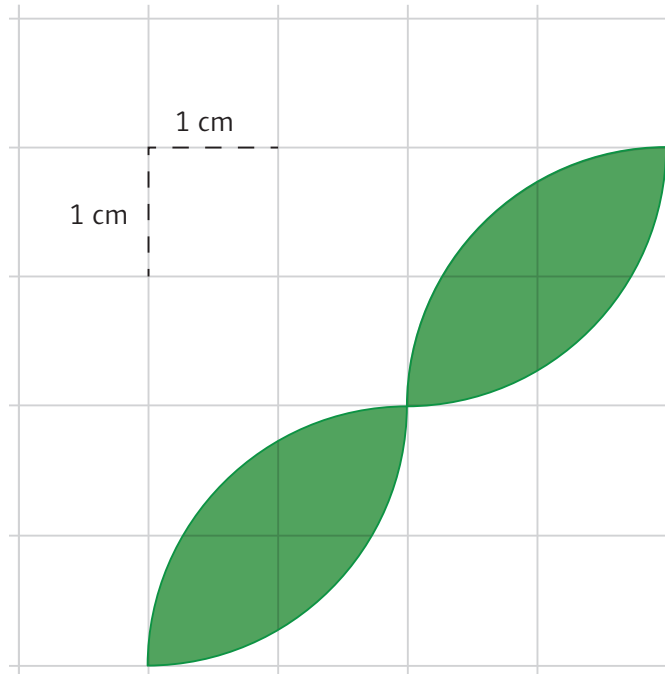
Solución

La siguiente figura muestra que se pueden recortar dos triángulos, los de color rojo, y ubicarlos en los lugares de los triángulos de color verde.



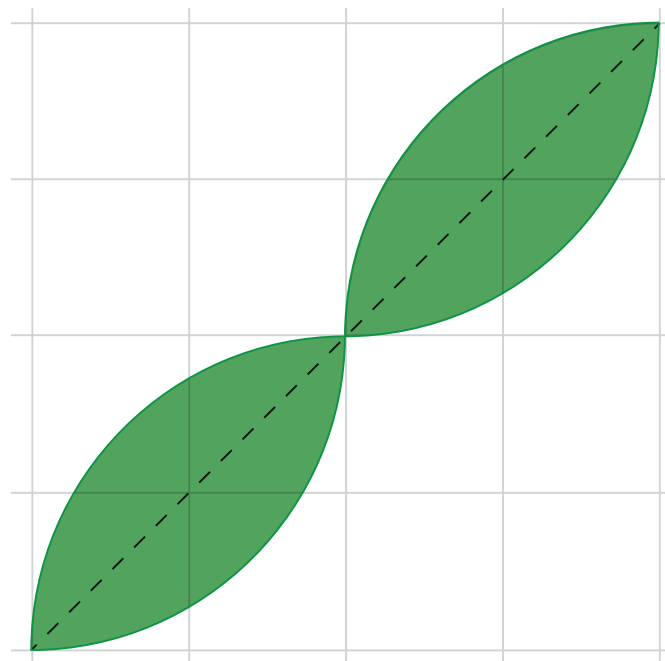


Con la información de la figura, hallar el área de la región sombreada, limitada por cuatro arcos de circunferencias de 2 cm de radio.



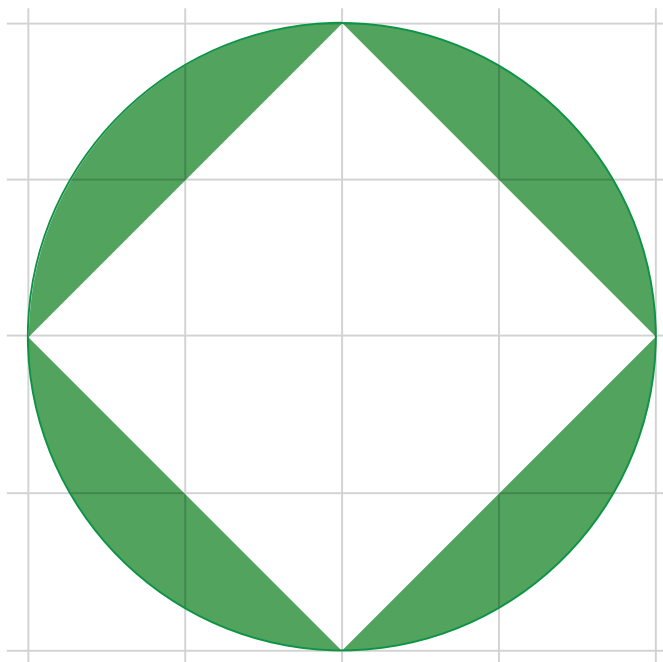
Solución

Podemos descomponer esta figura en cuatro piezas idénticas, siguiendo la línea de puntos dada a continuación.





Reubicamos las cuatro piezas para formar la siguiente figura:



Ahora es claro que el área buscada es igual a la del círculo de 2 cm de radio, menos la del cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ cm, esto es $4\pi - 8$ cm².