



# Leñitas Geométricas\*

para el Fogón Matemático de los Festivales

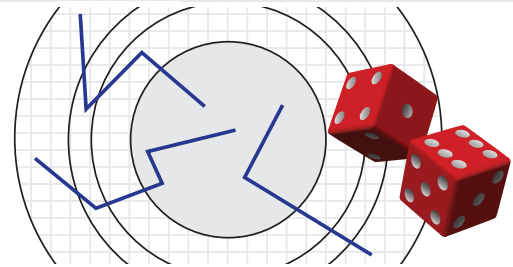
De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✕ N° 6  
18 de mayo de 2023



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

## El Método Montecarlo



### Simulación de variables aleatorias

#### 4. Transformaciones de variables aleatorias

En la solución de diferentes problemas tropezamos con la necesidad de simular distintas variables aleatorias. En las etapas iniciales del desarrollo del método Montecarlo, los investigadores intentaban obtener cada variable aleatoria construyendo una ruleta apropiada. Por ejemplo, para hallar los valores de la variable aleatoria con la distribución siguiente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,125 \end{pmatrix} \quad (22')$$

se puede emplear la ruleta representada en la figura siguiente, que funciona de igual modo que la ruleta analizada en *Leñitas Geométricas*, N° 5, 5ª época, pero que no está dividida uniformemente, sino en partes proporcionales a  $p_i$ .

**Los números complejos  
en la geometría del plano.  
Teorema de Ptolomeo.  
Potencia.**



**¡Hacé tu pedido!**

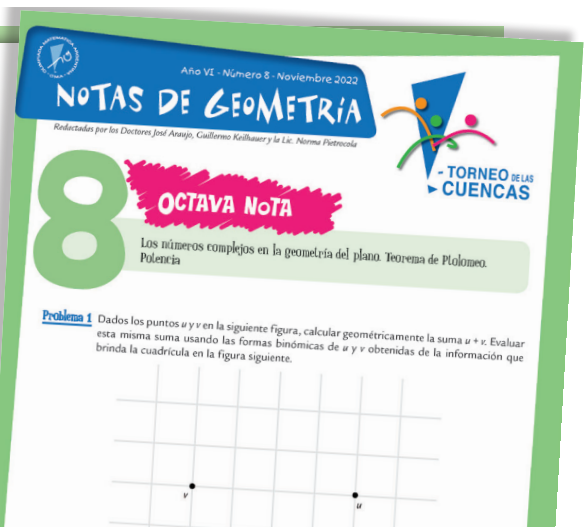
En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

**Publicación reciente**

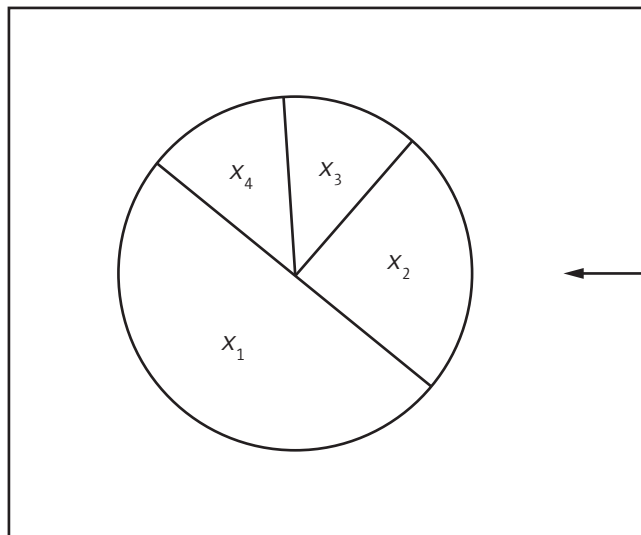
**fenchu@oma.org.ar**

☎ **11 4826 8976**

📞 **+54 9 11 5035 7537**



\* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.



Pero esto no hace falta: resulta que los valores de cualquier variable aleatoria se pueden obtener efectuando transformaciones de una sola variable aleatoria (es decir, de una variable "standard"). Suele emplearse con este fin la variable aleatoria  $\gamma$ , uniformemente distribuida en el intervalo  $(0, 1)$ . Conocemos ya cómo se obtienen los valores de  $\gamma$ .

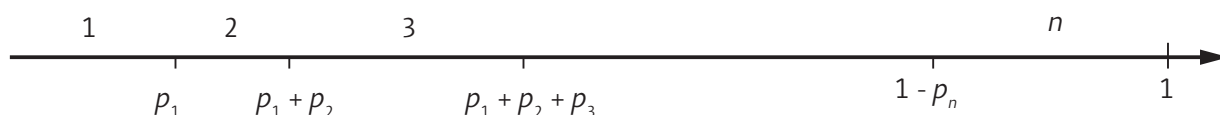
Denominaremos *sorteo de la variable aleatoria*  $\xi$  al proceso de determinación de un valor de esta variable aleatoria  $\xi$  mediante la transformación de uno o varios valores de  $\gamma$ .

→ **1. Sorteo de una variable aleatoria discreta.** Supongamos que es preciso obtener valores de la variable aleatoria  $\xi$  con la distribución

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$



Consideremos el intervalo  $0 < y < 1$  dividiéndolo en  $n$  intervalos de longitudes  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Es evidente que las coordenadas de los puntos de división serán  $y = p_1, y = p_1 + p_2, \dots, y = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$ . Indiquemos con las cifras  $1, 2, n$  los intervalos obtenidos.



Con esto concluimos los preparativos del sorteo de  $\xi$ . Cada vez que tengamos que "realizar un experimento" y sortear el valor de  $\xi$ , tomaremos un valor de  $\gamma$  y construiremos el punto  $y = \gamma$ . Si este punto aparece en el intervalo correspondiente al número  $i$ , aceptaremos que  $\xi = x_i$  (en este experimento).

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". *Miguel de Guzmán*

*¿Ya lo tenés?*

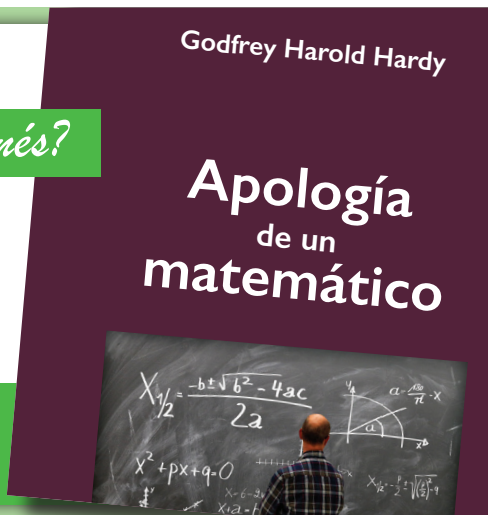


[fenchu@oma.org.ar](mailto:fenchu@oma.org.ar)

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

**¡Hacé tu pedido!**

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



Es muy fácil argumentar la legitimidad de este procedimiento. En efecto, puesto que la variable aleatoria  $\gamma$  está uniformemente distribuida en  $(0, 1)$ , la probabilidad de que  $\gamma$  pertenezca a uno de los intervalos es igual a la longitud del mismo. Por consiguiente,

$$P\{0 < \gamma < p_1\} = p_1$$

$$P\{p_1 < \gamma < p_1 + p_2\} = p_2,$$

.....

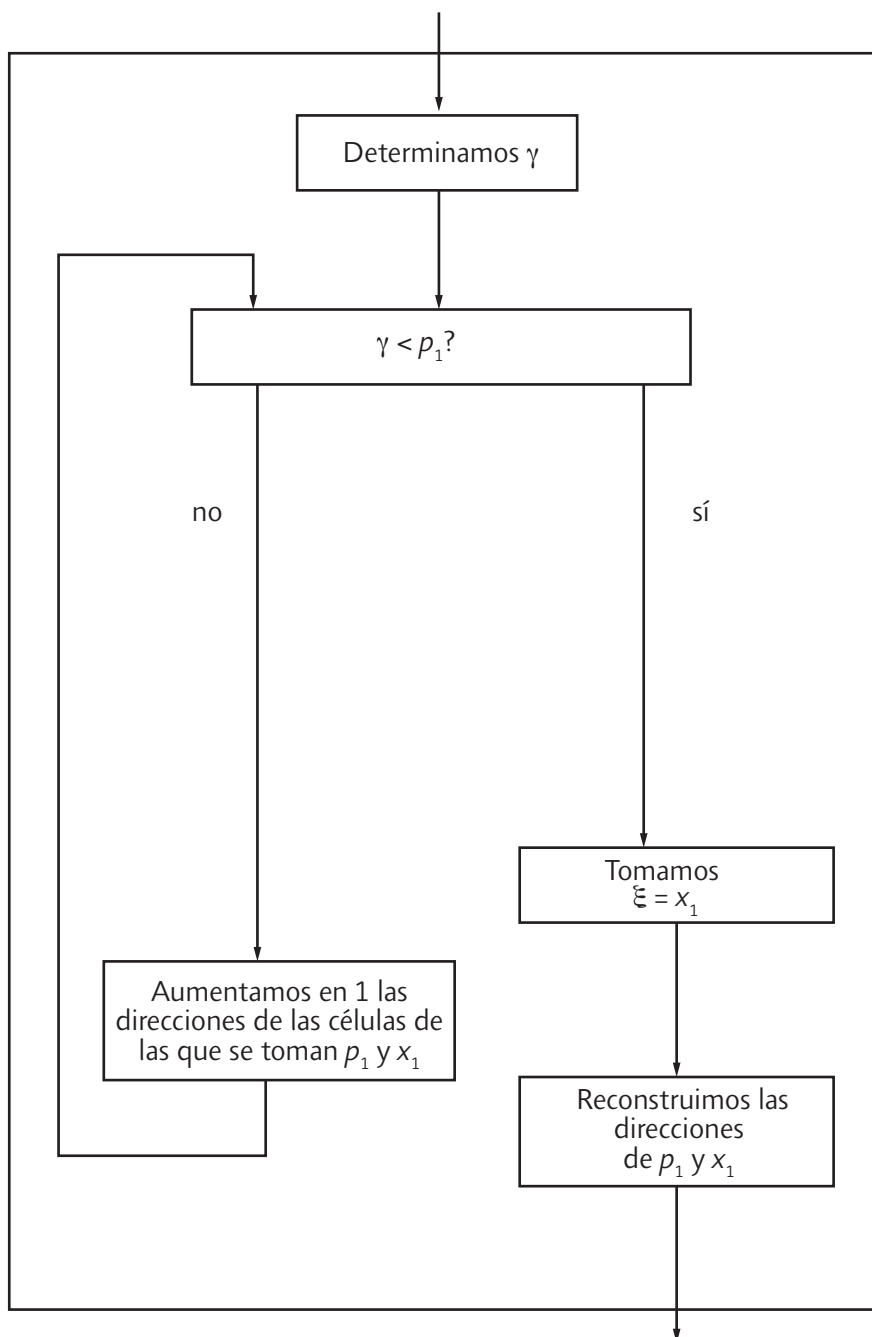
$$P\{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} < \gamma < 1\} = p_n$$

Según nuestro método, tomamos  $\xi = x_i$  cuando

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{t-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

y la probabilidad de ello es igual a  $p_i$ .

Por supuesto, si empleamos la calculadora podemos pasarnos sin usar la gráfica anterior. Supongamos que tanto los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como las probabilidades  $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots, 1$  han sido introducidos uno tras otro en la memoria. En la figura siguiente representamos el esquema sinóptico del subprograma de sorteo de  $\xi$ .



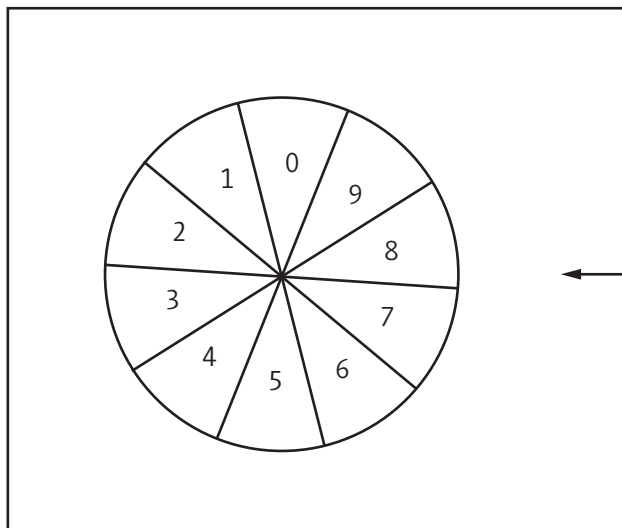
**Ejemplo.** Sortéense 10 valores de la variable aleatoria con la distribución

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0,58 & 0,42 \end{pmatrix}.$$

Escojamos los valores  $\gamma$  tomando pares de cifras de la Tabla A de números aleatorios que se presenta un poco más adelante.

Las cifras aleatorias de la Tabla A imitan los valores de la variable aleatoria con la distribución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$



multiplicados por 0,01. [Puesto que en este ejemplo los valores de  $p_i$  tienen dos cifras decimales, basta con tomar los valores de  $\gamma$  con dos cifras decimales. Aceptando este grado de aproximación, se nos puede dar el caso de  $\gamma = 0,58$ , que debe ser agregado al caso de  $\gamma > 0,58$  (ya que el valor  $\gamma = 0,00$  es posible mientras que el valor  $\gamma = 1,00$  es imposible). Si empleamos para  $\gamma$  números con varias cifras decimales, el caso  $\gamma = p_1$  se hace poco probable y puede ser agregado a cualquiera de las desigualdades].

**Tabla A. 400 cifras aleatorias**

86515	90795	66155	66434	56558	12332	94377	57802
69186	03393	42502	99224	88955	53758	91641	18867
41686	42163	85181	38967	33181	72664	53807	00607
86522	47171	88059	89342	67248	09082	12311	90316
72587	93000	89688	78416	27589	99528	14480	50961
52452	42499	33346	83935	79130	90410	45420	77757
76733	97526	27256	66447	25731	37525	16287	66181
04825	82134	80317	75120	45904	75601	70492	10274
87113	84778	45863	24520	19976	04925	07824	76044
84754	57616	38132	64294	15218	49286	89571	42903

Las cifras aleatorias imitan los valores de la variable aleatoria con la distribución (22), es decir,  $\gamma = 0,86; 0,51; 0,59; 0,07; 0,05; 0,66; 0,15; 0,56; 0,64; 0,34$ .

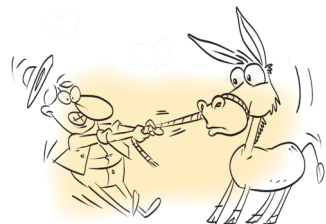
Según nuestro esquema, los valores menores que 0,58 corresponden a  $\theta = 3$  mientras que los valores  $\gamma \geq 0,58$  corresponden a  $\theta = 4$ : de modo que obtenemos los valores siguientes:  $\theta = 4; 3; 4; 3; 4; 3; 3; 4; 3$ .

Cabe subrayar que el orden de numeración de los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en la distribución de  $\xi$  puede ser arbitrario, pero debe fijarse antes de comenzar el sorteo.

→ **2. Sorteo de una variable aleatoria continua.** Supongamos ahora que debemos obtener valores de una variable aleatoria  $\xi$  distribuida con la densidad  $p(x)$  en el intervalo  $(a, b)$ .

Demostraremos que los valores de  $\xi$  se pueden determinar a partir de la ecuación

$$\int_a^{\xi} p(x)dx = \gamma, \tag{23}$$



o sea, que escogido ya el valor de  $\gamma$  es preciso resolver la ecuación (23) para hallar el valor de  $\xi$ . Para demostrar esta afirmación consideremos la función

$$y = \int_a^x p(x)dx.$$

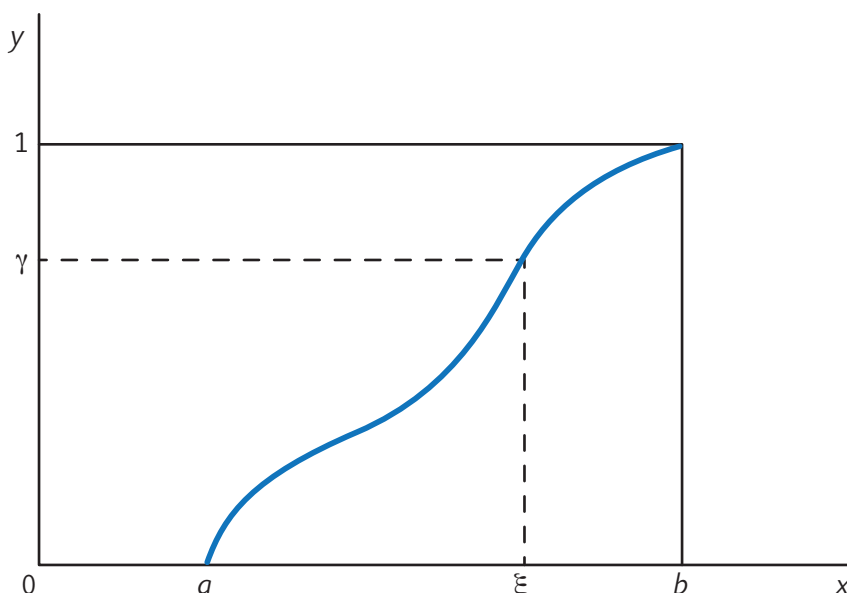
De las propiedades generales (15) y (16) de la densidad (véase *Leñitas Geométricas 4*, 5ª época, p. 5) resulta que

$$y(a) = 0, y(b) = 1$$

y que la derivada

$$y'(x) = p(x) > 0.$$

Por lo tanto, la función  $y(x)$  crece monótonamente del 0 al 1.



Debido a esto, toda recta  $y = \gamma$ , donde  $0 < \gamma < 1$ , corta el gráfico de  $y = y(x)$  en un punto único cuya abscisa se toma precisamente igual a  $\xi$ . Es decir, la ecuación (23) tiene siempre solución y esta solución es única.

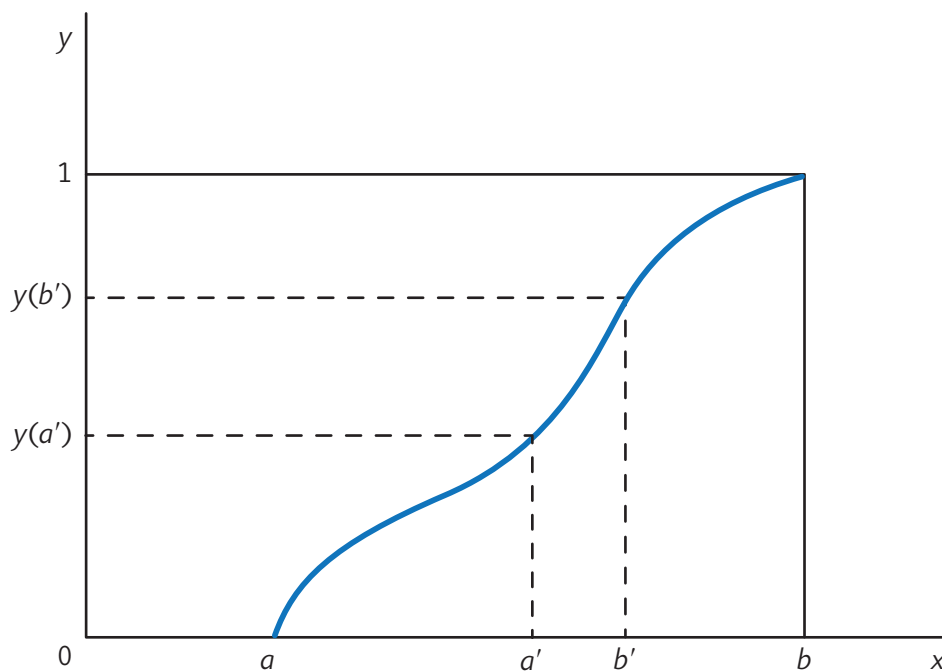
Tomemos ahora un intervalo arbitrario  $(a', b')$  contenido en  $(a, b)$ . A los puntos

$$a' < x < b'$$

en este intervalo les corresponden las ordenadas de la curva  $y = y(x)$  que satisfacen la desigualdad

$$y(a') < y < y(b').$$

Por eso, si  $\xi$  pertenece al intervalo  $a' < x < b'$ , resulta que  $\gamma$  pertenece al intervalo  $y(a') < y < y(b')$  y viceversa.



Luego,

$$P\{a' < \xi < b\} = P\{y(a') < \gamma < y(b')\}.$$

Puesto que  $\gamma$  está uniformemente distribuida en  $(0, 1)$ , tenemos

$$P\{y(a') < \gamma < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x)dx.$$

Es decir,

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x)dx;$$

pero esto significa precisamente que la variable aleatoria  $\xi$ , raíz de la ecuación (23), tiene la densidad de probabilidad  $p(x)$ .

**Ejemplo.** Se dice que la variable aleatoria  $\eta$  está uniformemente distribuida en el intervalo  $(a, b)$  si su densidad es constante en este intervalo:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \text{ para } a < x < b.$$

Para sortear los valores de  $\eta$  formamos la ecuación (23)

$$\int_a^{\eta} \frac{dz}{b-a} = \gamma.$$

La integral se calcula fácilmente y resulta

$$\frac{\eta - a}{b - a} = \gamma$$

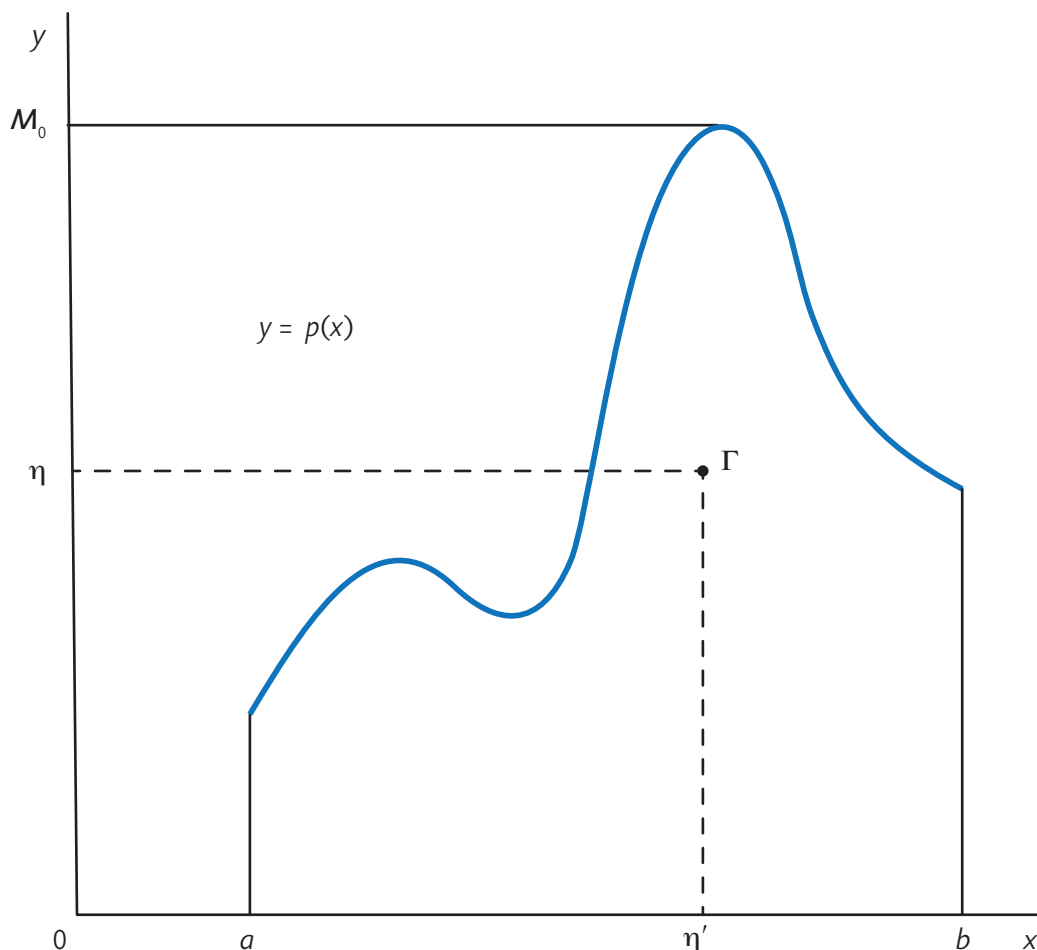
de donde obtenemos una expresión explícita para  $\eta$ :

$$\eta = a + (b - a)\gamma. \tag{24}$$

Otros ejemplos de aplicación de la fórmula (23) los veremos más adelante.

→ **3. Método de Von Neumann para el sorteo de una variable aleatoria continua.** Puede resultar que sea muy difícil resolver la ecuación (23) respecto de  $\xi$  si, por ejemplo, la integral de  $p(x)$  no se expresa en funciones elementales o si la densidad  $p(x)$  viene dada gráficamente.

Supongamos que la variable aleatoria está definida en un intervalo finito  $(a, b)$  y que su densidad está acotada:  $p(x) \leq M_0$



Los valores de  $\xi$  se pueden sortear de la siguiente manera.

1. Se escogen dos valores  $\gamma'$  y  $\gamma''$  de la variable aleatoria  $\gamma$  y se considera el punto aleatorio  $\Gamma(\eta', \eta'')$  con las coordenadas

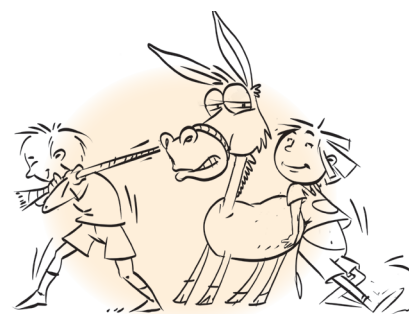
$$\eta' = a + \gamma(b - a) \quad \text{y} \quad \eta'' = \gamma'' M_0.$$

2. Si el punto  $\Gamma$  aparece por debajo de la curva  $y = p(x)$ , tomamos  $\xi = \eta'$ ; si el punto  $\Gamma$  aparece por encima de la curva  $y = p(x)$ , retiramos de la consideración el par  $(\gamma', \gamma'')$  y escogemos un par nuevo de valores  $(\gamma', \gamma'')$ . La argumentación de este método la daremos más adelante.

→ **4. Sobre el sorteo de variables normales.** Existe una gran variedad de procedimientos que se aplican para sortear distintas variables aleatorias. No nos detendremos en ello. Suelen emplearse solo si los métodos de los puntos 2 y 3 ya vistos resultan poco efectivos.

En particular, esto ocurre en el caso de la variable aleatoria normal  $\zeta$ , ya que la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \gamma$$



no admite solución explícita y el intervalo de los valores posibles de  $\zeta$  es infinito.

Tabla B. 88 valores normales

0,2005	1,1922	-0,0077	0,0348	1,0423	-1,8149	1,1803	0,0033
0,1609	-0,6690	-1,5893	0,5816	1,8818	0,7390	-0,2736	1,0828
0,5864	-0,9245	0,0904	1,5068	-1,1147	0,2776	0,1012	-1,3566
0,1425	-0,2863	1,2809	0,4043	0,6379	-0,4428	-2,3006	-0,6446
0,9516	-1,7708	2,8854	0,4686	1,4664	1,6852	-0,9690	-0,0831
-0,5863	0,8574	-0,5557	0,8115	-0,2676	-1,2496	-1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	-0,1032	0,5405	-0,6022	0,0093	0,2119	-1,4647
-0,4428	-0,5564	-0,5098	-1,1929	-0,0572	-0,5061	-0,1557	-1,2384
-0,3924	1,7981	0,6141	-1,3596	1,4943	-0,4406	-0,2033	-0,1316
0,8319	0,4270	-0,8888	0,4167	-0,8513	1,1054	1,2237	-0,7003
0,9780	-0,7679	0,8960	0,5154	-0,7165	0,8563	-1,1630	1,8800

Los valores normales limitan los valores de la variable aleatoria normal (gaussiana)  $\zeta$  con los parámetros  $a = 0$  y  $\sigma = 1$ .

La Tabla B anterior contiene valores (ya, sorteados) de la variable aleatoria normal  $\zeta$  con la esperanza matemática  $M\zeta = 0$  y la varianza  $D\zeta = 1$ . Es fácil demostrar que la variable aleatoria

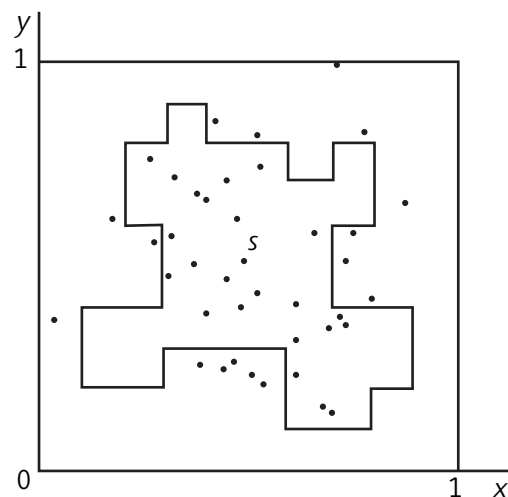
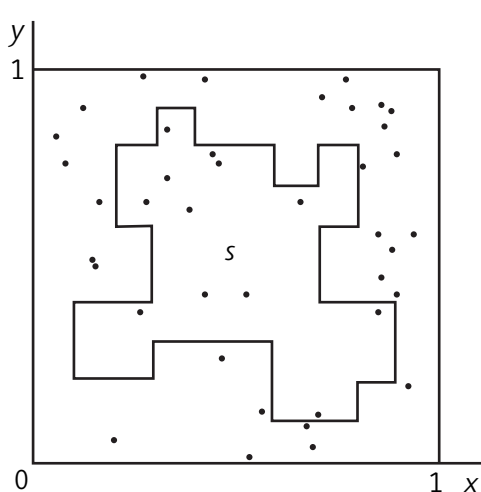
$$\zeta' = a + \sigma\zeta \quad (25)$$

también será normal; además, de (10) y (11) (véase *Leñitas Geométricas* 4, 5ª época, p. 3) se deduce que

$$M\zeta' = a \quad \text{y} \quad D\zeta' = \sigma^2.$$

Por consiguiente, la fórmula (25) permite, empleando la Tabla B, sortear valores de cualquier variable normal.

→ **5. Regreso al ejemplo del punto 2 del apartado 1** (véase *Leñitas Geométricas* 1, 5ª época, p. 7). Ahora podemos explicar cómo se han escogido los puntos aleatorios de las dos figuras.





En la figura de izquierda hemos construido los puntos con las coordenadas:

$$x = \gamma', \quad e \quad y = \gamma''.$$

Los valores  $\gamma'$  y  $\gamma''$  se han calculado sobre la base de los grupos de cinco cifras de la Tabla A:  $x_1 = 0,86515$ ,  $y_1 = 0,90795$ ;  $x_2 = 0,66155$ ,  $y_2 = 0,66434$ ; etc.

Se puede demostrar que, debido a que las abscisas y las ordenadas de nuestros puntos son independientes, la probabilidad de que uno de estos puntos aparezca en una región cualquiera interior del cuadrado es igual al área de esta región. En otras palabras, los puntos están uniformemente distribuidos en el cuadrado.

En la figura de la derecha hemos construido los puntos con las coordenadas

$$x = 0,5 + 0,2\zeta' \quad e \quad y = 0,5 + 0,2\zeta''$$

con la particularidad de que los valores  $\zeta'$  y  $\zeta''$  se toman de la Tabla B, uno tras otro:

$$x_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,2005; \quad y_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 1,1922;$$

$$x_2 = 0,5 + 0,2 \cdot (-0,0077).$$

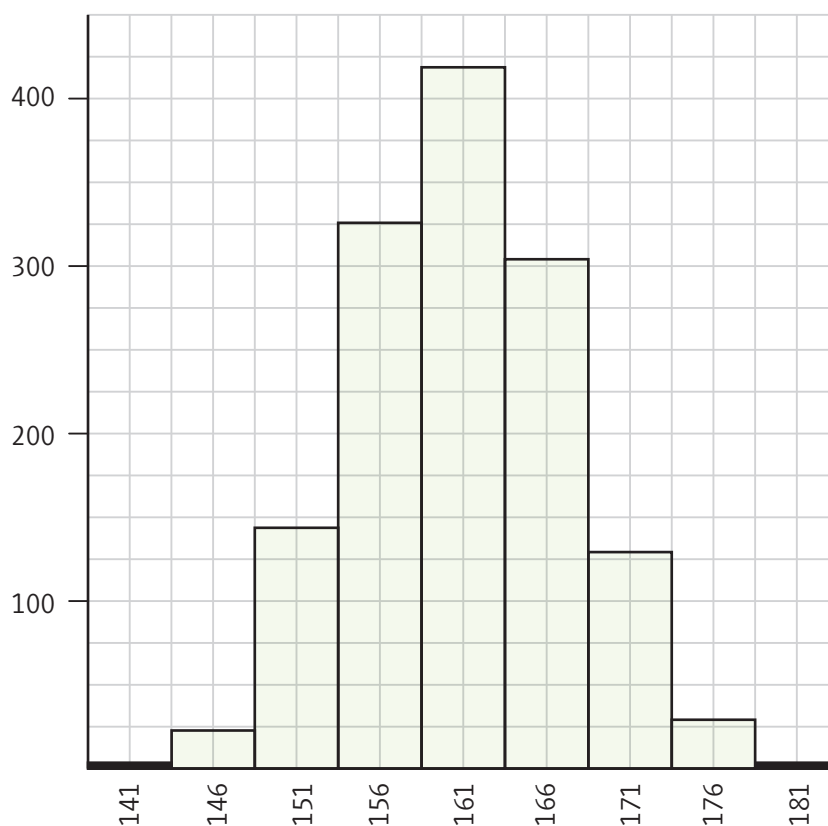
Un punto no se ha considerado, por quedar fuera del cuadrado.

De la fórmula (25) se deduce que las abscisas y las ordenadas de estos puntos representan variables aleatorias normales con la esperanza matemática  $a = 0,5$  y la varianza  $\sigma^2 = 0,04$ .

## MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA

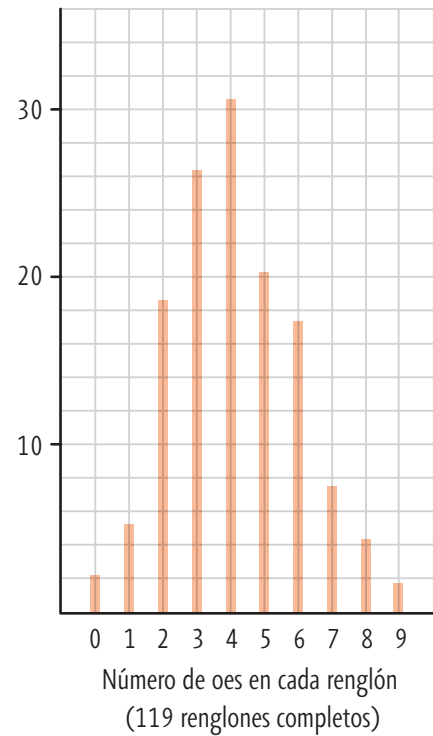
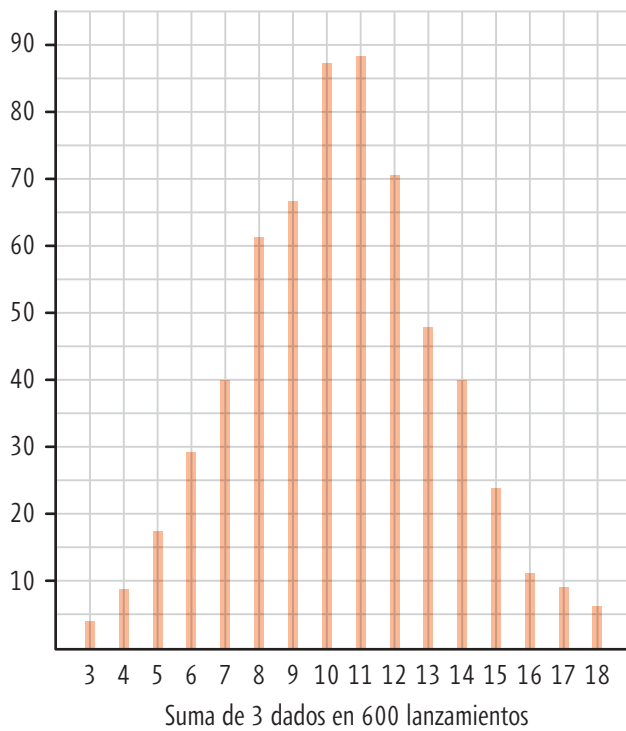
### La distribución normal

*Para observar, leer y experimentar*



La gráfica de arriba, que es un histograma con las estaturas de 1400 mujeres, tiene una forma muy corriente. Con frecuencia nos encontramos con distribuciones de este tipo, con pocos individuos en los extremos y un aumento paulatino hasta llegar a la parte central del recorrido, donde se encuentra la mayoría de ellos.

Este tipo de distribución aparece en las circunstancias más inesperadas. He aquí otros dos ejemplos:



Inspirándose en ellos, resolver alguno de los siguientes ejercicios.

- Contar el número de veces que aparece la letra e en cada renglón de un artículo, un libro o una revista. Tomar por lo menos 100 renglones completos (no los renglones cortos de una columna de periódico) y representar los resultados en un diagrama de barras.

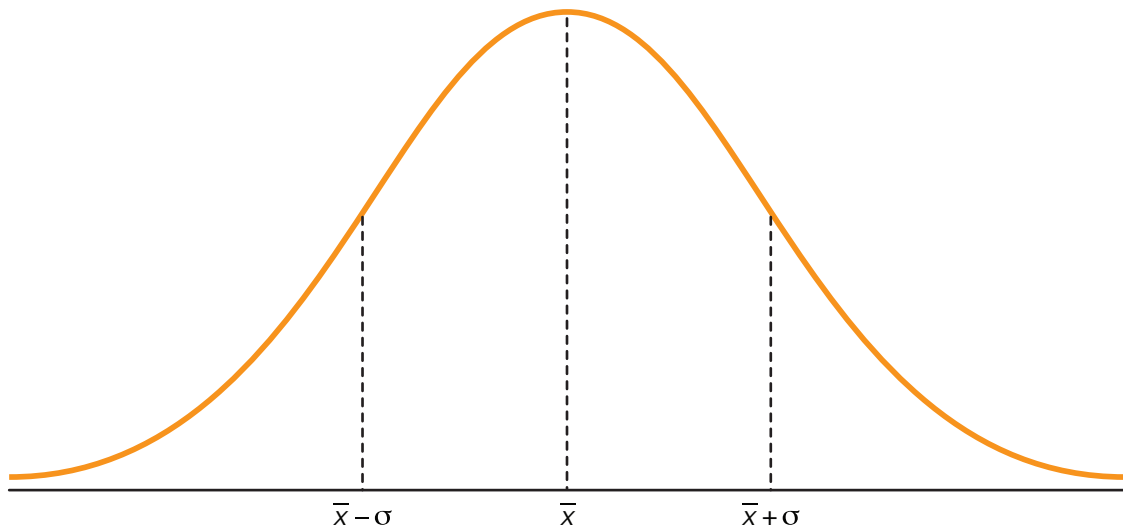


- Lanzar tres dados 200 veces y sumar cada vez las puntuaciones de los tres. Agrupar los resultados en una tabla de frecuencias y representarlos en un diagrama de barras.
- Lanzar 5 monedas 100 veces y anotar, cada vez, el número de caras obtenido (0, 1, 2, 3, 4 o 5). Hacer un diagrama de barras con los resultados.

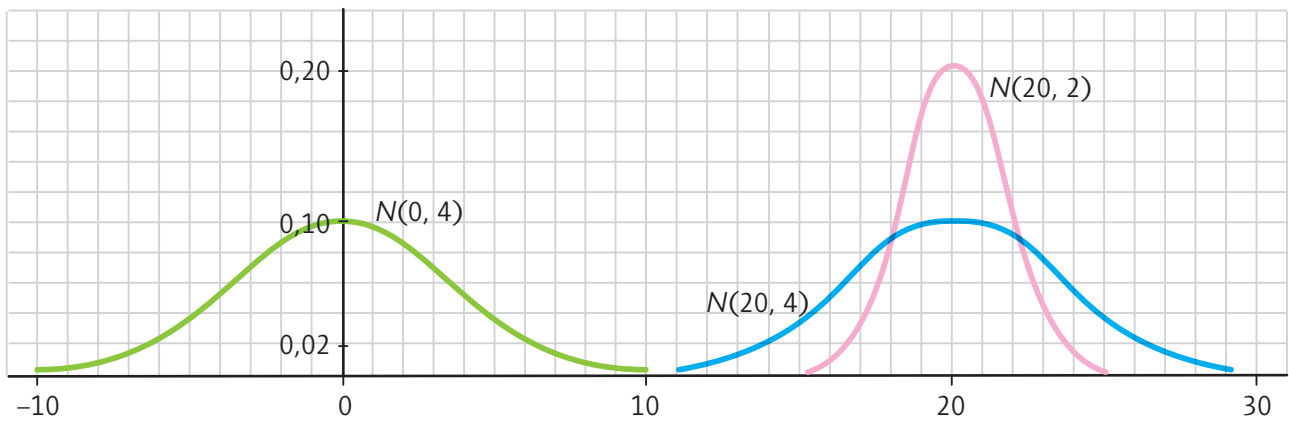
### La campana de Gauss

¿En qué situaciones se presenta la campana de Gauss? ¿A qué se debe que aparezca con tanta frecuencia?

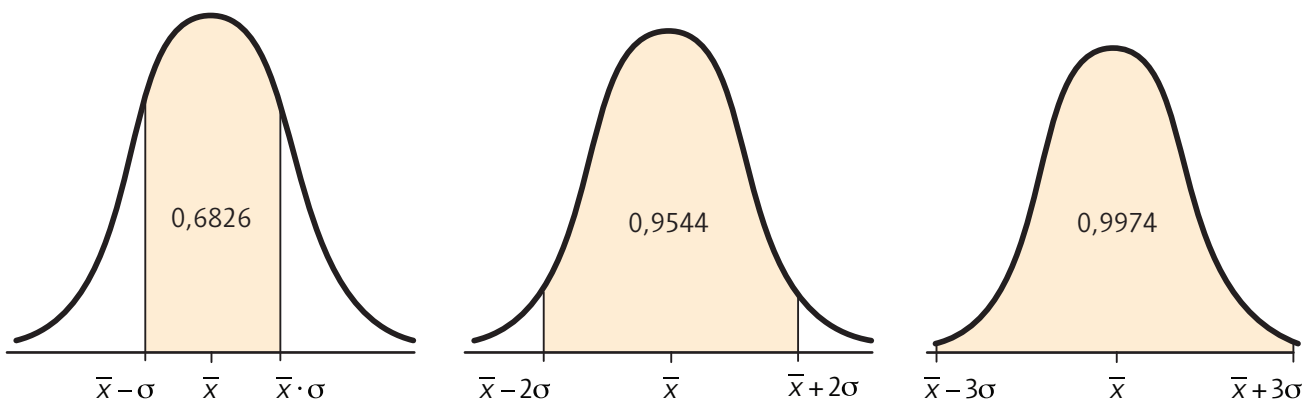
**Descripción.** La campana de Gauss, curva de Gauss o curva normal, es una función de probabilidad continua, simétrica, cuyo máximo coincide con la media,  $\bar{x}$ , y que tiene dos puntos de inflexión situados a ambos lados de la media, a una distancia  $\sigma$  de ella.



Para cada media,  $\bar{x}$ , y cada desviación típica,  $\sigma$ , hay una curva normal que se designa por  $N(\bar{x}, \sigma)$ . He aquí a continuación tres de ellas:



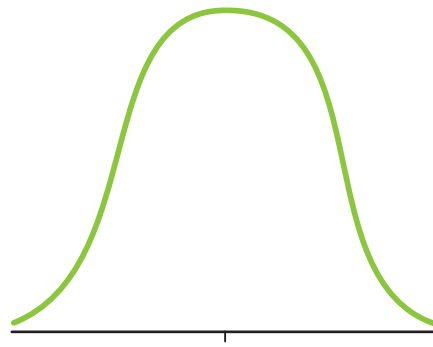
Por ser distribución de probabilidad, el área bajo una curva normal cualquiera es 1. Pero esta área se distribuye del siguiente modo:



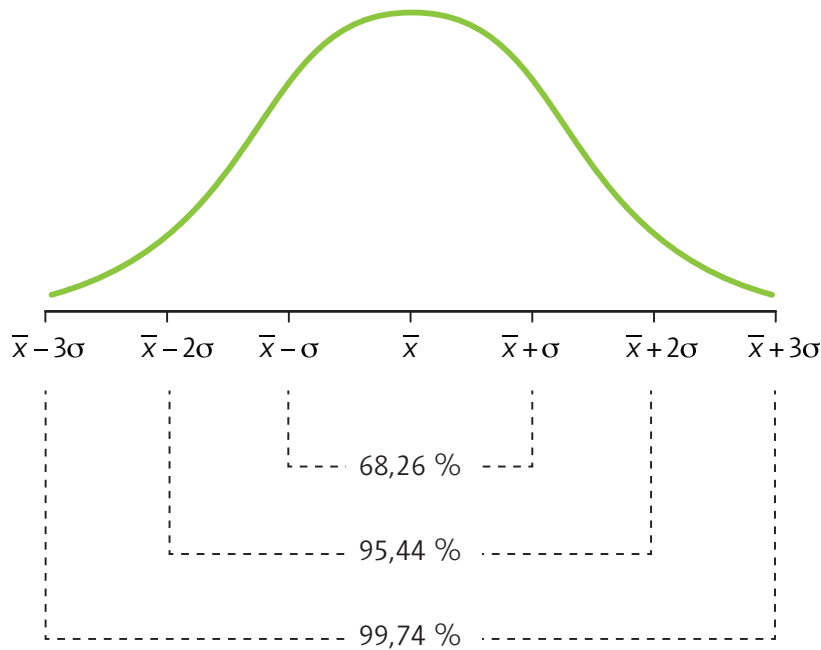
Carl Friedrich Gauss, estudiando los errores que se producen al medir reiteradamente una misma magnitud, probó que se distribuyera según una función de ecuación

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$

cuya gráfica, como vemos en la figura de abajo, es el perfil de una campana:



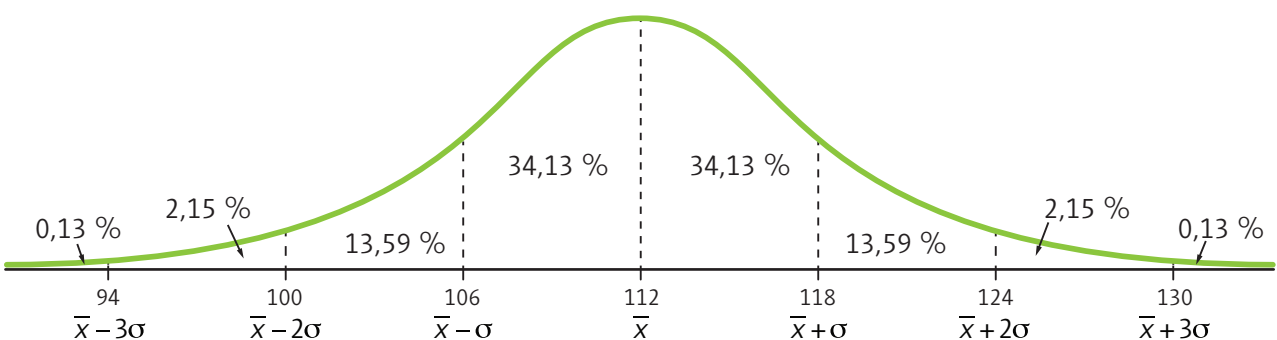
Esta, por su forma acampanada, es llamada *campana de Gauss*. A pesar del nombre, la curva, sin su ecuación, ya había sido descrita medio siglo antes por otro matemático, Abraham de Moivre, que llegó a ella estudiando algunos juegos de azar. La importancia de esta distribución y su gráfica asociada se debe a la enorme frecuencia con que aparece en todo tipo de situaciones, como lo advirtió Leonhard Euler en el proceso de fundamentación del análisis.



Esto significa que, por ejemplo, si el cociente intelectual (CI) de las personas de un cierto colectivo se distribuye según  $N(112,6)$ , entonces:

- el 68,26% de ellos tiene un CI de entre 106 y 118;
- el 95,44% de ellos tiene un CI de entre 100 y 124;
- el 99,74% de ellos tiene un CI de entre 94 y 130.

Afinando más, podemos decir que se distribuyen del siguiente modo:



## ¿Cuándo se presenta la curva normal?

Entre las muchas variables que se distribuyen normalmente podemos citar las que siguen.

- Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas) de una misma raza. Por ejemplo, tallas, pesos, envergaduras, etc.
- Caracteres fisiológicos. Por ejemplo, efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- Caracteres sociológicos. Por ejemplo, consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano.
- Caracteres psicológicos. Por ejemplo, cociente intelectual, grado de adaptación a un medio.
- Caracteres físicos. Por ejemplo, resistencia a la rotura de piezas.



Y, en general, cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

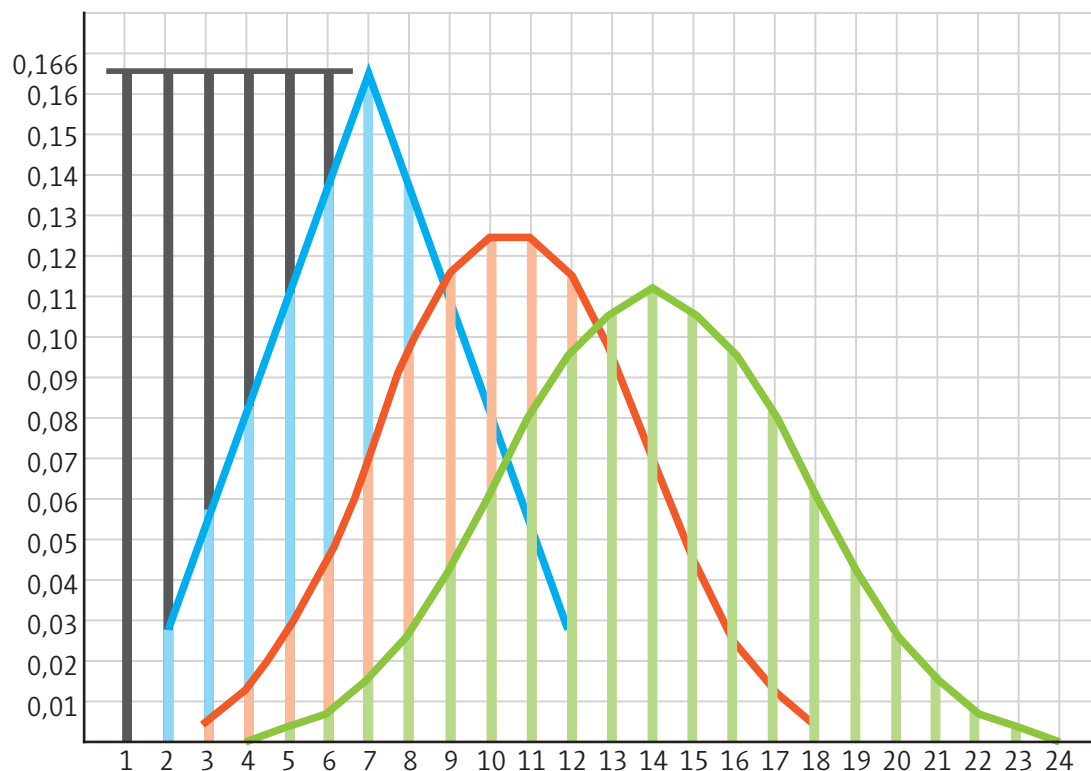
También hay muchas variables discretas que se distribuyen de forma muy parecida a la normal. Por ejemplo:

- Suma conseguida al lanzar cuatro dados.
- Número de caras obtenidas al lanzar diez monedas.
- Número de crías que tienen las ratas de una cierta raza en cada camada.
- Número de guisantes que tienen las vainas de una plantación.

La explicación de este hecho se encuentra en el teorema central del límite que se describe más adelante mediante algunos ejemplos, el cual corresponde al tema de distribución binomial.

### Un ejemplo

Si lanzamos uno, dos, tres o cuatro dados, la distribución de probabilidad de la suma de sus resultados es, respectivamente, la que se muestra en la figura de abajo.



Observemos cómo, al aumentar el número de dados, la gráfica que representa la suma de sus resultados es cada vez más parecida a la distribución normal.

- Las estaturas de 1 400 mujeres se distribuyen según la  $N(160,8; 6,4)$ . Calcular los valores  $\bar{x} - 3\sigma$ ,  $\bar{x} - 2\sigma$ ,  $\bar{x} - \sigma$ ,  $\bar{x} + \sigma$ ,  $\bar{x} + 2\sigma$  y  $\bar{x} + 3\sigma$ . Repartir a las 1 400 mujeres, aproximadamente, en esos intervalos.
  - $\bar{x} - 3\sigma = 141,6$ . Menores que 141,6 representan el 0,13% de 1 400 = 2 mujeres.
  - $\bar{x} - 2\sigma = 148$ . Entre 141,6 y 148 hay el 2,15% de 1 400 = 30 mujeres. Continuar haciendo el reparto en los intervalos  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} - \sigma)$ ,  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x})$ , etc.
- En un estanque de una piscifactoría se ha tomado una muestra de 3 000 truchas y se ha medido, en cm, su longitud, resultando que se distribuyen según la  $N(26, 7)$ .

Calcular, de forma análoga a como lo hemos hecho en el ejercicio anterior, los valores  $\bar{x} - 3\sigma$ ,  $\bar{x} - 2\sigma$ ,  $\bar{x} - \sigma$ , ...; establecer los intervalos de longitud correspondientes y repartir las 3 000 truchas de la muestra en esos intervalos.

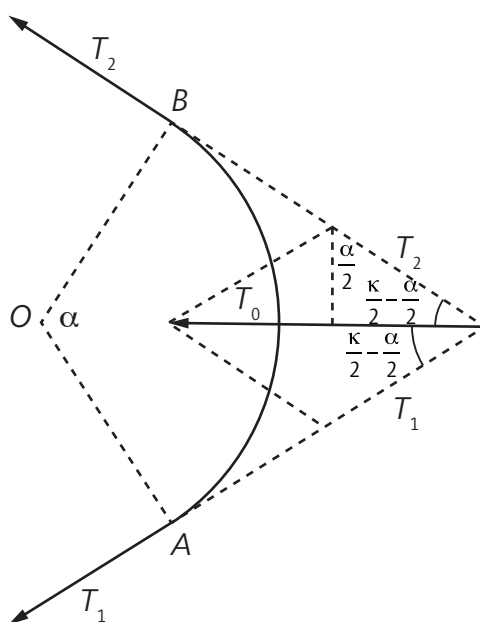


## Problema isoperimétrico

### 1. Curvatura y curvatura geodésica

→ **1. Curvaturas.** La magnitud  $\frac{1}{R}$  inversa al radio  $R$  de la circunferencia se llama curvatura de la circunferencia. Este concepto puede ser ilustrado mecánicamente con ayuda de un hilo estirado.

Sea dado un arco  $\widehat{AB}$  de la circunferencia de radio  $R$  con el centro  $O$ . Supondremos que este arco se ha formado por un hilo elástico cuyos extremos soportan las fuerzas de tensión  $T_1$  y  $T_2$ , iguales entre sí y dirigidas por las tangentes, como se muestra en la figura siguiente.



La resultante  $T_0$  de las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$  está dirigida por la bisectriz del ángulo formado por las direcciones de las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$ , es decir, según el radio que divide el arco  $\widehat{AB}$  en dos partes iguales. Si este arco se mide en radianes expresados por el número  $\alpha$ , su longitud es igual a  $R\alpha$  y la cuerda que une los extremos del arco tiene la longitud  $2R \sin \frac{\alpha}{2}$ . Como un arco muy pequeño puede tomarse aproximadamente por la cuerda, deducimos de aquí que  $2R \sin \frac{\alpha}{2} \approx R\alpha$ . De este modo, cuando los valores del ángulo  $\alpha$  son muy pequeños, tenemos  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ , es decir, un ángulo pequeño expresado en radianes es muy próximo a su seno.

**Observación.** Para mayor precisión, si la relación de un ángulo a su seno tiende a 1, entonces el ángulo tiende a cero. La demostración de este teorema puede encontrarse en cualquier curso de cálculo infinitesimal y también en los manuales de trigonometría. Para hacer rigurosos nuestros razonamientos ulteriores, conviene introducir la noción de los infinitésimos equivalentes.

Se llama infinitésimo a una magnitud variable que tiende a cero. Supongamos que simultáneamente con la magnitud  $\alpha$  tiende a cero la magnitud  $\beta$  (por ejemplo, junto con la longitud de un arco tiende a cero también la longitud de la cuerda que une los extremos del arco).

Si, en este caso, la relación  $\frac{\beta}{\alpha}$  de dos infinitésimos  $\beta$  y  $\alpha$  es también un infinitésimo, entonces  $\beta$  se denomina infinitésimo del orden superior en comparación con  $\alpha$ . Por ejemplo,  $\alpha^2$  es un infinitésimo del orden superior en comparación con  $\alpha$ .

Dos infinitésimos  $\alpha$  y  $\gamma$  se llaman equivalentes si su relación tiende a 1:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \tag{1}$$

Por ejemplo, una cuerda que une los extremos del arco es equivalente al propio arco.

La diferencia entre dos infinitésimos  $\gamma$  y  $\alpha$  es un infinitésimo del orden superior en comparación con ellos mismos. En efecto, de (1) se infiere:

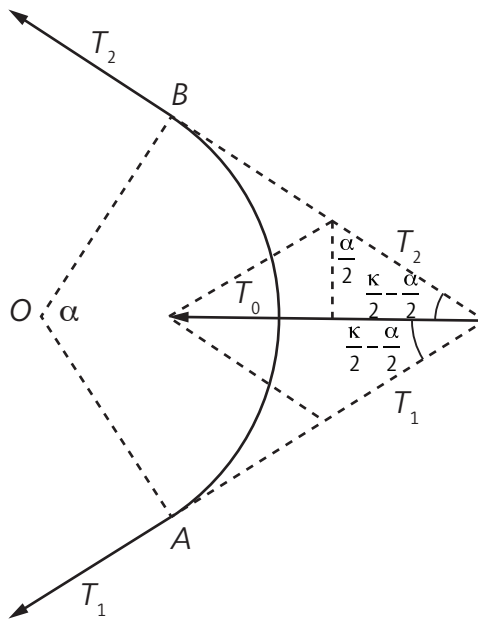


$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} = 0. \quad (2)$$

Por eso, un error que cometemos al sustituir un infinitésimo por su equivalente es un infinitésimo del orden superior. Por ejemplo, la diferencia en longitudes de un arco infinitesimal y su cuerda es un infinitésimo del orden superior. Un error que cometemos igualando un arco y su cuerda es un infinitésimo del orden superior en comparación con las magnitudes que se parangonan.

Para expresar la equivalencia de las magnitudes  $\alpha$  y  $\gamma$  se usa la notación  $\alpha \approx \gamma$ . Un ejemplo de las magnitudes equivalentes:  $\sin \alpha \approx \alpha$  cuando  $\alpha$  es un infinitésimo (es la anotación simbólica de la igualdad  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ ).

El ángulo  $\widehat{AOB}$  de la figura, medido en radianes, lo designamos mediante  $\alpha$ .



En este caso el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$  es igual a  $\pi - \alpha$ , mientras que el ángulo formado por sus direcciones y la dirección de la resultante  $T_0$  es igual a  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . En el dibujo anterior se ve que  $T_0 = 2T \sin \frac{\alpha}{2}$ , donde  $T$  es la magnitud común de las fuerzas  $T_1$  y  $T_2$ .

Si designamos la longitud del arco  $\widehat{AB}$  por medio de  $s$ , su cantidad  $\alpha$  se expresará de este modo en radianes:  $\alpha = \frac{s}{R}$ .

Por consiguiente,

$$T_0 = 2T \sin \frac{s}{2R}.$$

Si el arco  $s$  es muy pequeño, entonces  $\sin \frac{s}{2R} \approx \frac{s}{2R}$  y  $T_0 = T \frac{s}{R}$ .

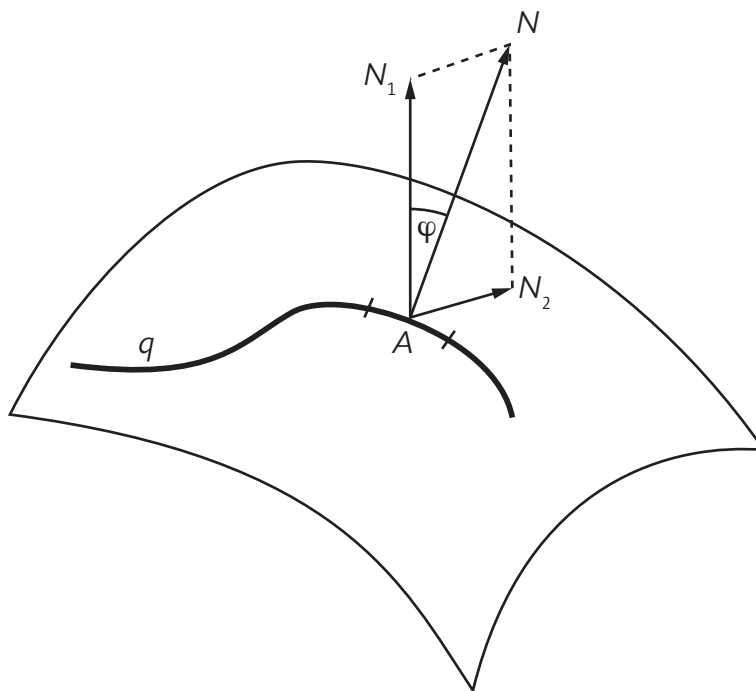
Examinemos ahora el caso de una curva arbitraria  $q$ . Un arco muy pequeño de longitud  $s$  de esta curva, que contiene el punto  $A$ , puede considerarse como el arco de una circunferencia (cuyo radio  $R$  es el radio de curvatura de la curva en el punto  $A$ ).

Supongamos que  $q$  es un hilo elástico, en cuyos puntos actúa la tensión igual a  $T$ . Entonces, sobre nuestro arco actúan dos fuerzas de tensión (aplicadas en sus extremos), cuya resultante está dirigida, en virtud de lo expuesto arriba, por el radio de curvatura y es igual (equivalente, para precisar) a  $T \frac{s}{R}$ .

La magnitud  $\frac{1}{R}$  es curvatura de nuestra línea en el punto  $A$ . Así pues, sobre un arco pequeño  $\widehat{AB}$  actúa, en la dirección de la normal principal, una fuerza proporcional a la longitud del arco  $s$  y a la curvatura  $\frac{1}{R}$ .



- **2. Curvatura geodésica.** Consideraremos un arco pequeño de longitud de la curva  $q$  que se dispone en una superficie y sea  $A$ , el centro de este arco.



Designemos con  $\frac{1}{R}$  la curvatura de nuestra línea en el punto  $A$ , y con  $\varphi$  el ángulo formado por la normal principal  $\overline{AN}$  de la curva  $q$  en el punto  $A$  y la normal  $\overline{AN}_1$  a la superficie. En el punto  $A$  actúa sobre nuestro arco una fuerza dirigida según la normal principal a la curva  $q$  en el punto  $A$ : la magnitud de esta fuerza es  $T\frac{s}{R}$ . Descompongamos esta fuerza en dos fuerzas: una que actúa por la normal a la superficie (esta fuerza se suprime por la reacción de la superficie) y otra, que es tangente a la superficie. Esta segunda fuerza hará deslizar nuestro arco por la superficie. La fuerza es igual (equivalente, para mayor precisión) a:

$$\frac{T s \operatorname{sen} \varphi}{R} = T s \Gamma.$$

La magnitud  $\Gamma = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{R}$  se denomina curvatura geodésica de la curva  $q$  en el punto  $A$ . Ella determina la intensidad con la cual sobre el arco de un hilo estirado actúa en el punto  $A$  la fuerza que hace deslizar este arco por la superficie; la fuerza que actúa sobre el arco pequeño de la curva es proporcional a la longitud del arco  $s$  y a la curvatura geodésica  $\Gamma$ .

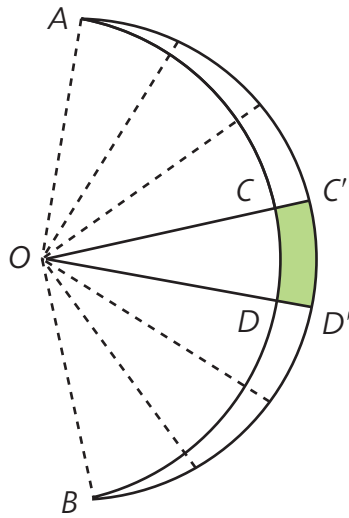
Para una línea geodésica en la que  $\varphi = 0$ , la curvatura geodésica es nula. A lo largo de la línea geodésica no actúa la fuerza que haría deslizar el arco de la línea por la superficie (el hilo tendido a lo largo de una línea geodésica se encuentra equilibrado).

## 2. Problema isoperimétrico

- **1. Medición de la longitud del arco de una circunferencia.** Sean dados una circunferencia  $q$  de radio  $R$  y un arco  $\widehat{AB}$  de dicha circunferencia. Sea  $\widetilde{AB}$  un arco próximo al arco  $\widehat{AB}$ . Hablando de la proximidad de un arco nuevo al arco de la circunferencia, suponemos que los puntos del arco nuevo son próximos a los puntos del arco dado y la curvatura del arco nuevo es próxima a la del arco dado, siendo sus extremos los mismos puntos  $A$  y  $B$ .



Designemos con  $l$  a la longitud del arco  $\widehat{AB}$ , y con  $l + \Delta l$ , la longitud del arco  $\widetilde{AB}$ . Si transformamos el arco  $\widehat{AB}$  de modo tal que pase en el arco  $\widetilde{AB}$ , su longitud  $l$  aumentará en  $T\Delta l$ , y consecuentemente, su energía potencial aumentará en  $T\Delta l$ . Transformaremos  $\widehat{AB}$  en  $\widetilde{AB}$  de una manera tal que todo punto  $C$  del primero se desplace por el radio (véase la figura siguiente).



Supongamos que un arco muy pequeño  $\widehat{CD}$  (una parte de  $\widehat{AB}$ ) haya pasado a un arco, también pequeño,  $\widehat{C'D'}$  (una parte de  $\widehat{AB}$ ). Todo punto de este arco se desplazó a un segmento  $\overline{CC'}$  (por ser muy pequeño  $\widehat{CD}$ , consideramos iguales aproximadamente los desplazamientos de sus puntos). Una pequeña "plazoleta"  $CC'D'D$ , limitada por nuestros arcos y los segmentos  $\overline{CC'}$  y  $\overline{DD'}$ , podemos considerarla, aproximadamente, como un rectángulo, con la particularidad de que, si  $h$  es la longitud del arco pequeño  $\widehat{CD}$ , entonces el área de  $CC'D'D$  es igual aproximadamente a  $h \cdot \overline{CC'}$ :

$$\text{área } CC'D'D \approx h \cdot \overline{CC'}. \quad (1)$$

Observemos que sobre el arco  $\widehat{CD}$  actúa una fuerza dirigida por el radio e igual a  $\frac{Th}{R}$ , donde  $R$  es el radio de nuestra circunferencia. El trabajo que realizamos despinzando el arco  $\widehat{CD}$  hasta hacerlo coincidir con  $\widehat{C'D'}$ , es igual a la fuerza  $\frac{Th}{R}$ , multiplicado por el camino recorrido  $\overline{CC'}$ , es decir, a  $\frac{Th}{R} \overline{CC'}$  o

$$\frac{Th}{R} \overline{CC'} = \frac{T}{R} (\text{área } CC'D'D). \quad (2)$$

De este modo, el trabajo que se necesita para desplazar un arco pequeño  $\widehat{CD}$  a una nueva y próxima posición  $\widehat{C'D'}$  es igual (equivalente, con mayor precisión) a  $\frac{T}{R}$ , multiplicada por el área  $CC'D'D$  que cubre este arco durante su desplazamiento.

Designemos con  $\Delta F$  el área encerrada entre los arcos  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{A'B'}$ . Dividiremos esta área en plazoletas pequeñas (análogas a la plazoleta  $CC'D'D$ ) mediante los radios que tienen por origen el centro  $O$ .

En este procedimiento, también el arco  $\widehat{AB}$  se dividirá en arcos pequeños. Cada arco  $\widehat{CD}$  cubrirá en su desplazamiento una plazoleta correspondiente  $CC'D'D$  (encerrada entre este arco, el arco  $\widehat{C'D'}$  y los segmentos de los radios  $\overline{CC'}$  y  $\overline{DD'}$ ).

El trabajo que se necesita realizar en este desplazamiento es igual a  $\frac{T}{R}$ , multiplicada por el área descrita por este arco. El trabajo total que se realiza en el desplazamiento de todo el arco  $\widehat{AB}$  hacia la posición  $\widehat{A'B'}$  es igual a la suma de estos trabajos, es decir,  $\frac{T}{R}$  multiplicada por la suma de estas plazoletas pequeñas, que se expresa por  $\frac{T}{R} \Delta F$ , donde  $\Delta F$  es el área cubierta por el arco  $\widehat{AB}$  en su desplazamiento.

Pero el trabajo realizado equivale al incremento de la energía potencial  $\Delta V$  durante la transformación del arco  $\widehat{AB}$  en el arco  $\widehat{A'B'}$ :

$$\Delta V \approx \frac{T}{R} \Delta F. \quad (3)$$

Por otra parte, de lo visto anteriormente se deduce:

$$\Delta V = T \Delta l, \quad (4)$$

donde  $\Delta l$  es el incremento de la longitud.

Al comparar las expresiones (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{T}{R} \Delta F \approx T \Delta l \quad \text{o}$$

$$\Delta l = \frac{1}{R} \Delta F. \quad (5)$$

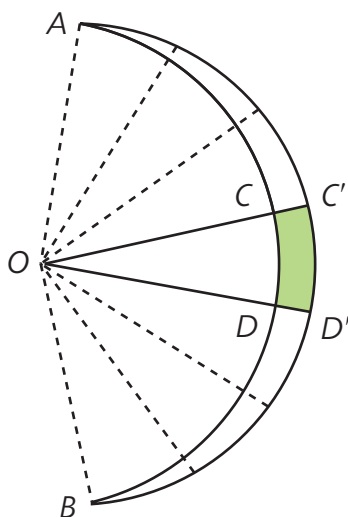
El incremento  $\Delta l$  en la longitud del arco  $\widehat{AB}$  es igual (equivalente, para más precisión) a la curvatura  $\frac{1}{R}$ , multiplicada por el área encerrada entre los arcos  $\widehat{AB}$  y  $\widehat{A'B'}$ . Todas las igualdades las realizaremos salvo un infinitésimo del orden superior en comparación con  $\Delta l$ .

→ **2. Variación de la longitud del arco una curva arbitraria.** Si en lugar de una circunferencia tomamos una curva arbitraria, el arco pequeño  $\widehat{AB}$  de esta última puede considerarse como un arco de la circunferencia de radio  $R$  ( $R$  es el radio de curvatura) y la fórmula (5) queda válida si por  $\frac{1}{R}$  se entiende la curvatura de la curva en un punto medio del arco  $\widehat{AB}$ .

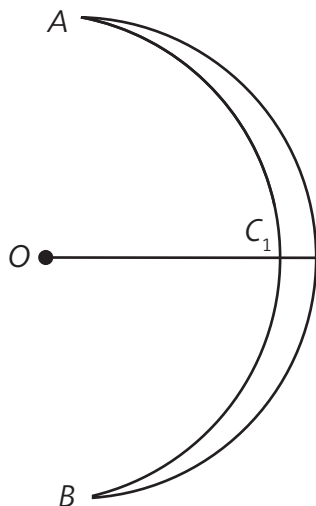
Un fenómeno sumamente análogo tiene lugar para las curvas dispuestas en una superficie, en vez de la curvatura, figura por doquier la curvatura geodésica. La fórmula (5) tomará la forma:

$$\Delta l = \Gamma \Delta F \quad (6)$$

donde  $\Gamma$  es la curvatura geodésica,  $\Delta l$  es el incremento de longitud del arco de la curva, al cambiarlo por un arco próximo en la misma superficie, y  $\Delta F$  es el área dispuesta entre el arco original y el nuevo.



En la figura de arriba hemos señalado el área  $\Delta F$  coloreada, que se halla fuera del círculo cuyo arco es  $\widehat{AB}$ , mientras que en la figura de abajo el área está dentro del círculo. En este último caso vamos a considerar el área  $\Delta F$  negativa. El incremento  $\Delta l$  de la longitud del arco es también negativo (puesto que aquí no se trata de un alargamiento sino de la reducción del arco).



→ 3. **Problema isoperimétrico.** Consideraremos el problema siguiente. **Hállese entre todas las curvas cerradas que limitan el área de un valor dado  $F$  aquella curva que tiene una longitud mínima.**

Suponemos que tal curva existe. Demostremos que es una circunferencia.

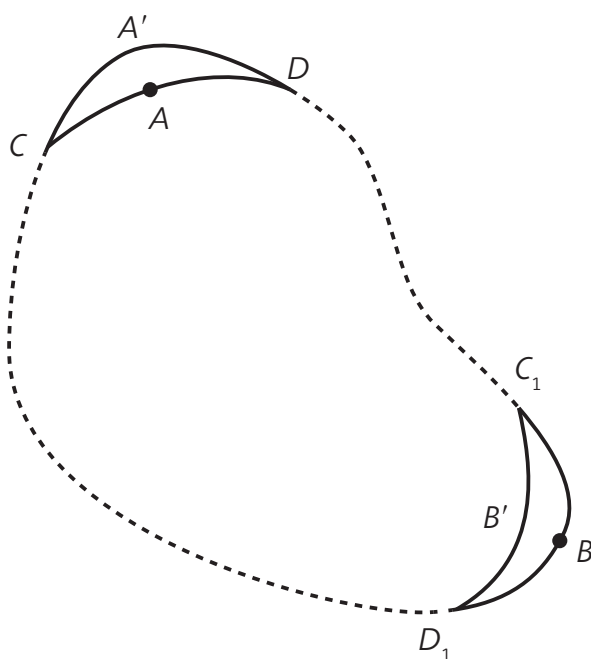
**Observemos** que una curva de curvatura constante (es decir, una curva que en todos los puntos tiene igual curvatura  $\frac{1}{R}$ ) es la circunferencia.

La demostración que sigue no pretende ser muy rígida. El arco muy pequeño de una curva de curvatura constante puede considerarse como arco de una circunferencia de radio  $R$ . Convengamos en considerar toda la curva como curva compuesta de un gran número de tales arcos pequeños con la particularidad de que dos arcos vecinos se superponen parcialmente. Dos arcos pequeños de la circunferencia de un mismo radio que se superponen parcialmente forman un arco nuevo del mismo radio. De este modo, cada par de arcos pequeños contiguos en los cuales está dividida nuestra curva forma el arco de una circunferencia de radio  $R$ .

Continuando estos razonamientos nos convenceremos de que cada 3, 4, 5, etc., arcos pequeños sucesivos forman el arco de una circunferencia de radio  $R$  y, por consiguiente, toda la curva forma el arco de la circunferencia de radio  $R$ . Si tenemos una curva cerrada de curvatura constante  $R$ , ella es sencillamente una circunferencia de radio  $R$ .

Sea  $q$  una curva cerrada cuya longitud es la menor de todas las curvas que limitan el área dada  $F$ . Suponemos que esta curva no es una circunferencia, es decir, su curvatura no es igual en todos los puntos.

Suponemos, por ejemplo, que en los puntos  $A$  y  $B$  de esta curva (véase la figura siguiente), la curvatura es distinta y constituye, respectivamente,



$$\frac{1}{R_1} \text{ y } \frac{1}{R_2}$$

donde

$$R_1 \neq R_2.$$

Para concretar, pongamos

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}$$

Examinemos dos arcos pequeños  $\widehat{CD}$  y  $\widehat{C_1D_1}$  de nuestra curva  $q$ , que contienen los puntos  $A$  y  $B$ . Sustituimos el arco  $\widehat{CD}$  por el arco próximo  $\widehat{CA'D}$ , y el arco  $\widehat{C_1D_1}$  por el arco próximo  $\widehat{C_1B'D_1}$ .

Designemos con  $\Delta F_1$  el área limitada por  $\widehat{CD}$  y  $\widehat{CA'D}$ , y con  $\Delta F_2$  el área limitada por  $\widehat{C_1D_1}$  y  $\widehat{C_1B'D_1}$ . En virtud de la fórmula (5), como resultado de la sustitución del arco  $\widehat{CD}$  por el arco  $\widehat{CA'D}$ , la longitud de la curva  $q$  adquiere un incremento, igual (equivalente, con mayor precisión) a  $\frac{1}{R_1}\Delta F_1$ .

La longitud de la curva  $q$  obtendrá también el incremento igual a  $\frac{1}{R_2}\Delta F_2$ , como resultado de la sustitución del arco  $\widehat{C_1D_1}$  por el arco  $\widehat{C_1B'D_1}$ . El incremento total del área limitada por  $q$  es  $\Delta F_1 + \Delta F_2$ , y el incremento de la longitud es igual (equivalente) a

$$\frac{1}{R_1}\Delta F_1 + \frac{1}{R_2}\Delta F_2.$$

Elijamos ahora los arcos  $\widehat{CA'D}$  y  $\widehat{C_1B'D_1}$  de modo tal que  $\Delta F_1$  y  $\Delta F_2$  sean iguales en valor absoluto y tengan signos opuestos, con la particularidad de que  $\Delta F_1 > 0$ , y  $\Delta F_2 = -\Delta F_1 < 0$ . En este caso el incremento del área  $\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0$ , es decir, el área queda invariable al cambiarse la curva  $q$ . En cambio, el incremento de la longitud  $q$  es igual (equivalente, para mayor precisión) a

$$\Delta F_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

y como

$$\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}$$

entonces

$$\Delta F_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0.$$

Así pues, el incremento de la longitud de  $q$  es negativo. La curva  $q$  pasó a la curva  $q_1$ , de menor longitud, que limita la misma área. Esto significa que  $q$  no es una curva de menor longitud entre las curvas que limitan el área dada.

De aquí viene la conclusión: la curva de una longitud mínima entre aquellas curvas que limitan el área dada es una circunferencia.

→ **4. Problema isoperimétrico en una superficie.** Los problemas análogos pueden considerarse también en una superficie; el papel de la curvatura lo desempeña siempre la curvatura geodésica  $\Gamma = \frac{\text{sen } \varphi}{R}$ .

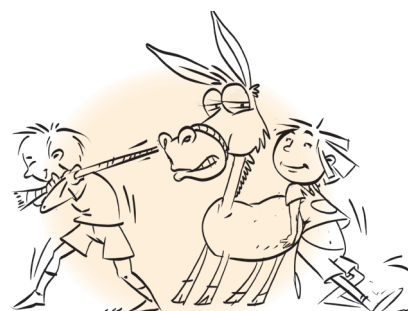
Por ejemplo, si un arco menor  $\widehat{CD}$  de la curva  $q$ , cuya curvatura geodésica  $\Gamma = \frac{\text{sen } \varphi}{R}$  es sustituida por un arco próximo  $\widehat{CA'D}$ , siendo el área encerrada entre  $\widehat{CD}$  y  $\widehat{CA'D}$  igual a  $\Delta F$ , el incremento en longitud  $\Delta l$  que adquiere la curva, al sustituirse  $\widehat{CD}$  por el arco  $\widehat{CA'D}$ , tendrá la forma:

$$\Delta l = \Delta F \frac{\text{sen } \varphi}{R} = \Gamma \Delta F.$$

Repetiendo la demostración del teorema anterior en la que la curvatura siempre se reemplaza por la curvatura geodésica, obtendremos el teorema siguiente.

**Teorema.** Entre todas las curvas cerradas en una superficie que limitan el área dada, a la menor longitud tiende la curva de la curvatura geodésica constante (en la superficie de una bola estas líneas están representadas por los círculos mayores y menores).

**Observación.** Al igual que en un plano, en la superficie de una bola, una curva de la curvatura geodésica constante es la circunferencia geodésica. En otras superficies, las curvas de curvatura geodésica constante no son, en general, circunferencias geodésicas.



### 3. Principio de Fermat

A los problemas examinados anteriormente les son muy próximos los de la óptica geométrica relacionados con el así llamado principio de Fermat.

Examinemos un medio óptico plano, en cada punto  $A(x, y)$  del cual está determinada la velocidad de la luz  $v = v(x, y) = v(A)$ . El medio se llama homogéneo si la velocidad de la luz es la misma en todos los puntos del medio. El tiempo  $T(q)$  durante el cual es recorrida la curva  $q$  a la velocidad de la luz se denomina longitud óptica de la curva  $q$ .

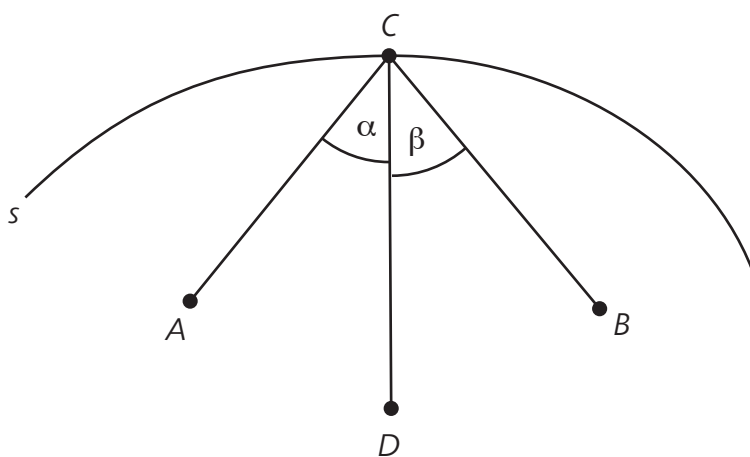
En un medio óptico homogéneo en el cual la velocidad de la luz es  $v$ , la longitud óptica  $T(q)$  de la curva  $q$  es proporcional a la longitud común  $l(q)$  de esta y es igual a

$$T(q) = \frac{1}{v} l(q).$$

→ **1. Principio de Fermat.** En un medio óptico, el trayecto de la luz del punto  $A$  al punto  $B$  es una línea de longitud óptica mínima entre todas las líneas que unen  $A$  y  $B$ .

De aquí proviene que en un medio óptico homogéneo la luz se propaga por líneas rectas.

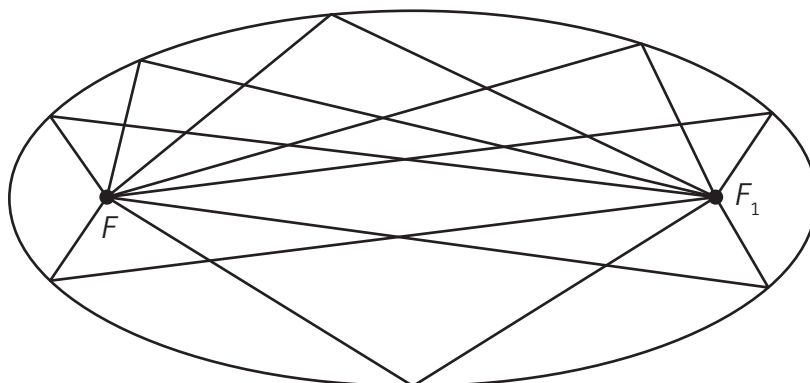
→ **2. Ley de reflexión.** En un medio óptico homogéneo está dada la curva  $s$



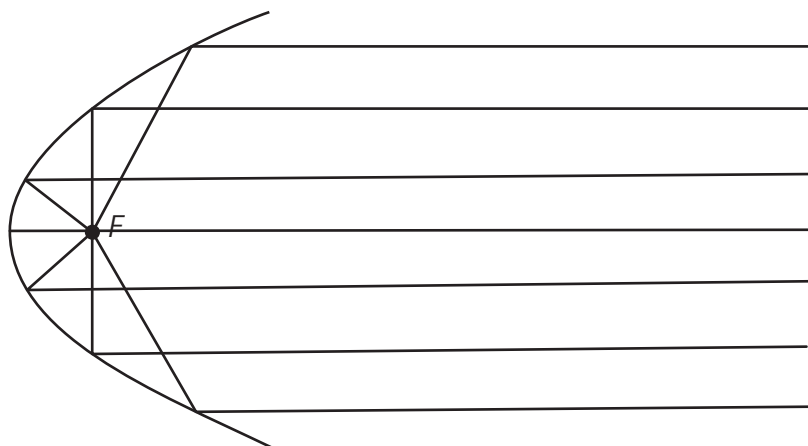
que refleja los rayos luminosos (un espejo). Es necesario hallar la línea  $q_0$  del recorrido por el cual la luz va del punto  $A$  al punto  $B$ , reflejándose en la curva  $s$ . La línea  $q_0$  es la más corta de todas las líneas  $q$  que unen  $A$  y  $B$  y se reflejan en  $s$ . Esto significa que esta línea es la línea quebrada  $ACB$  con vértice  $C$  en la línea  $s$ , con la particularidad de que la bisectriz  $\overline{CD}$  del ángulo  $ACB$  es normal a la curva  $s$  en el punto  $C$ .

Los ángulos  $\alpha = ACD$  y  $\beta = DCB$  que los rayos  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  forman con la normal  $\overline{CD}$  se llaman *ángulo de incidencia* y *ángulo de reflexión*, respectivamente. Llegamos así a la ley de reflexión de la luz de Descartes: **el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.**

De las propiedades de las normales a una elipse y una parábola obtenidas anteriormente, se deduce que, si la curva  $s$  tiene forma de una elipse, los rayos que salen del foco  $F$  de esta elipse se reúnen, al ser reflejados, en otro foco  $F_1$  (véase la figura siguiente):

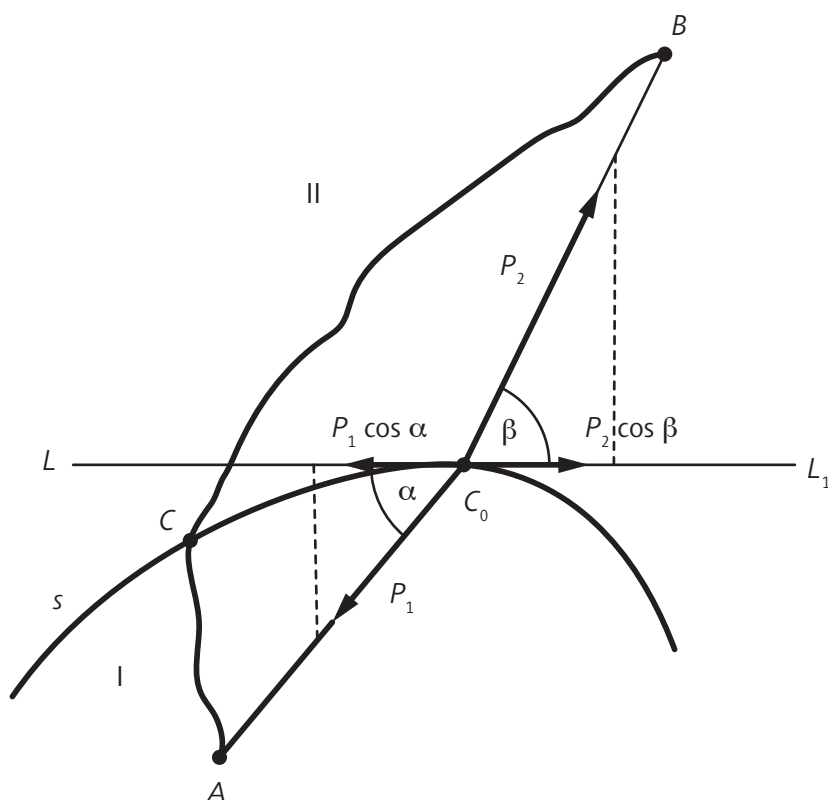


Si la curva  $s$  tiene forma de parábola, los rayos que salen del foco de la parábola y se reflejan de ella se transforman en los rayos paralelos al eje de la parábola, y viceversa, los rayos paralelos al eje de la parábola se reúnen, al ser reflejados, en el foco de la parábola.



En esta propiedad de la parábola está basado el empleo de los espejos en forma de paraboloides (superficie engendrada por la revolución de una parábola alrededor de un eje) en los proyectores, telescopios de reflexión (reflectores), etc.

→ **3. Ley de refracción.** Consideraremos dos medios ópticos homogéneos I y II, separados por una curva  $s$ , tal como se representa en la figura de abajo:



La velocidad de la luz es  $v_1$  en el medio I y  $v_2$  en el medio II. Hállese el trayecto de la luz  $q_0 = \widehat{AB}$  que parte del punto A del medio I y va al punto B del medio II. Vamos a examinar toda una serie de las líneas  $q$  que unen A y B, y que se componen de los arcos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ , dispuestos en los medios I y II, respectivamente, donde C es un punto de  $s$ . La longitud óptica  $T(q)$  de la curva  $q$  es:

$$T(q) = T(\widehat{AC}) + T(\widehat{CB}) = \frac{l(\widehat{AC})}{v_1} + \frac{l(\widehat{CB})}{v_2}. \quad (1)$$

La línea  $q_0$  es una línea de longitud óptica mínima entre todas las curvas  $q$ .

Examinemos también un hilo flexible no homogéneo  $q$  que está sujeto en los puntos  $A$  y  $B$ , mientras que su punto intermedio  $C$  se desliza por la curva  $s$ , con la particularidad de que la tensión en la parte  $\widehat{AC}$  de la curva  $q$  es igual a  $T_1 = \frac{1}{v_1}$ , y en la parte  $\widehat{CB}$ , a  $T_2 = \frac{1}{v_2}$ .

En virtud de la expresión (2) del Apartado 13 (véase *Leñitas Geométricas* 4, 5ª época, p. 20), la energía potencial  $V(q)$  es:

$$V(q) = \frac{l(\widehat{AC})}{v_1} + \frac{l(\widehat{CB})}{v_2}. \quad (2)$$

Comparando las fórmulas (1) y (2), obtenemos:

$$T(q) = V(q).$$

La energía potencial del hilo  $q$  coincide con su longitud óptica. Quiere decir que  $q_0$  es una línea de longitud óptica mínima entre las curvas  $q$ , y es también una línea de energía potencial mínima entre las mismas curvas  $q$ .

En virtud de la expresión (4) del mismo Apartado 13,  $q_0$  es una línea quebrada  $\widehat{AC_0B}$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los ángulos formados por los segmentos  $\widehat{AC_0}$  y  $\widehat{C_0B}$  con la tangente  $LL_1$  a la curva  $s$  en el punto  $C_0$ . De la fórmula (4) del Apartado 13 proviene:

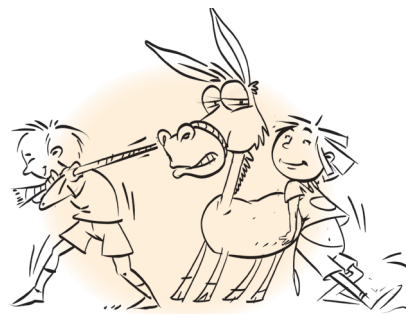
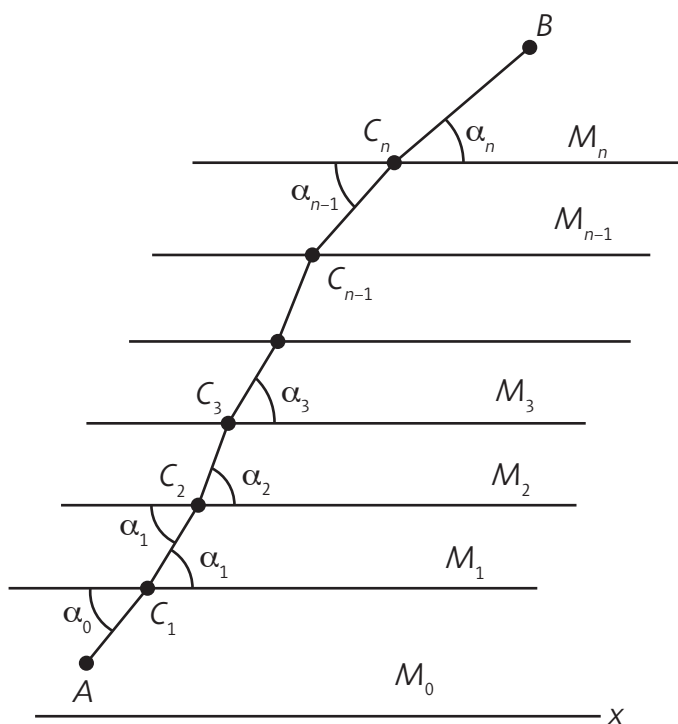
$$\frac{\cos \alpha}{v_1} = \frac{\cos \beta}{v_2}. \quad (3)$$

En esto precisamente consiste la ley de refracción de la luz. Sean  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  los ángulos que hacen rectos los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, los ángulos que forman los segmentos  $\widehat{AC_0}$  y  $\widehat{C_0B}$  con la normal a  $s$  en el punto  $C_0$ . El ángulo  $\alpha_1$  se llama ángulo de incidencia, y  $\beta_1$ , ángulo de reflexión. La fórmula (3) anterior tomará la forma:

$$\text{sen } \frac{\alpha_1}{v_1} = \text{sen } \frac{\beta_1}{v_2}.$$

#### 4. Curva de refracción

→ **1. Caso elemental.** Supongamos que el plano está dividido en bandas por unas rectas paralelas al eje  $x$ . En cada una de estas bandas, la velocidad de la luz es constante, como muestra la figura siguiente.





Elijamos los puntos  $A$  y  $B$  dispuestos en diferentes bandas. La banda  $M_0$  contiene el punto  $A$ , la banda  $M_n$  contiene el punto  $B$ . Entre ellas se disponen en orden sucesivo las bandas  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ . La velocidad de la luz en la banda  $M_0$  es igual a  $v_0$ ; en la banda  $M_1$  es igual a  $v_1$  y así sucesivamente, hasta que en la banda  $M_n$  es igual a  $v_n$ .

Un rayo luminoso que va del punto  $A$  al punto  $B$  tiene forma de una quebrada  $AC_1C_2 \dots C_nB$ , cuyos vértices se ubican en las líneas de separación de las bandas. Designemos con  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  a los ángulos formados, respectivamente, por los eslabones  $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_{n-1}C_n, C_nB$  de esta quebrada con las rectas paralelas al eje  $x$ . En el punto  $C_1$  se cumple la correlación:

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1}$$

(en virtud de la ley de refracción); en el punto  $C_2$  se realiza:

$$\frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2},$$

etc., y por fin, en el punto  $C_n$ :

$$\frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n}$$

De aquí se infiere:

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2} = \dots = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n} \quad (1)$$

Designemos con  $c$  el valor general de todas estas relaciones. Entonces podemos escribir:

$$\frac{\cos \alpha}{v} = c, \quad (2)$$

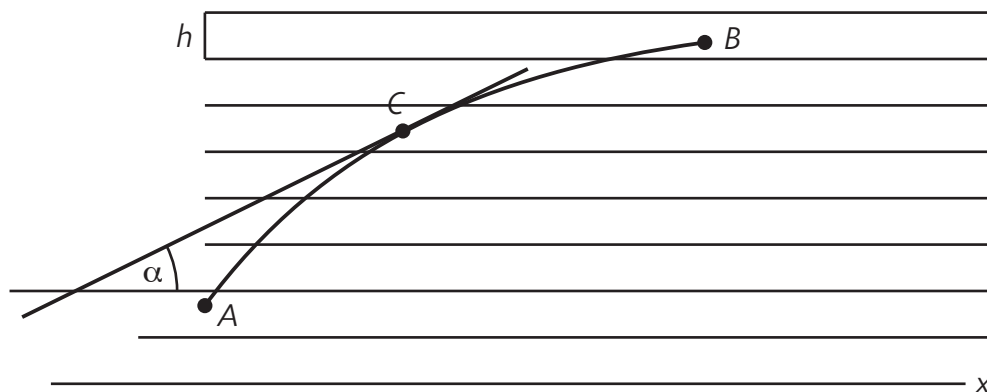
donde  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de cierto eslabón de la quebrada respecto del eje  $x$ , y  $v$ , la velocidad de la luz a lo largo de este eslabón.

Una tangente a la quebrada en un punto de alguno de sus eslabones es una recta en la que se dispone este eslabón. Se puede por ello considerar que  $\alpha$ , en la ecuación, significa un ángulo formado por la tangente en el punto de la quebrada con el sentido positivo del eje  $x$ , y  $v$  es la velocidad de la luz en el mismo punto.

→ **2. Curva de refracción.** Examinemos un medio óptico en el cual la velocidad de la luz es una función de la ordenada, siendo  $v$  una función continua de  $y$ . El trayecto de la luz  $q$  en tal medio es una línea a lo largo de la cual

$$\frac{\cos \alpha}{v} = c \quad (3)$$

donde  $v$  es la velocidad de la luz en un punto arbitrario  $C$  de la curva  $q$ , como se ve en la figura,



$\alpha$  es el ángulo formado por la tangente a  $q$  en el punto  $C$  y el sentido positivo del eje  $x$ ,  $c$  es una constante (que no depende de la elección del punto  $C$  en la curva).

Para justificar la ecuación (3) cambiemos algo la distribución de las velocidades de la luz en el medio; a

saber, dividámoslo en bandas estrechas de anchura  $h$  y convengamos en considerar constante la velocidad de la luz dentro de cada banda, igual, por ejemplo, a la velocidad de la luz en el centro de la banda dada, como muestra la figura anterior.

En este caso, el trayecto de la luz del punto  $A$  al punto  $B$  será, en virtud de lo expuesto anteriormente, una quebrada  $(AB)_h$  con vértices en las líneas de separación de las bandas, con la particularidad de que para la quebrada  $(AB)_h$  se cumple (en virtud de lo anterior) la ecuación (3). Hemos cambiado algo la distribución de velocidades, pero el cambio será tanto menor cuanto más estrechas sean nuestras bandas.

“En el límite, cuando la anchura de las bandas  $h$  tiende a cero, obtenemos la distribución continua original de velocidades de la luz”. En este caso, las quebradas  $(AB)_h$  tienden a la curva  $q$ , para la cual también se cumplirá la ecuación (3).

## El cálculo diferencial



### Una aventura a los volúmenes arquimedianos

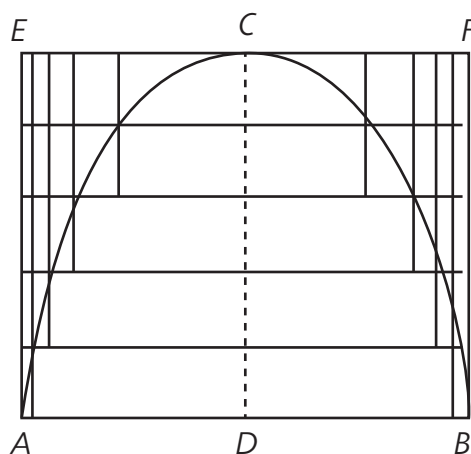
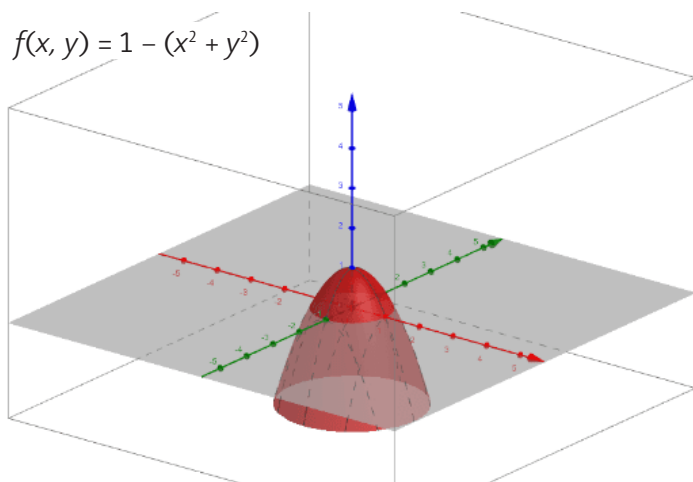
#### El volumen de un segmento de paraboloides

Parece ser que Arquímedes no pudo hallar el área de un segmento general de elipse o de hipérbola. En realidad, el cálculo del área de un segmento parabólico por el método de integración moderno no involucra nada peor que simples polinomios, pero las integrales que aparecen en la cuadratura de un segmento de elipse o de hipérbola (lo mismo que en los arcos de estas curvas o de la parábola) exigen ya la utilización de funciones trascendentes. No obstante, Arquímedes, en su importante trabajo *Sobre conoides y esferoides*, calcula el área de la elipse completa: “Las áreas de las elipses son entre sí como los rectángulos construidos sobre sus ejes” (proposición 6).

Esto es, obviamente, lo mismo que decir que el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $\pi ab$ , o bien que el área de una elipse es igual al área de un círculo cuyo radio sea la media geométrica de los dos semiejes de la elipse.

Además, Arquímedes muestra en este mismo tratado cómo calcular los volúmenes de los segmentos que se obtienen al cortar un elipsoide, un paraboloides o un hiperboloides de revolución (este, de dos hojas) por un plano perpendicular al eje principal. El método que utiliza Arquímedes se parece tanto al método de integración moderno que vamos a resumirlo solamente para un caso.

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$$



Sea  $ABC$  un segmento recto del paraboloide de revolución (o “conoide” parabólico) de eje  $\overline{CD}$ , como vemos en la figura de arriba. Consideremos el cilindro circular  $ABFE$  circunscrito al sólido, cuyo eje es también  $\overline{CD}$ . Dividamos este eje en  $n$  partes iguales de longitud  $h$  y tracemos por los puntos de división planos paralelos a la base. Construyamos sobre los círculos en que estos planos cortan al paraboloide cilindros inscritos y circunscritos tal como indica la figura. Es fácil demostrar entonces, utilizando la ecuación de la parábola y la suma de una progresión aritmética, que se verifican las siguientes proporciones y desigualdades:

$$\frac{\text{cilindro } ABFE}{\text{sólido inscrito}} = \frac{n^2 h}{h + 2h + 3h + \dots + (n-1)h} > \frac{n^2 h}{\frac{1}{2} n^2 h}$$

$$\frac{\text{cilindro } ABFE}{\text{sólido circunscrito}} = \frac{n^2 h}{h + 2h + 3h + \dots + nh} > \frac{n^2 h}{\frac{1}{2} n^2 h}$$

Arquímedes había demostrado previamente que la diferencia entre los volúmenes de los sólidos circunscrito e inscrito era igual al volumen de la rodaja inferior de los cilindros circunscritos; así pues, haciendo crecer el número  $n$  de subdivisiones del eje  $\overline{CD}$  –lo que supone que cada rodaja se irá haciendo más delgada cada vez–, la diferencia entre los sólidos circunscrito e inscrito podrá hacerse menor que cualquier magnitud dada de antemano y, por lo tanto, las desigualdades anteriores conducen a la conclusión de que el volumen del cilindro  $ABFE$  es necesariamente igual al doble del volumen del segmento conoidal.

La diferencia principal entre esta obra y los métodos modernos del cálculo integral radica en la falta del concepto de límite de una función, el cual estaba ya al alcance de la mano, pero, sin embargo, no fue formulado nunca por los matemáticos de la Antigüedad, ni siquiera por el gran Arquímedes, el hombre que más cerca estuvo de conseguirlo.

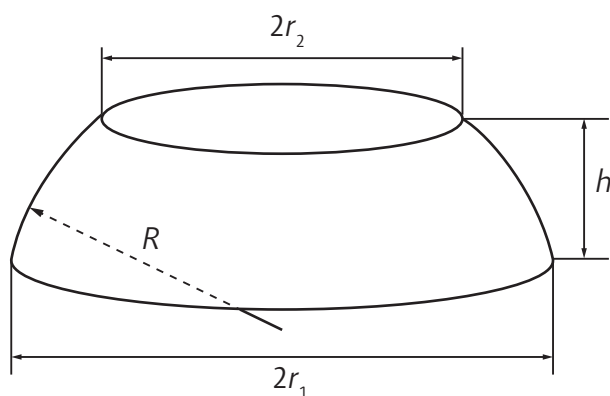
### El segmento esférico

Arquímedes escribió un buen número de tratados, admirables todos ellos, entre los cuales el que más impresionó a sus sucesores fue *Sobre las espirales*. El autor mismo parece haberse inclinado por otro: *Sobre la esfera y el cilindro*.

El gran matemático pidió que se tallara sobre su tumba una representación de una esfera inscrita en un cilindro circular recto de altura igual al diámetro de la esfera, ya que descubrió y demostró que la razón de los volúmenes del cilindro a la esfera es la misma que la razón de sus áreas, es decir, la de tres a dos. Esta propiedad, que Arquímedes descubrió posteriormente a su *Cuadratura de la parábola*, no la conocían, según él mismo nos dice, los geómetras anteriores.

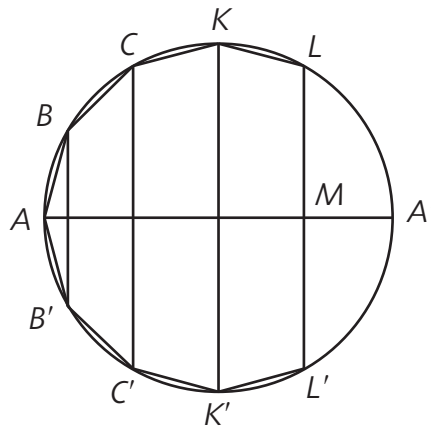
Durante algún tiempo se creyó que los egipcios conocían el área de un hemisferio esférico, pero ahora parece claro que Arquímedes fue el primero que descubrió y demostró que el área de la esfera es exactamente igual a cuatro veces el área de un círculo máximo de dicha esfera.

Mostró también que “la superficie de un segmento esférico cualquiera es igual a un círculo cuyo radio es el segmento trazado desde el vértice del segmento esférico a un punto cualquiera de la circunferencia base de dicho segmento”.



Esto es evidentemente equivalente a la proposición más conocida de que el área de cualquier segmento esférico es igual a la de un cilindro cuyo radio es el de la esfera y cuya altura es la misma que la del segmento. Es decir que el área del segmento no depende de manera directa de la distancia del centro de la esfera, sino solo de la altura o grosor del segmento.

El teorema fundamental relativo a la superficie de la esfera aparece en la proposición 33, a continuación de una larga serie de teoremas preliminares, entre los que se encuentra uno que es equivalente a una integración de la función seno:



“Si se inscribe un polígono en un segmento de círculo  $LAL'$ , de manera que todos sus lados, excepto la base, sean iguales y el número de estos lados par, tal como el  $LK \dots A \dots K'L'$ , siendo  $A$  el punto medio o vértice del segmento, y si trazamos las rectas  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$ , ..., que son paralelas a la base  $LL'$  y unen pares de puntos angulares correspondientes, entonces:

$$\frac{\overline{BB'} + \overline{CC'} + \dots + \overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}$$

donde  $M$  es el punto medio de  $\overline{LL'}$  y  $\overline{AA'}$  es el diámetro que pasa por  $M$ ”.

Esto viene a ser el equivalente geométrico de la ecuación trigonométrica:

$$\sin \frac{\theta}{n} + \sin \frac{2\theta}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\theta}{n} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\theta}{n} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \cot \frac{\theta}{2n}$$

A partir de este teorema es fácil obtener la expresión moderna:

$$\int_0^{\phi} \sin x \, dx = 1 - \cos \phi$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por  $\frac{\theta}{n}$  y tomando  $n$  límites cuando  $n$  tiende a infinito. Así, el miembro de la izquierda se convierte en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin x_i \, \Delta x_i$$

donde

$$x_i = \frac{i\theta}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad \Delta x_i = \frac{\theta}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n-1; \quad \Delta x_n = \frac{\theta}{2n}$$

El miembro de la derecha se convierte entonces en

$$(1 - \cos \theta) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{2n} \cot \frac{\theta}{2n} = 1 - \cos \theta$$

El equivalente del caso especial

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 1 - \cos \pi = 2$$

lo había dado ya Arquímedes en la proposición anterior. La conocida fórmula para el volumen de la esfera aparece en *Sobre la esfera y el cilindro*, I.34:

“Una esfera cualquiera es igual a cuatro veces el cono que tiene como base un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera”.

Este teorema se demuestra por medio del método de exhaustión usual, y la razón arquimediana entre el volumen o área de la esfera y del cilindro circunscrito se sigue como un corolario fácil.

El diagrama que representa a la esfera inscrita en un cilindro se grabó efectivamente sobre la tumba de Arquímedes, tal como sabemos por la información que nos transmite Cicerón. Cuando era cuestor en Sicilia, el famoso orador romano descubrió la tumba con el diagrama en un estado de abandono total. Cicerón la restauró (lo cual significó casi la única contribución de un romano a la historia de la matemática), pero más tarde desapareció todo rastro de ella.

## Sobre la esfera y el cilindro

Un problema del Libro II de *Sobre la esfera y el cilindro* arroja una luz interesante sobre el álgebra geométrica griega.

En la proposición 2, Arquímedes justifica su fórmula para el volumen de un segmento de una esfera dada; en la proposición 3, demuestra que para cortar una esfera dada por un plano de manera que las superficies de los dos segmentos resultantes estén en una razón dada, uno tiene que trazar simplemente un plano perpendicular a un diámetro pasando por un punto de dicho diámetro que lo divida en dos segmentos que estén en la razón deseada; y a continuación, en la proposición 4, muestra cómo cortar por un plano una esfera dada de manera que los volúmenes de los dos segmentos estén en una razón dada, que es un problema mucho más difícil.

Utilizando notación moderna, Arquímedes se ve conducido a la ecuación:

$$\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a-x)(m+n)}{ma}$$

donde  $\frac{m}{n}$  es la razón entre los dos segmentos. Esta ecuación es una cúbica y Arquímedes atacó su solución tal como habían hecho sus predecesores para resolver el problema de Delos, es decir, por medio de una intersección de cónicas.

Es interesante hacer notar que el enfoque griego de las cúbicas fue muy distinto del de las ecuaciones cuadráticas. Por analogía con el método de “aplicación de áreas” para este último caso, se podría haber esperado algo así como una “aplicación de volúmenes”, pero lo cierto es que no se adoptó este método. Arquímedes consiguió reducir su ecuación cúbica por medio de sustituciones a la forma  $x^2(c-x) = db^2$  y prometió dar por separado un análisis completo de esta cúbica con respecto al número de raíces positivas.

Aparentemente, este análisis quedó perdido durante muchos siglos, hasta que el griego Eutocio de Ascalón, sólido comentarista de principios del siglo VI, descubrió un fragmento que parecía contener el auténtico análisis llevado a cabo por Arquímedes. La solución se obtenía por medio de la intersección de la parábola  $cx^2 = b^2$  con la hipérbola  $(c-x)y = cd$ . Profundizando más, Arquímedes descubrió respecto de los coeficientes una condición que fija el número de raíces reales que satisfacen la ecuación dada, condición equivalente al cálculo y a la discusión del discriminante  $27b^2d - 4c^3$  de la ecuación cúbica  $db^2 = x^2(c-x)$ , lo cual puede comprobarse fácilmente por medio de un sencillo cálculo elemental.

En vista de que todas las ecuaciones cúbicas pueden transformarse en otras del tipo estudiado por Arquímedes, nos encontramos aquí, de hecho, con la esencia de un análisis completo de la ecuación cúbica general. No obstante, el interés por las ecuaciones cúbicas desapareció poco después de Arquímedes, para revivir brevemente por obra de Eutocio y después, siglos más tarde, de los árabes.



## Introducción al cálculo infinitesimal

Con una simplificación absurda y excesiva de los hechos, se atribuye a menudo a dos hombres, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, la “invención” del cálculo infinitesimal. En realidad, esa disciplina es el producto de una larga evolución que no iniciaron ambos autores ni terminó con ellos, pero en la cual desempeñaron un papel decisivo.

En la Europa del siglo XVII se encontraban diseminados algunos animosos hombres de ciencia que en su mayor parte no pertenecían a ningún establecimiento de enseñanza y se proponían continuar la obra de Galileo Galilei y de Johannes Kepler. Mantenían un estrecho contacto entre sí mediante la correspondencia y los viajes. Su atención se concentraba alrededor de dos problemas principales. Primero, el de las tangentes: determinar las tangentes a una curva dada, o sea, el problema fundamental del cálculo diferencial. Segundo, el de las cuadraturas: determinar el área encerrada por una curva dada, es decir, el problema fundamental del cálculo integral.

El gran mérito de Newton y de Leibniz consiste en haber reconocido claramente la íntima conexión de ambos problemas. En sus manos, los nuevos métodos unificados se convirtieron en poderosos útiles científicos. Gran parte del éxito se debió a la maravillosa notación simbólica que inventó Leibniz. El mérito de su obra no queda disminuido de ninguna manera, aunque en ella aparezcan ideas nebulosas e insostenibles, que pudieron inducir a error a aquellas mentes que prefieren el misticismo a la claridad.

Newton, que era más hombre de ciencia que su contrincante, parece haber experimentado la intensa influencia de Isaac Barrow (1630-1677), su maestro y predecesor en Cambridge. Leibniz era más bien un diletante. Abogado brillante, diplomático, filósofo, siendo una de las inteligencias más amplias y activas de su tiempo, aprendió la nueva matemática del físico Christiaan Huygens, en muy corto tiempo, mientras se encontraba en París en una misión diplomática. Muy poco tiempo después, publicó resultados que contienen el germen del cálculo infinitesimal moderno.

Newton, cuyos descubrimientos son muy anteriores, se negaba a publicarlos. Además, aunque había encontrado muchos de sus resultados mediante el cálculo infinitesimal al preparar su obra maestra, los *Principia*, prefirió presentarlos en el estilo de la geometría clásica, por lo que casi no aparece rastro del cálculo infinitesimal, por lo menos en la forma explícita de los *Principia*. Solo más tarde se publicaron sus investigaciones sobre el *Método de fluxiones*.

Muy pronto sus admiradores iniciaron una guerra cruel contra los amigos de Leibniz, respecto de cuestiones de prioridad. Acusaron a este último de plagio, por más que en una atmósfera que estaba saturada de las nuevas teorías nada era más natural que el descubrimiento simultáneo e independiente. Aquella polémica sobre la prioridad en la “invención” del cálculo constituye un desdichado ejemplo del valor excesivo dado a la prioridad y al derecho de propiedad intelectual, muy capaz de envenenar la atmósfera de la vida científica.

El análisis matemático del siglo XVII y de gran parte del siglo XVIII parece haberse alejado enteramente del ideal griego de razonamiento claro y riguroso. La “intuición” y el “instinto” reemplazaban a la razón en numerosos casos. Esto fomentaba una “fe de carbonero” en el poder sobrehumano de los nuevos métodos.

Se creía generalmente no solo innecesario, sino imposible presentar con claridad los resultados del cálculo infinitesimal. Si la nueva ciencia no hubiera estado en manos de un grupo cerrado, extremadamente competente, se habrían producido serios errores e incluso severos desastres. Estos adalides se dejaban guiar por un sentido, profundamente instintivo, que les impedía perderse totalmente.

Pero cuando la Revolución francesa abrió el camino para una enorme extensión de la cultura superior, cuando aumentó el número de personas que deseaban participar de la actividad científica, ya no pudo posponerse la revisión crítica del nuevo análisis. El siglo XIX llevó a cabo esa tarea y hoy puede enseñarse el cálculo infinitesimal sin ningún misterio y con completo rigor. No existe actualmente ninguna razón para que las personas educadas no entiendan este instrumento fundamental de la ciencia.

En esta sección nos proponemos dar una introducción fundamental, durante la cual insistiremos más en la clarificación completa de los conceptos importantes que en la manipulación formal. Utilizaremos el lenguaje intuitivo, pero siempre de tal manera que se mantenga la conexión con los conceptos precisos y los procedimientos claros.

## 1. La integral

→ **1. El área como límite.** Para poder calcular el área de una figura plana, elegimos como unidad de área un cuadrado cuyos lados tienen la unidad de longitud. Si esta es un centímetro, la unidad correspondiente de área será el centímetro cuadrado, es decir, un cuadrado, cada uno de cuyos lados tiene un centímetro.



Partiendo de esta definición, es muy fácil calcular el área de un rectángulo. Si  $p$  y  $q$  son las longitudes de dos lados adyacentes medidas con la unidad de longitud, el área del rectángulo es igual a  $p \cdot q$  unidades de superficie; más brevemente, el área es igual a  $p \cdot q$ . Esto es válido para cualquier  $p$  o  $q$ , sean racionales o no.

Si  $p$  y  $q$  son racionales, se obtiene ese mismo resultado escribiendo  $p = \frac{m}{n}$ ,  $q = \frac{m'}{n'}$ , siendo  $m, n, m', n'$  números enteros. Encontraremos entonces la medida común  $\frac{1}{N} = \frac{1}{n'n}$ , de ambos lados, por lo que

$$p = mn' \cdot \frac{1}{N}, \quad q = nm' \cdot \frac{1}{N}.$$

Finalmente, dividimos el rectángulo en pequeños cuadrados de lado  $\frac{1}{N}$  y cuya área será  $\frac{1}{N^2}$ .

El número de esos cuadrados será  $nm' \cdot mn'$  y su área total

$$nm'mn' \cdot \frac{1}{N^2} = \frac{nm'mn'}{n^2n'^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = p \cdot q.$$

Si  $p$  y  $q$  son irracionales, se obtiene el mismo resultado reemplazando primero  $p$  y  $q$  por números racionales aproximados  $p_r$  y  $q_r$ , respectivamente, y haciendo después tender ambos hacia  $p$  y  $q$ , respectivamente.

Geoméricamente, es evidente que el área de un triángulo es igual a la mitad de la del rectángulo que tiene la misma base  $b$  y la misma altura  $h$ , por lo que se indica la del triángulo por la expresión corriente  $\frac{1}{2}bh$ . Cualquier dominio plano limitado por una o varias poligonales puede descomponerse en triángulos, por lo que su área puede calcularse mediante la suma de las de estos.

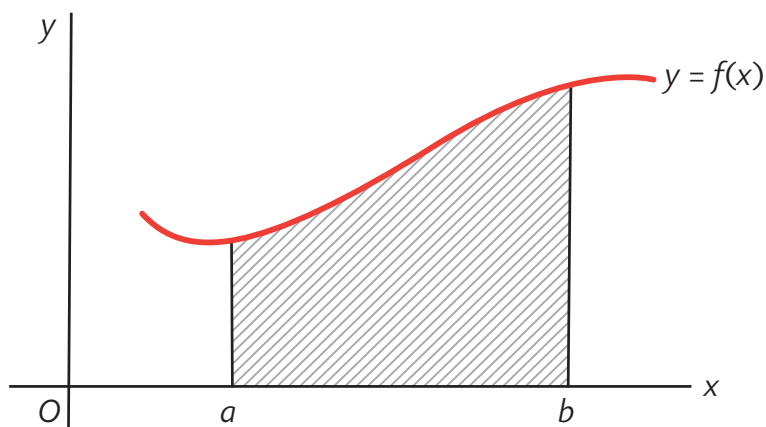
Se plantea la necesidad de un método más general cuando investigamos el área de una figura no limitada por rectas, sino por curvas. Por ejemplo, ¿cómo determinaremos el área de un disco circular o de un segmento de parábola? Esta cuestión capital es el punto de partida del cálculo integral y fue objeto de las investigaciones de Arquímedes, en el siglo III a. C., quien las calculó mediante un procedimiento que ha dado en llamarse de "exhausción".

Con Arquímedes y los grandes matemáticos hasta la época de Gauss, podemos adoptar la infantil actitud según la cual las superficies limitadas por curvas son entes dados intuitivamente y que la cuestión no consiste en definir las sino en computarlas; sin embargo, volveremos sobre el tema más adelante.

Inscribimos en el dominio cuya área ha de calcularse otro, limitado por rectas, cuya área está bien definida, y que representa aproximadamente al primero. Determinando otro dominio poligonal que incluya al primero, obtenemos una aproximación mejor. Procediendo de esta manera, podemos agotar toda la superficie como límite de una sucesión de dominios poligonales inscriptos, cuyo número de lados crece indefinidamente. De esta manera puede calcularse el área del círculo de radio 1. Su valor numérico se designa mediante el símbolo  $\pi$ .

Arquímedes procedió de esta manera para estudiar el área del círculo y del segmento de parábola. Durante el siglo XVII, se resolvieron así mucho otros casos. En cada uno de ellos, el verdadero cálculo del límite dependía de un procedimiento ingenioso, especialmente amoldado para ese problema único. Uno de los principales éxitos del cálculo consistió en reemplazar esos procedimientos especiales y, en consecuencia, de alcance restringido para el cálculo de áreas, por un procedimiento general y amplio.

- **2. La integral.** El primer concepto fundamental del cálculo es el de integral. En este punto, entenderemos por esa palabra la expresión del área limitada por una curva, mediante un límite. Si está dada una función continua y positiva,  $y = f(x)$ , por ejemplo,  $y = x^2$  o  $y = 1 + \cos x$ , consideraremos el dominio limitado inferiormente por el segmento del eje de las  $x$  desde la abscisa  $a$  hasta otra mayor  $b$ . lateralmente, por las perpendiculares al eje de las  $x$  en esos mismos puntos; y superiormente, por la curva  $y = f(x)$ . Nos proponemos calcular el área  $A$  de ese dominio.







El símbolo  $\Delta$  significa “diferencia”, es un “operador” y no debe confundirse con un número. Podemos elegir como altura de cada rectángulo de aproximación el valor  $y = f(x)$  en el extremo derecho del subintervalo; entonces la suma de las áreas de estos rectángulos será:

$$S_n = x_1 \cdot \Delta x + x_2 \cdot \Delta x + \dots + x_n \cdot \Delta x \quad (4)$$

que se escribe así en forma abreviada:

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x. \quad (5)$$

Aquí, el símbolo  $\sum$  (léase “sigma de  $j = 1$  hasta  $n$ ”) significa la suma de todas las expresiones obtenidas al tomar sucesivamente los valores  $1, 2, 3, \dots, n$ .

Puede verse la utilidad del símbolo  $\sum$  para expresar en forma concisa el resultado de la suma en los ejemplos siguientes:

$$2 + 3 + 4 + \dots + 10 = \sum_{j=2}^{10} j.$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{j=1}^n j;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{j=1}^n j^2;$$

$$aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n = \sum_{j=1}^n aq^j;$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+nd) = \sum_{j=0}^n (a+jd).$$

Formemos ahora una sucesión de aquellas aproximaciones  $S_n$  para las que  $n$  aumenta indefinidamente, con lo que el número de términos en cada suma (5) aumenta, mientras que cada uno de los términos  $f(x_j)\Delta x$  tiende a cero, debido a la presencia del factor  $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ . Al aumentar  $n$ , esta suma tiende al área  $A$ :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

Leibniz expresó simbólicamente este paso al límite de la suma aproximada  $S_n$  a  $A$  reemplazando el signo  $\sum$  mediante  $\int$  y el símbolo de diferencia  $\Delta$  por  $d$ . (El símbolo  $\sum$  de sumación se escribía generalmente  $S$  en tiempos de Leibniz, de donde  $\int$  es una  $s$  estilizada, la que llega al actual signo de integral).

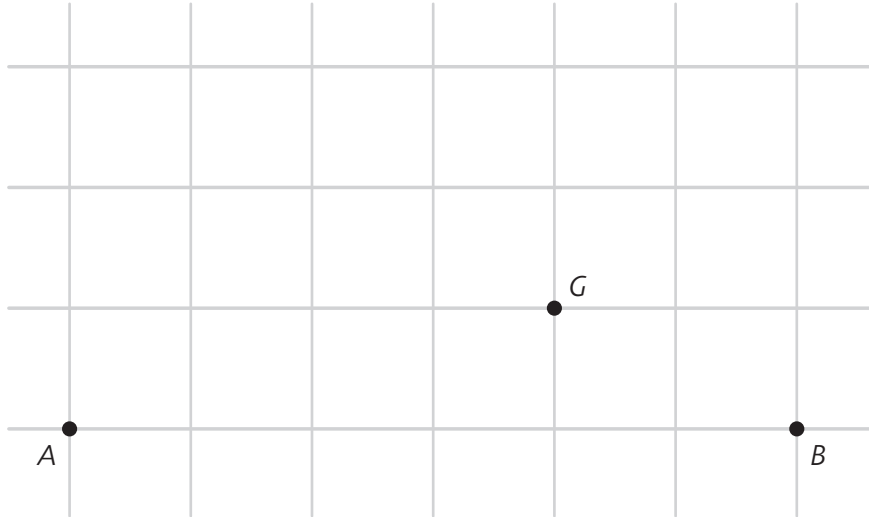
Aunque el simbolismo de Leibniz sugiere la manera cómo se obtiene la integral mediante el paso al límite de una suma finita, es necesario tener mucho cuidado y no dar demasiada importancia a lo que después de todo es solo una pura convención acerca de la forma en que debe expresarse el límite.

En la primera época del cálculo, cuando todavía no se había entendido claramente el concepto de límite y ciertamente no siempre se le tenía presente, se explicaba el concepto integral diciendo que “se reemplaza la diferencia finita  $\Delta x$  por la cantidad infinitamente pequeña  $dx$ , siendo la integral la suma de las infinitas cantidades infinitamente pequeñas  $f(x) dx$ ”.

Aunque los infinitamente pequeños tienen un cierto atractivo para los espíritus inclinados a la especulación, no pueden ocupar ningún lugar en la matemática moderna. No se llega a ningún resultado útil rodeando la clara noción de integral de una niebla de frases sin sentido. El mismo Leibniz se dejó arrastrar muchas veces por el poder de sugestión de sus símbolos, que actúan como si denotaran una suma de cantidades “infinitamente pequeñas”, con las cuales parece ser posible operar como con las corrientes. En efecto, se creó la voz “integral” para indicar que la totalidad del área  $A$  se compone de partes “infinitamente pequeñas”  $f(x) dx$ . De todas maneras, solo casi un siglo después de Leibniz y Newton, vino a comprenderse claramente que la definición de la integral se basa exclusivamente en el concepto de límite. Permaneciendo firmemente en esa base, podemos evitar todas las nebulosidades, todas las dificultades y todos los disparates que tanto dificultaron el desarrollo del cálculo en sus comienzos.



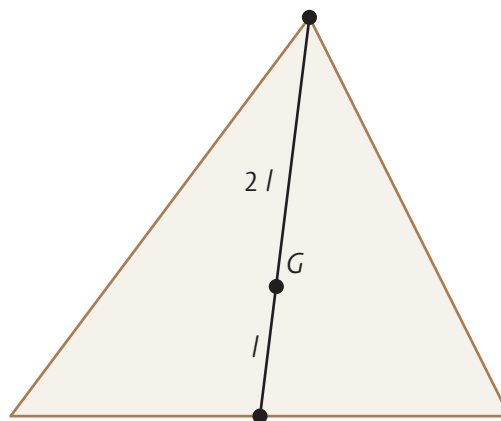
La figura muestra, sobre la cuadrícula, los vértices  $A$ ,  $B$  y el baricentro  $G$  del triángulo  $ABC$ .



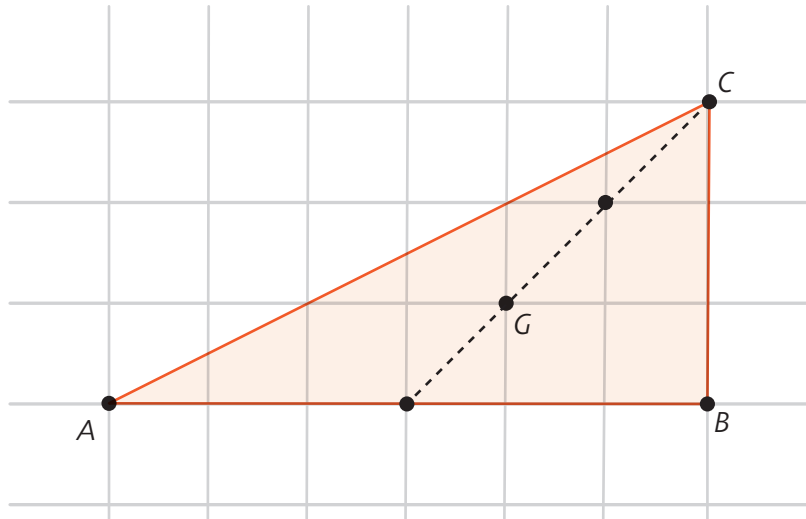
Dibujar el triángulo  $ABC$ .

**Solución**

El baricentro de un triángulo divide a las medianas en la relación 2:1; más precisamente, la longitud del segmento que une un vértice con el baricentro es el doble de la longitud del segmento que une el baricentro con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

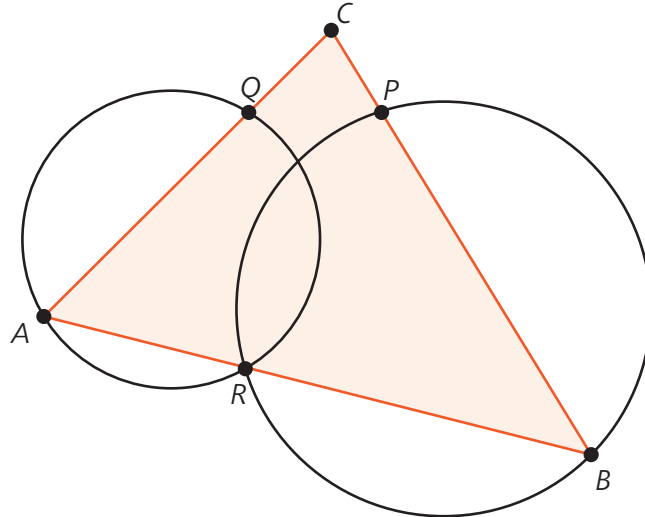


De modo que podemos dibujar la mediana del triángulo partiendo desde el punto medio del lado  $AB$ , pasando por  $G$  y avanzando hasta obtener tres veces la longitud del segmento que une el punto medio de  $AB$  con el baricentro  $G$ .





Los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son los pies de las alturas del triángulo  $ABC$ .



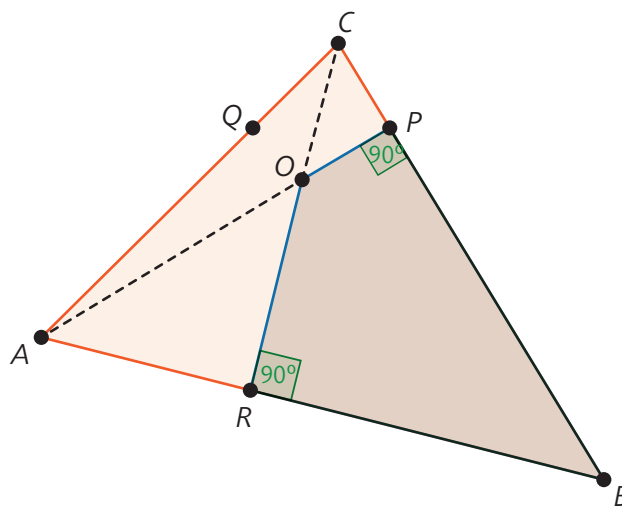
Marcar en la figura el ortocentro del triángulo  $ABC$ .

*El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.*

### Solución

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que la suma de los ángulos en vértices opuestos sea  $180^\circ$ .

Llamando  $O$  al ortocentro de  $ABC$ , podemos ver que el cuadrilátero  $RBPO$  puede inscribirse en una circunferencia, dado que los ángulos en los vértices  $P$  y  $R$  suman  $180^\circ$ .



En conclusión, el ortocentro de  $ABC$  está en la circunferencia que pasa por  $RBP$ . En forma similar, se puede mostrar que el ortocentro está en la circunferencia que pasa por  $ARQ$ . Entonces el ortocentro es el punto de intersección de las circunferencias dadas en la figura del problema, distinto de  $R$ .