



# Leñitas Geométricas\*

para el Fogón Matemático de los Festivales

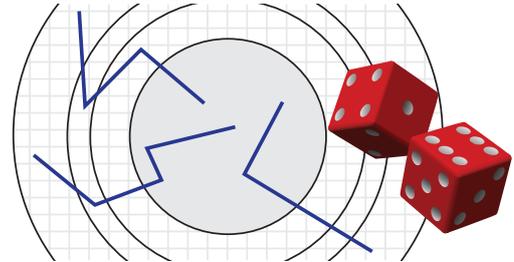
De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✖ N° 5  
4 de mayo de 2023



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

## El Método Montecarlo



Una aventura a la mitad del siglo xx

### Tablas aleatorias en la primera generación de computadoras

La historia de las computadoras, en un momento, tuvo que ser dividida en generaciones. El objetivo de esta distinción era definir claramente cuándo las computadoras presentaban un salto importante en la tecnología usada.

De las válvulas al transistor, de este al circuito integrado y de allí a la tecnología cuántica, la historia de las computadoras es fascinante. Empezaremos por la primera generación. ¡No se lo pierda! Hay detalles realmente relevantes y sorprendentes que con seguridad necesitamos conocer.

La primera generación de computadoras abarca desde el año 1946 hasta el año 1956, aunque realmente estas fechas corresponden a las máquinas comerciales, que son las que se podrían llamar la primera generación de computadoras.



### Publicación reciente

Los números complejos  
en la geometría del plano.  
Teorema de Ptolomeo.  
Potencia.

[fenchu@oma.org.ar](mailto:fenchu@oma.org.ar)

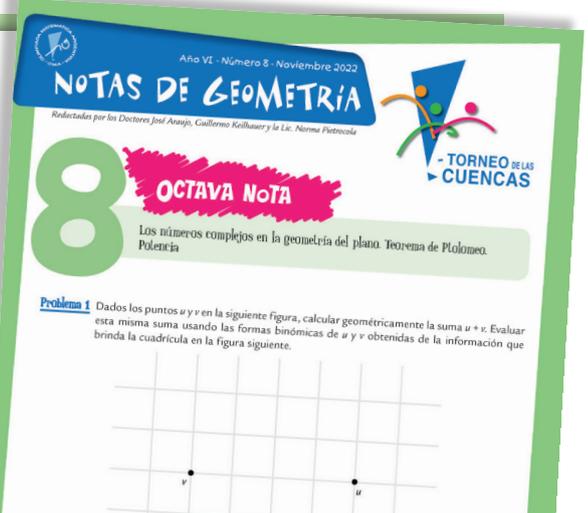
☎ 11 4826 8976

📞 +54 9 11 5035 7537



¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



\* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

## Características:

- Estaban construidas con electrónica de válvulas de vacío.
- Se programaban en lenguaje máquina.
- La información era mostrada en bombillas. Cada bombilla era un bit: si era 1, estaba encendida; y si era 0, estaba apagada.
- Un programa es un conjunto de instrucciones para que la máquina efectúe alguna tarea y el lenguaje más simple en el que puede especificarse. El programa se llama *lenguaje de máquina* porque debe escribirse mediante algún conjunto de códigos binarios.

La primera generación de ordenadores, y sus antecesores, se describen en la siguiente lista de los principales modelos que la conformaron:

- 1938. El Z1, primera máquina totalmente electromecánica. Los componentes mecánicos ocasionaban bastantes problemas. Las Z fueron fabricadas por el alemán Konrad Zuse, cuyo trabajo fue menospreciado por haberse desarrollado en Alemania durante la Segunda Guerra Mundial.
- 1939. El Z2, para mejorar, usó relés, por primera vez. Fue una máquina intermedia.
- 1941. El Z3 fue la primera máquina completamente operativa usando relés.
- 1944. ENIAC. Esta fue considerada hasta hace unos años como la primera computadora digital electrónica en la historia. No fue un modelo de producción, sino una máquina experimental. Tampoco era programable en el sentido actual. Se trataba de un enorme aparato que ocupaba todo un sótano en la universidad. Construida con 18 000 tubos de vacío, consumía varios kW de potencia eléctrica y pesaba 30 toneladas. Era capaz de efectuar 5 000 sumas por segundo. Fue construida por un equipo de ingenieros y científicos encabezados por los doctores John William Mauchly y John Presper Eckert en la universidad de Pensilvania, en los Estados Unidos.
- 1950. El Z4 fue completado, rediseñado completamente tras perderse los planos y piezas de las anteriores Z durante los bombardeos aliados sobre Berlín. Fue la primera máquina en ser vendida comercialmente, en 1950.
- 1951. EDVAC. Segunda computadora programable. También fue un prototipo de laboratorio, pero ya incluía en su diseño las ideas centrales que conforman las computadoras actuales.
- 1951. UNIVAC I. Es considerada la primera computadora comercial en ser vendida, aunque se le adelantó la británica Feranti Mark I por unos meses, y nunca se tuvo en cuenta la Z4, que la precedió de casi un año. Los doctores Mauchly y Eckert fundaron la compañía Universal Computer (Univac), cuyo primer producto fue esta máquina. El primer cliente fue la Oficina del Censo de Estados Unidos.
- 1953. IBM 701. Para introducir los datos, estos equipos empleaban tarjetas perforadas, que habían sido inventadas en los años de la Revolución Industrial (finales del siglo XVIII) por el francés Joseph Marie Jacquard y perfeccionadas por el estadounidense Herman Hollerith en 1890. La IBM 701 fue la primera

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". *Miguel de Guzmán*



[fenchu@oma.org.ar](mailto:fenchu@oma.org.ar)

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

**¡Hacé tu pedido!**

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

*¿Ya lo tenés?*

Godfrey Harold Hardy

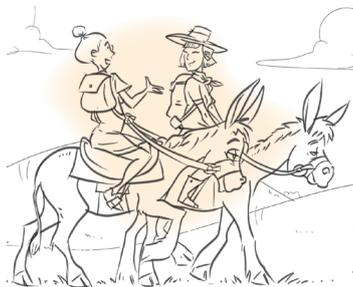
**Apología  
de un  
matemático**



de una larga serie de computadoras de esta compañía, que luego se convertiría en la empresa número uno, por su volumen de ventas.

- 1954. IBM continuó con otros modelos, que incorporaban un mecanismo de almacenamiento masivo llamado *tambor magnético*, que con los años evolucionaría y se convertiría en el disco magnético.
- 1955. Zuse Z22 Fue la primera computadora de Konrad Zuse que aprovechó los tubos de vacío.

### La válvula de vacío y las computadoras



**Válvula termoiónica, o tubo de vacío.** La era de la computación moderna empezó con una ráfaga de desarrollos que se desplegaron antes y durante la Segunda Guerra Mundial, tales como circuitos electrónicos, relés, condensadores y tubos de vacío, que reemplazaron los equivalentes mecánicos. Asimismo, los cálculos digitales sustituyeron los cálculos analógicos.

Las computadoras que se diseñaron y construyeron entonces se denominan a veces *primera generación de computadoras*. Estas computadoras eran usualmente construidas a mano usando circuitos que contenían relés y tubos de vacío, y a menudo se empleaban tarjetas perforadas (*punched cards*) o una cinta de papel perforado (*punched paper tape*) para la entrada de datos (*input*) y como medio de almacenamiento principal (no volátil). El almacenamiento temporal era proporcionado por las líneas de retraso acústicas (que aprovechan la propagación de tiempo de sonido en un medio tal como el alambre para almacenar datos) o por los tubos de William (que explotan la habilidad de un tubo de televisión para guardar y recuperar datos).

**Breve repaso cronológico.** El trabajo de preguerra de Alan Turing ejerció una gran influencia en la ciencia de la computación teórica. Su trabajo de 1936 incluyó una reformulación de los resultados de Kurt Gödel de 1931, así como una descripción de la que ahora es conocida como la máquina de Turing, un dispositivo puramente teórico para formalizar la noción de la ejecución de algoritmos, que reemplaza el lenguaje universal –más embarazoso– de Gödel, basado en la aritmética. Después de la guerra, diseñó, construyó y programó algunas de las primeras computadoras en el Laboratorio Nacional de Física y en la Universidad de Mánchester. Las computadoras modernas son Turing-integradas (capacidad de ejecución de algoritmo equivalente a una máquina de Turing universal), salvo su memoria finita. Este limitado tipo de Turing-integrados es visto, a veces, como una capacidad umbral que separa las computadoras de propósito general de sus predecesoras de propósito especial.

En 1936 Konrad Zuse empezó la construcción de la primera serie Z, unas calculadoras que ofrecían memoria (inicialmente limitada) y programabilidad. Las Zuse eran puramente mecánicas, pero ya binarias. La Z1, terminada en 1938, nunca funcionó de manera fiable, debido a los problemas de precisión que presentaban las partes.

Asimismo, en dos patentes de 1937 Konrad Zuse anticipó que las instrucciones de máquina podían ser almacenadas en el mismo tipo de almacenamiento que el utilizado para los datos –la clave de la visión que fue conocida como la *arquitectura de Von Neumann* y fue la primera implementada más tarde (1949) en el diseño británico EDSAC–.

En ese mismo año 1937, Claude Shannon presentó en el Massachusetts Institute of Technology (MIT) su tesis de maestría, titulada *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits (Un análisis simbólico de circuitos de relés e interruptores)*, en la que implementaba el álgebra booleana usando relés electrónicos e interruptores, por primera vez en la historia. Una obra posterior de Shannon, *Una teoría matemática de la comunicación* (1948), es considerada fundadora del diseño de circuitos digitales prácticos.

En 1938, John Vincent Atanasoff y Clifford Edward Berry, de la Universidad del Estado de Iowa, desarrollaron la Atanasoff Berry Computer (ABC), una computadora especialmente concebida para resolver sistemas de ecuaciones lineales, en cuya construcción se emplearon condensadores montados mecánicamente en un tambor rotatorio para memoria. La máquina ABC no era programable, aunque se considera una computadora en el sentido moderno en varios otros aspectos.

En 1940 fue completada la calculadora de número complejo, una calculadora para aritmética compleja basada en relés. Fue la primera máquina que siempre se usó remotamente por una línea telefónica.

La máquina subsecuente de Zuse, la Z3, fue terminada en 1941. Estaba basada en relés de teléfono y trabajó satisfactoriamente. De este modo, fue la primera computadora funcional controlada mediante programas. En muchas de sus características era bastante similar a las máquinas modernas, abriendo numerosos avances tales como el uso de la aritmética binaria y de números de coma flotante. El duro trabajo de reemplazar el sistema decimal (utilizado en el primer diseño de Charles Babbage) por el sistema binario, más simple, significó que las máquinas de Zuse fuesen más fáciles de construir y potencialmente más fiables, dadas las tecnologías disponibles en ese momento.

Esto es a veces visto como la principal razón por la que Zuse tuvo éxito allí donde Babbage falló; sin embargo, aunque la mayoría de las máquinas de propósito general de la actualidad continúan ejecutando instrucciones binarias, la aritmética decimal es aún esencial para aplicaciones comerciales, financieras, científicas y de entretenimiento, y el *hardware* de coma flotante decimal se está agregando en los dispositivos actuales (el sistema binario se sigue usando para direccionamiento en casi todas las máquinas) como un apoyo al *hardware* binario.

Se hicieron programas en cintas perforadas para las Z3. Los saltos condicionales eran extraños, pero desde los años 90 los puristas teóricos dirían que la Z3 era aún una computadora universal (ignorando sus limitaciones físicas de tamaño de almacenamiento).

A finales de los años 30 y principios de los 40, George Stibitz y sus colegas produjeron en los laboratorios Bell de la ciudad de Nueva York algunas computadoras basadas en relés, pero se preocuparon más por los problemas de control del sistema de teléfono que por la computación. Sus esfuerzos, sin embargo, fueron un claro antecedente para otra máquina electromecánica americana.

La Harvard Mark I (oficialmente llamada *Automatic Sequence Controlled Calculator*) fue una computadora electromecánica de propósito general construida con financiación de IBM y con la asistencia de algún personal de esta empresa bajo la dirección del matemático Howard Aiken, de Harvard. Su diseño era influenciado por la máquina analítica. Era una máquina decimal que utilizaba ruedas de almacenamiento e interruptores rotatorios, además de los relés electromagnéticos.

Se programaba mediante cinta de papel perforado y contenía varias calculadoras trabajando en paralelo. Más adelante, los modelos tendrían varios lectores de cintas de papel y la máquina podía cambiar entre lectores basados en una condición, algo que no hace mucho la máquina Turing-integrada. El desarrollo empezó en 1939 en los laboratorios de Endicott de IBM. La Mark I se llevó a la Universidad de Harvard para comenzar a funcionar en mayo de 1944.

A lo largo de 1943, la memoria de núcleo magnético fue desplazando rápidamente a la mayoría de las otras formas de almacenamiento temporal y ya dominaría este campo a mediados de la década de 1970.

Durante la Segunda Guerra Mundial, los británicos hicieron esfuerzos significativos en las instalaciones militares de Bletchley Park (Buckinghamshire, Inglaterra) para descifrar las comunicaciones secretas alemanas. El sistema cipher alemán (Enigma) fue adoptado como ayuda para construir "bombas" –diseñadas a partir de las bombas electromecánicas programables– que permitieran encontrar posibles llaves de Enigma, ya que otras técnicas tenían posibilidades más limitadas. Los alemanes también desarrollaron una serie de sistemas cipher (llamados *Fish ciphers* por los británicos y *Lorenz ciphers* por ellos mismos) que eran bastante diferentes del Enigma. Como consecuencia de un ataque contra estos, el profesor Max Newman y sus colegas (Alan Turing, entre ellos) construyeron el Colossus. El Mk I Colossus fue realizado en un plazo muy breve por Tommy Flowers en la Post Office Research Station en Dollis Hill, en Londres, y enviado a Bletchley Park.

El Colossus fue el primer dispositivo de cómputo totalmente electrónico. Solo usaba tubos de vacío y no tenía relés. Tenía entrada para cinta de papel (*paper-tape*) y era capaz de hacer bifurcaciones condicionales. Se construyeron nueve Mk II Colossus (la Mk I se convirtió a una Mk II, llevando a diez máquinas el total). Los detalles de su existencia, diseño y uso se mantuvieron en secreto hasta los años 70. Se dice que Winston Churchill ordenó personalmente su destrucción en pedazos no más grandes que la mano de un hombre. Debido a este secreto, el Colossus no se ha incluido en muchas historias de la computación. Una copia reconstruida de una de las máquinas Colossus está ahora expuesta en Bletchley Park.

Mientras tanto, Zuse sufrió retrocesos dramáticos y perdió muchos años de esfuerzos durante la Segunda Guerra Mundial, cuando los bombarderos británicos o estadounidenses destruyeron sus primeras máquinas.

Al parecer, su trabajo permanecía largamente desconocido entre los ingenieros del Reino Unido y de los Estados Unidos. Aun así, IBM era consciente de esta situación y financió su compañía a inicios de la posguerra, en 1946, para obtener derechos sobre las patentes de Zuse.

En 1945, Zuse había diseñado el primer lenguaje de programación de alto nivel, Plankalkül, aunque este nunca se publicó formalmente hasta 1971 y fue implementado por primera vez recién en el año 2000 por la Universidad de Berlín, cinco años después de su muerte.

**El ENIAC.** El ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*, Integrador Numérico Electrónico y Computador) fue construido en los Estados Unidos y se considera a menudo la primera computadora electrónica de propósito general. Validó el uso de elementos electrónicos para la computación a gran escala. Esto fue crucial para el desarrollo de la computación moderna, debido inicialmente a la ventaja de su gran velocidad, pero últimamente, a su potencial para la miniaturización.

Construida bajo la dirección de John Mauchly y John Presper Eckert, era mil veces más rápida que sus contemporáneas. El desarrollo y la construcción de la computadora ENIAC comenzó en 1941, siendo la máquina completamente operativa hacia finales de 1945. Cuando su diseño fue propuesto, muchos investigadores creyeron que los millares de válvulas delicadas (tubos de vacío) se quemarían a menudo, lo que implicaba que la ENIAC estaría en reparación con mucha frecuencia. Sin embargo, era capaz de hacer más de 100 000 cálculos simples por segundo y eso durante unas horas, que era el tiempo entre los fallos de las válvulas.

Para programar la ENIAC, no obstante, hacía falta restablecer los alambres, por lo que algunos dicen que eso ni siquiera se puede calificar como programación, pues cualquier tipo de reconstrucción de una computadora debería entonces considerarse como programación. Recién varios años después fue posible ejecutar programas almacenados en la memoria de la tabla de función.

A todas las máquinas de esta época les faltó lo que se conocería como la arquitectura de Eckert-Mauchly: sus programas no se guardaban en el mismo “espacio” de memoria que los datos, por lo que no podían ser manipulados como datos.

La primera máquina Eckert-Mauchly fue la *Manchester Baby*, o *Small-Scale Experimental Machine*, construida en la Universidad de Mánchester en 1948. Fue seguida en 1949 por la computadora *Manchester Mark I*, que funcionaba como un sistema completo utilizando el tubo de William para memoria y también introducía registros de índices. El otro contendiente para el título de “primera computadora digital de programa almacenado” fue la EDSAC (*Electronic Delay Storage Automatic Calculator*), diseñada y construida en la Universidad de Cambridge.

La EDSAC estuvo operativa menos de un año después de la *Manchester Baby* y era capaz de resolver problemas reales. En realidad, fue inspirada en los planes ejecutados para la EDVAC, la sucesora de la ENIAC. Estos planes ya existían en el momento en que la ENIAC era exitosamente operacional. A diferencia de esta, que utilizaba un procesamiento paralelo, la EDVAC precisaba de una sola unidad de procesamiento. Este diseño era más simple y fue el primero en ser implementado en cada onda, teniendo éxito de miniaturización. Además, incrementaba la fiabilidad. Algunos ven las *Manchester Mark I*, EDSAC y EDVAC como las “Evas” de cuya arquitectura casi todas las computadoras actuales derivan.

La primera computadora programable en la Europa continental fue creada por un equipo de científicos bajo la dirección de Serguéi Alekséievich Lébedev, del Instituto de Electrotecnología de Kiev, Unión Soviética (ahora Ucrania). La computadora MESM (*Small Electronic Calculating Machine*, МЭСМ) fue operacional en 1950. Tenía aproximadamente 6 000 tubos de vacío y consumía 25 kW. Podía realizar aproximadamente 3 000 operaciones por segundo.

La máquina de la Universidad de Mánchester se convirtió en el prototipo para la *Ferranti Mark I*, cuyo primer ejemplar fue entregado a la Universidad en febrero de 1951. Y por lo menos otros nueve se vendieron entre 1951 y 1957.

**La UNIVAC I.** En junio de 1951, la UNIVAC I (*Universal Automatic Computer*) se entregó a la Oficina del Censo de los Estados Unidos. Aunque fabricada por la Remington Rand, que vendió 46 máquinas a más de un millón de dólares cada una, la máquina era erróneamente llamada la *IBM UNIVAC*. La UNIVAC fue la primera computadora producida en masa; todas las predecesoras habían sido una única unidad. Estaba

conformada por 5 200 tubos de vacío y consumía 125 kW. Utilizaba una línea de retraso de mercurio capaz de almacenar 1 000 palabras de 11 dígitos decimales más la señal (72-bit de palabras) para memoria.



En el caso de las primeras máquinas no se usó un sistema de tarjetas perforadas, sino una entrada de cinta de metal.

**La LEO.** En noviembre de 1952, la compañía J. Lyons and Co. (relacionada con la industria de los alimentos) desarrolló la primera computadora de Inglaterra, la LEO (Lyons Electronic Office), la cual también fue la primera computadora en resolver problemas del negocio.

### 3. Obtener variables aleatorias en máquinas electrónicas de primera generación



El propio planteamiento de la propuesta “obtener variables aleatorias en las máquinas electrónicas” provoca cierta perplejidad: ¿de qué casualidad se puede hablar si todo cuanto se realiza con la máquina debe ser programado de antemano? En esta cuestión hay efectivamente ciertas sutilezas, pero conciernen más bien a la filosofía, por lo tanto, las dejaremos a un lado.

Sin embargo, cabe señalar que las variables aleatorias consideradas anteriormente (véase *Leñitas Geométricas* N° 4, 5ª época) representan conceptos matemáticos ideales. Solo la práctica dilucida si estos pueden ser empleados para describir determinados fenómenos de la naturaleza. Esta descripción es siempre aproximada. Es más, una variable aleatoria que describe satisfactoriamente una magnitud física en unos fenómenos puede resultar en una característica desafortunada de esta misma magnitud al tratarse de otros fenómenos.

De la misma forma, un camino que se asemeja a una recta (a una recta matemática ideal “sin anchura”), en el mapa de un país, se convierte en una franja sinuosa en el plano a gran escala de una localidad.

Suelen distinguirse tres procedimientos que se aplican para obtener variables aleatorias: tablas de números aleatorios, generadores de números aleatorios y el método de números pseudoaleatorios.

→ **1. Tablas de números aleatorios.** Las siguientes tablas pueden ser útiles para la simulación de diversas situaciones de azar. Por ejemplo:

- Para simular lanzamientos de dados, utilizar los deslizadores de la izquierda para que los números aleatorios varíen *desde  $n = 1$  hasta  $n = 6$* .
- Para simular lanzamientos de monedas, *desde  $n = 0$  hasta  $n = 1$* .



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	9	8	5	7	1	5	5	5	6	2		7	2	4	5	5	0	2	9	4	8
2	5	4	1	7	7	3	9	6	4	5		8	5	0	5	1	0	5	0	7	4
3	4	7	8	4	3	4	4	9	6	1		9	9	3	4	2	4	5	1	0	2
4	4	5	9	0	0	2	7	3	7	5		2	1	2	4	6	3	1	1	0	8
5	7	0	9	5	2	9	4	2	5	4		8	9	2	3	7	1	9	7	8	5
6	6	5	1	2	7	4	9	7	2	8		0	7	7	9	0	7	7	0	3	0
7	6	5	1	2	1	6	9	8	8	7		4	1	3	4	6	2	3	4	4	4
8	5	3	3	6	3	7	2	9	3	5		7	2	1	3	4	3	3	1	1	5
9	3	7	1	0	2	8	3	9	5	7		4	7	3	9	4	0	8	9	8	4
10	6	1	2	2	0	5	4	8	8	2		5	1	4	3	5	6	2	5	1	4
11	0	1	9	3	8	1	8	7	1	6		0	7	1	2	8	7	5	2	8	5
12	2	6	3	1	8	6	2	7	4	6		3	6	9	1	4	1	7	7	3	5
13	9	5	2	9	4	7	2	0	6	0		4	3	0	7	0	8	8	5	5	9
14	3	2	9	5	5	4	1	3	3	1		4	8	9	4	0	7	8	2	8	3
15	4	7	5	4	1	5	4	6	2	4		1	5	5	0	6	4	1	8	2	2
16	4	1	0	1	1	9	6	7	4	5		0	9	9	7	4	4	9	9	4	9
17	5	6	8	8	4	2	5	7	0	2		5	5	7	1	8	2	1	3	6	0
18	8	5	2	6	6	1	9	2	4	5		6	5	6	4	3	5	0	4	8	3
19	6	9	6	5	9	6	0	3	6	9		8	8	5	1	6	4	1	8	3	8
20	1	0	0	5	8	9	9	1	1	8		6	2	4	5	9	2	5	5	5	4
21	0	7	6	6	6	4	7	0	0	6		1	1	5	8	5	0	2	3	4	9
22	7	8	9	9	8	6	6	6	7	1		6	5	8	2	2	9	4	9	1	1
23	6	2	0	1	5	5	3	0	0	1		4	8	4	6	0	4	6	5	2	7
24	8	9	1	0	2	3	7	1	1	0		9	6	2	8	2	1	4	6	5	1
25	9	8	4	5	0	2	9	0	7	7		5	9	6	7	0	3	6	3	8	1
26																					

Tabla elaborada en Geogebra

¿Cómo hacerlas? Realicemos el experimento siguiente. Tomemos diez tarjetas iguales escribiendo en ellas las cifras 0, 1, 2, ..., 9. Coloquemos todas las tarjetas en un sombrero y, después de mezclarlas bien, comencemos a extraerlas, con la particularidad de que cada vez sacaremos una única tarjeta, la volveremos a meter en el sombrero y mezclaremos de nuevo todas las tarjetas. Las cifras así obtenidas pueden ser recogidas en una tabla semejante a la que encabeza este punto. Más adelante veremos otras tablas cuyas cifras, por razones de comodidad en el uso, vienen agrupadas de cinco en cinco.

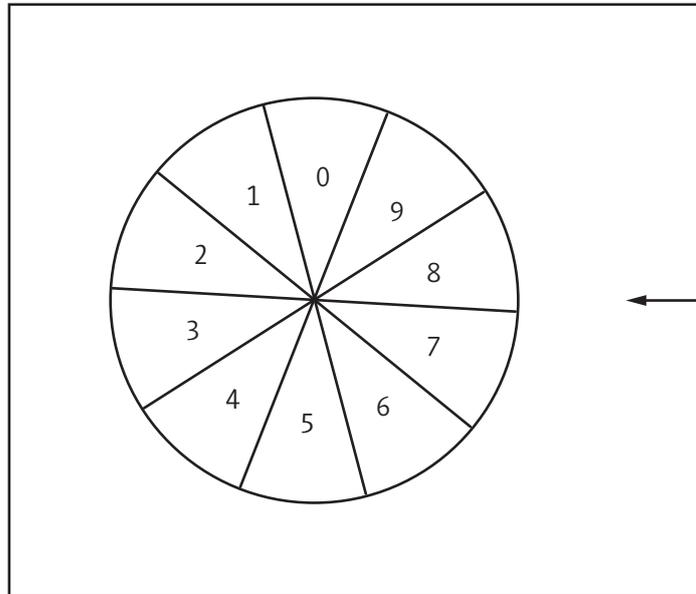
Esta tabla también lleva el nombre de tabla de números aleatorios, aunque sería más justo denominarla *tabla de cifras aleatorias*. Puede ser introducida en la memoria de una computadora. Cada vez que, durante los cálculos, necesitemos un valor de la variable aleatoria con la distribución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

podemos tomar una tras otra las cifras de esta tabla.

La mayor tabla de números aleatorios publicada hasta hace varios años contenía 1 000 000 de cifras (véase RAND Corporation, *A million random digits with 100 000 normal deviates*, The Free Press, 1955).

Por supuesto, en lugar de utilizar un sombrero, fue obtenida empleando una técnica más moderna: una ruleta electrónica. Un esquema elemental de esta ruleta aparece en la figura siguiente.



El disco giratorio es frenado en seco y se toma la cifra señalada por la flecha.

Es preciso subrayar que no es tan fácil como parece obtener una buena tabla de números aleatorios. Todo aparato físico real genera variables aleatorias cuyas distribuciones difieren ligeramente de la distribución ideal (22).

Además, durante el experimento pueden surgir errores (por ejemplo, una de las tarjetas puede adherirse por cierto tiempo al forro del sombrero).

Por eso las tablas obtenidas suelen comprobarse minuciosamente a partir de tests estadísticos especiales para verificar que no haya contradicción entre unas u otras propiedades de los grupos de números y la hipótesis de que estos números representan valores de la variable aleatoria (22).

Veamos uno de los tests más sencillos. Consideremos una tabla que contiene  $N$  cifras. Supongamos que el número de ceros en esta tabla es  $v_0$ , el número de unos es  $v_1$ , el número de doses es  $v_2$ , etc. Calculemos la suma

$$\sum_{i=1}^9 (v_i \cdot 0,1 \cdot N)^2.$$

La teoría de las probabilidades permite predecir los límites entre los cuales puede estar comprendida esta suma, que no puede ser excesivamente grande (por cuanto la esperanza matemática de cada  $v_i$  es igual a  $0,1 \cdot N$ ) ni excesivamente pequeña (ya que esto equivaldría a una regularidad excesiva en la distribución de los valores).

Las tablas de números aleatorios se empleaban solo cuando los cálculos correspondientes al método Montecarlo se realizaban a mano. Esto se debía a que todas las computadoras electrónicas poseían una memoria interna relativamente reducida, en la que no se podía introducir una tabla grande. Por otra parte, tampoco convenía introducir la tabla en la memoria externa y recurrir constantemente a ella, ya que esto afectaría considerablemente la velocidad del cálculo.

Sin embargo, nunca se excluyó que, con el tiempo, la capacidad de memoria de las computadoras aumentaría sensiblemente y entonces las tablas de números aleatorios resultarían todavía de gran utilidad.

- **2. Generadores de números aleatorios.** La ruleta mencionada en el punto 1 anterior podría, al parecer, combinarse con la computadora y emplearse para generar, según sea necesario, números aleatorios. Pero todo dispositivo mecánico resulta demasiado lento comparado con la computadora. Por eso, para generar variables aleatorias suelen emplearse los ruidos en las válvulas electrónicas: si, durante un intervalo fijo  $\Delta t$  de tiempo, el nivel del ruido que sobrepasa el umbral escogido ocurre un número par de veces, se inscribe el cero; si esto ocurre un número impar de veces, se inscribe el uno (obviamente existen procedimientos más perfectos).



A primera vista, este es un procedimiento muy cómodo. Imaginemos  $m$  generadores de este tipo que funcionan sin cesar en forma paralela y envían ceros y unos aleatoriamente a todos los órdenes binarios de una célula especial. Cada ciclo corresponderá a un número de  $m$  órdenes. Durante el cálculo podemos dirigirnos en cualquier momento a esta célula y tomar de ella un valor de la variable aleatoria  $\gamma$  distribuida de manera uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ .

Este valor, claro está, será aproximado y quedará representado por una fracción binaria de  $m$  órdenes  $0, \alpha_{(1)} \alpha_{(2)} \dots \alpha_{(m)}$  donde cada  $\alpha_{(i)}$  imita la variable aleatoria con la distribución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, también este método tiene sus defectos. En primer lugar, es difícil comprobar la “calidad” de los números generados. Se hace necesario el control periódico ya que debido a distintos desarreglos puede surgir la así llamada *deriva en la distribución* (cuando los ceros y los unos en uno de los órdenes dejan de aparecer con la misma frecuencia).

En segundo lugar, todos los cálculos en las computadoras suelen realizarse dos veces para evitar intermitencias casuales. Pero, sin recurrir a la memoria durante los cálculos, es imposible reproducir los mismos números aleatorios; y si recurrimos a la memoria, volvemos al caso de las tablas.

Generadores de este tipo resultaron útiles, sin duda, cuando comenzaron a construirse computadoras especializadas adaptadas a la solución de problemas por el método Montecarlo. En las computadoras universales, que raramente aplican para los cálculos basados en números aleatorios, no es conveniente tener y mantener dispositivos especiales. Resulta mejor emplear los llamados *números pseudoaleatorios*.

→ **3. Números pseudoaleatorios** Cualquiera sea la calidad de los números aleatorios empleados –esta se controla mediante tests especiales–, podemos no interesarnos por el procedimiento aplicado para obtenerlos, exigiendo solamente que verifiquen el sistema de tests adoptado. Incluso, podemos intentar calcularlos a partir de una fórmula dada. Por supuesto, debe ser una fórmula muy ingeniosa.



Los números que se obtienen a partir de una fórmula y que imitan los valores de la variable aleatoria  $\gamma$  se denominan *números pseudoaleatorios*. La palabra “imitan” significa que estos números verifican una serie de tests como si fuesen valores de esta variable aleatoria.

El primer algoritmo destinado a la construcción de números pseudoaleatorios fue sugerido por John von Neumann y se conoce como el *método de centros de cuadrados*. Para explicarlo recurriremos a un ejemplo.

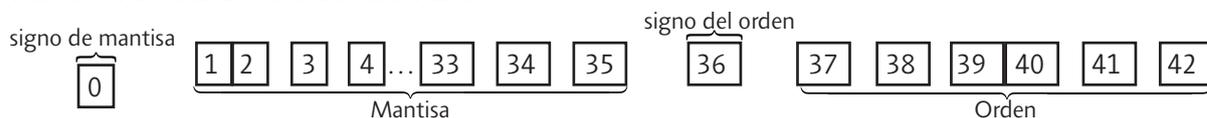
Consideremos el número  $\gamma_0 = 0,9876$  formado por cuatro cifras. Al elevarlo al cuadrado obtendremos el número  $\gamma_0^2 = 0,97535376$ , de ocho cifras. Tomemos las cuatro cifras que aparecen en el centro de este número y pongamos  $\gamma_1 = 0,5353$ .

Elevando ahora  $\gamma_1$  al cuadrado ( $\gamma_1^2 = 0,28654609$ ), escojamos de nuevo las cuatro cifras del centro y pongamos  $\gamma_2 = 0,6548$ . Procediendo de la misma forma, tendremos  $\gamma_2^2 = 0,42850116$ ;  $\gamma_3 = 0,8501$ ;  $\gamma_3^2 = 0,72267001$ ;  $\gamma_4 = 0,2670$ ;  $\gamma_4^2 = 0,07128900$ ;  $\gamma_5 = 1289$ , etc.

Podemos resumir este algoritmo con la fórmula  $\gamma_{k+1} = F(\gamma_k)$ , donde  $F$  implica el conjunto de operaciones que debemos realizar con el número  $\gamma_k$  para obtener  $\gamma_{k+1}$ . El número  $\gamma_0$  es un número dado.

Pero este método no puede considerarse satisfactorio pues da más números pequeños de lo que se necesita. Por eso fueron desarrollados por varios científicos otros algoritmos. Algunos se basan en las particularidades de las máquinas concretas. A título de ejemplo, I. M. Sóbol propone para uno de estos algoritmos empleados la computadora Strelá.

**Ejemplo.** Strelá es una computadora de tres direcciones con coma flotante. La célula en la que se inscribe el número  $x$  consta de 43 órdenes binarios:



La computadora opera con números binarios en forma normalizada:  $x = \pm q \cdot 2^p$ , donde  $p$  es el orden y  $q$ , la mantisa del número. En el orden  $j$ -ésimo de la célula puede figurar un cero o un uno; representemos por  $\varepsilon_j$  esta variable. Entonces,

$$q = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_{35}}{2^{35}}$$

y

$$p = \varepsilon_{37}2^5 + \varepsilon_{38}2^4 + \dots + \varepsilon_{42}2^0.$$

La condición de normalización  $0,5 \leq q \leq 1$  significa que  $\varepsilon_1$  es siempre igual a 1. El signo “+” se representa por el cero y el signo “-” por el uno.

El número  $\gamma_{k+1}$  se obtiene del número  $\gamma_k$  realizando tres operaciones:

- 1)  $\gamma_k$  se multiplica por una constante grande que, como regla, se toma igual a  $10^{17}$ ;
- 2) la imagen del producto  $10^{17} \gamma_k$  se desplaza en siete órdenes hacia la izquierda (de modo que los siete primeros órdenes del producto desaparecen mientras que en los órdenes del 86 al 42 aparecen ceros);
- 3) se toma el valor absoluto del número obtenido (después de normalarlo), que será precisamente  $\gamma_{k+1}$ .

Si arrancamos de  $\gamma_0 = 1$ , este proceso permite obtener más de 80 000 números diferentes  $\gamma_k$ ; después, en la sucesión surge un periodo y los números comienzan a repetirse. Diferentes controles de los 50 000 primeros números han dado resultados plenamente satisfactorios. Estos números se han empleado más de una vez para la solución de diversos problemas.

Las ventajas del método de números pseudoaleatorios son evidentes. En primer lugar, para obtener un número basta con realizar unas cuantas operaciones sencillas, y gracias a esto la velocidad de generación de números aleatorios es del mismo orden que la velocidad de funcionamiento de la calculadora MCE. En segundo lugar, el programa ocupa solo unas cuantas células de la memoria. En tercer lugar, cualquiera de los números  $\gamma_k$  puede ser reproducido fácilmente.

**CASIO**

fx-82LA PLUS  
NATURAL-V.P.A.M. 2nd edition

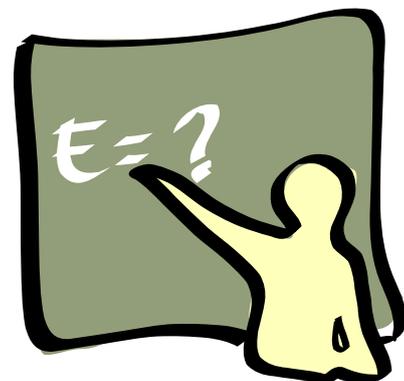
**CALCULADORA CIENTÍFICA  
FX-82LA PLUS**

Descubrí toda la línea CASIO en  
[www.calculadoras.ar](http://www.calculadoras.ar)

Por último, alcanza con comprobar una vez solamente la “calidad” de esta sucesión para poder aplicarla después reiteradamente y con seguridad en la solución de problemas semejantes.

El método tiene un único defecto: la “reserva” de los números pseudoaleatorios es limitada. Pero existen procedimientos que permiten obtener una cantidad mucho mayor de números. En particular, se pueden variar los números iniciales  $\gamma_0$ . Actualmente, los cálculos en los que se emplea el método Montecarlo se realizan, en su aplastante mayoría, aprovechando los números pseudoaleatorios. Más adelante, en números posteriores de *Leñitas Geométricas*, tendremos informaciones complementarias acerca de los números pseudoaleatorios.

## Un diálogo con los maestros

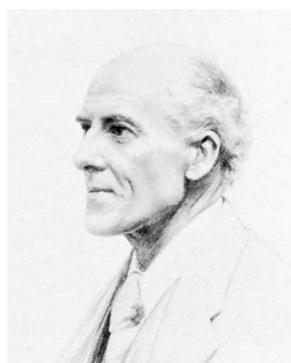


### Hablemos de Karl Pearson, padre de la estadística moderna

La estadística se constituyó paulatinamente como ciencia independiente a principios del siglo XX con los trabajos de los británicos Karl Pearson, sobre los mecanismos de la evolución y de la herencia, y Ronald Fisher, sobre tecnología agrícola. Posteriormente, la estadística se ha convertido en una base científica esencial de todas las ciencias.

Mucha gente piensa que el matemático típico es solo eso, matemático. Pues bien, entre los matemáticos famosos que hemos nombrado ha habido casi de todo: filósofos, teólogos, novelistas, jugadores, borrachos, políticos radicales de todas las tendencias y todos los gustos.

Johannes Kepler, por ejemplo, fue un gran astrónomo y matemático de los siglos XVI y XVII, pero también un verdadero precursor de los novelistas de ciencia-ficción. Lewis Carroll (cuyo verdadero nombre era Charles Ludwig Dodgson) fue el autor de *Alicia en el País de las Maravillas* y de otras obras igualmente famosas. Blaise Pascal es tan merecidamente famoso por sus *Pensamientos* religioso-filosóficos como por sus resultados matemáticos.



Karl Pearson

Karl Pearson (1857-1936), uno de los fundadores de la estadística moderna, fue también uno de estos genios. Nació en Londres y comenzó su trayectoria académica estudiando Derecho, entre otras cosas. Al mismo tiempo, se dedicaba a actividades políticas radicales y a componer obras literarias, como su novela *El nuevo Werther*.

En 1884, a sus 27 años, fue nombrado profesor de matemáticas aplicadas y mecánica en el University College de Londres. Allí enseñó e investigó hasta el año 1933 en que se retiró.

Sus principales trabajos estadísticos trataron de explorar matemáticamente los problemas biológicos de la herencia y la evolución. Además, inventó uno de los principales tests utilizados en la estadística actual, el llamado *test de la  $\chi^2$*  (ji o chi cuadrado), o también *prueba de Pearson*.

## Más aventuras al siglo xx

### Los métodos estadísticos

Si bien la matemática cambió profundamente de forma entre las dos guerras mundiales, también es cierto que buena parte de la matemática que siguió a la Segunda Guerra Mundial consistía en el comienzo de algo radicalmente nuevo que anunciaba una nueva era. A lo largo del siglo xx, la teoría de conjuntos y la teoría de la medida han ido invadiendo una parte cada vez más extensa de la matemática, pero pocas de sus ramas estadísticas, a las que Émile Borel había dedicado ya en 1909 sus *Elementos de la teoría de probabilidades*.



El primer año del nuevo siglo lo anunciaba ya propicio para la aplicación de la teoría de probabilidades, tanto a la física como a la genética, puesto que en el mismo año 1901 Josiah Willard Gibbs publicaba su obra *Elementary Principles in Statistical Mechanics* y Karl Pearson fundaba la revista *Biometrika*. En 1900, Pearson y Francis Galton (1822-1911), un primo de Charles Darwin muy precoz y estadístico nato que había estudiado los fenómenos de regresión y era profesor de Eugenesia en la Universidad de Londres, habían ya popularizado el criterio de la prueba de “chi-cuadrado”.

Con respecto a Henri Poincaré, uno de sus certificados fue el de “profesor de cálculo de probabilidades”, lo que indicaba un interés creciente por el tema. En Rusia, se inició el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados, especialmente en 1906-1907, por obra de Andréi Andréyevich Márkov (1856-1922), discípulo de Pafnuty Lvóvich Chebyshev y coeditor de las *Obras* (2 vols., 1899-1904) de su maestro.

En la teoría cinética de los gases y en muchos fenómenos sociales y biológicos, la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, por lo que, especialmente desde mediados del siglo xx, las cadenas de Márkov de probabilidades eslabonadas se han estudiado en forma muy detallada. En su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de probabilidades en expansión, los estadísticos encontraron a mano las herramientas necesarias, y hoy no es posible ya dar una exposición rigurosa de la teoría de probabilidades sin utilizar los conceptos de función medible y las teorías modernas de integración.

Siempre en Rusia, por ejemplo, Andréi Nicoláyevich Kolmogórov (1903-1987) hizo importantes progresos en la teoría de procesos de Markóv (1931) y dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía una fundamentación axiomática de la teoría de probabilidades, utilizando la medida de Lebesgue. El análisis clásico se había ocupado principalmente de funciones continuas, mientras que los problemas de probabilidades generalmente se refieren a casos discretos.

La teoría de la medida y las sucesivas extensiones del concepto de integral se adaptaban perfectamente a conseguir una asociación más estrecha entre el análisis y la teoría de probabilidades, especialmente a partir de mediados del siglo xx, cuando Laurent Schwartz (1915-2002), de la Universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones (1950-1951).

La función delta de Dirac utilizada en física atómica había venido a demostrar que las funciones patológicas, de las que se habían ocupado los matemáticos desde hacía más de un siglo, resultaban útiles también en la física. En los casos más difíciles, sin embargo, la diferenciabilidad desaparece, con los problemas consiguientes en la resolución de las ecuaciones diferenciales, uno de los principales lazos que conectan la matemática con la física, especialmente donde aparecen soluciones singulares.

Para superar esta dificultad introdujo Schwartz un concepto de diferenciabilidad más general, posible gracias al desarrollo de la teoría de espacios vectoriales generales durante la primera mitad del siglo por obra de Fréchet, Banach y otros. Un espacio vectorial es un conjunto  $\mathcal{L}$  de elementos  $a, b, c, \dots$ , que satisfacen ciertas

condiciones, entre las que está la exigencia de que si  $a$  y  $b$  son elementos de  $\mathcal{L}$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales (o complejos, en su caso), entonces  $\alpha a + \beta b$  es otro elemento de  $\mathcal{L}$ .

Si los elementos de  $\mathcal{L}$  son funciones, el espacio vectorial se denomina un espacio vectorial funcional, y una aplicación lineal de este espacio en el cuerpo de los números reales o complejos se llama un funcional lineal. Con esta nomenclatura, Schwartz entendía por una “distribución” un funcional lineal continuo sobre el espacio de las funciones que son diferenciables y satisfacen ciertas otras condiciones. La función de Dirac, por ejemplo, es un caso particular de distribución.

Schwartz dio entonces una definición adecuada de derivada de una distribución, de tal manera que la derivada de una distribución sea siempre otra distribución. Esto proporciona una potente generalización del análisis, con aplicaciones inmediatas a la teoría de probabilidades y a la física. El análisis funcional, que es esencialmente una generalización del cálculo de variaciones, y la teoría de distribuciones han sido también importantes campos de investigación en la matemática desde mediados del siglo xx.

### La aparición de las computadoras



La teoría de probabilidades y la estadística han estado a lo largo del siglo xx estrechamente unidas, no solo a la matemática pura, sino a otro campo que constituye una de las características diferenciales más notables de nuestra época, la de la dependencia cada vez mayor de las computadoras electrónicas o de “alta velocidad”. El tema de las máquinas calculadoras no era nuevo en absoluto, puesto que Pascal y Leibniz habían conseguido modestos éxitos en este campo casi 300 años antes.

Y, de hecho, el profeta de las máquinas calculadoras complejas había sido el matemático inglés del siglo xix Charles Babbage, personaje excéntrico que sostuvo durante toda su vida una polémica contra los organilleros, mientras intentaba desesperadamente conseguir fondos para completar su ambicioso proyecto de construir una “máquina diferencial”. “Organillero” viene de organillo que es un instrumento musical portátil inventado a principios del siglo xix en Inglaterra. Escritores argentinos como Jorge Luis Borges o Ernesto Sábato lo incluyeron en su obra con esa denominación, y se lo menciona en las letras de los tangos de la “guardia vieja”.

Este invento la calculadora de Charles Babbage, concebido en 1833, fue financiado durante algún tiempo por el gobierno británico, pero cuando el ministro de Hacienda cortó las subvenciones en 1842, Babbage lo comparó amargamente con el destructor del bello templo de Éfeso. La máquina imaginada por Babbage habría tenido mucha de la flexibilidad de las máquinas modernas, pero no su velocidad, obviamente. Habría podido efectuar todas las operaciones aritméticas, así como almacenar información para uso posterior, todo ello por medio de un complicado diseño de ruedas dentadas, engranajes y palancas.

Sin embargo, esta “máquina”, una verdadera calculadora digital, no se terminó nunca. La época moderna de la computadora mecánica se puede decir que comenzó hacia 1925 en el Massachusetts Institute of Technology, donde Vannevar Bush (1890-1974) y sus colegas construyeron una computadora analógica de gran tamaño, movida por motores eléctricos, pero mecánica en todo lo demás. En 1939 la International Business Machines Corporation comenzó a construir el MARK 1, que iba a ser un aparato electromecánico completamente automático, siguiendo las líneas del proyecto de Babbage, pero antes de estar terminado en 1944 ya había quedado anticuado frente a los planes para construir el ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*).

Esta fue la primera computadora totalmente electrónica, basada en el paso de haces de electrones por tubos de vacío. Los comienzos del proyecto se debieron a presiones militares, y entre los que colaboraron en el proyecto estuvo John von Neumann (1903-1957), que había nacido en Budapest y había enseñado en Berlín y en Hamburgo antes de trasladarse a los Estados Unidos en 1930, donde, junto con Einstein, fue uno de los primeros miembros permanentes del Institute for Advanced Study en 1933.

Entre 1944 y 1946 colaboró en la redacción de un informe para el ejército sobre las posibilidades que ofrecían las computadoras, y en 1949 la primera computadora programable comenzó a funcionar. Dos años más tarde la Sperry Rand Corporation terminaba de construir la UNIVAC I (*Universal Automatic Calculator*), pero el mundo de las computadoras cambia con tal rapidez que esta ya es hoy una pieza de museo expuesta en la Smithsonian Institution.

La electricidad ha alterado de tal manera las formas tradicionales de la vida del hombre, que se puede decir que vivimos en la era de la electricidad; y ahora los instrumentos electrónicos pueden estar a punto de cambiar en parte nuestro desarrollo matemático. Las computadoras han alcanzado tal grado de complejidad que sobrepasan en mucho los sueños de Babbage, que vivió solo un siglo antes de su época. Problemas que superaban de manera irremediable las posibilidades de cálculo de los matemáticos de épocas anteriores se han podido resolver recientemente con la ayuda de las computadoras más rápidas.

Si, como decía Kepler, la invención de los logaritmos duplicaba la vida de un astrónomo, ¿por cuánto más no han multiplicado las computadoras electrónicas las posibilidades de los matemáticos aplicados y los físicos! Con este poderío creciente se ha producido también una verdadera proliferación de nuevos campos de la matemática aplicada: programación lineal, teoría de juegos, investigación operativa, y muchos otros. Von Neumann, que fue uno de los matemáticos más creativos y multifacéticos del siglo xx, fue también un pionero en el nuevo planteamiento de la economía matemática.

La econometría hacía ya mucho tiempo que utilizaba el análisis matemático, pero fue sobre todo a través de la *Theory of Games and Economic Behavior* de Von Neumann y Oskar Morgenstern, publicada en 1944, como la llamada *matemática finita* vino a jugar un papel cada vez más importante en las ciencias sociales. Las interrelaciones entre las diversas ramas del pensamiento científico se fueron haciendo tan complejas que Norbert Wiener (1894-1964), un matemático prodigio y durante muchos años profesor de matemática en el Massachusetts Institute of Technology, publicó en 1948 su libro *Cybernetics*, que abría un campo nuevo dedicado al estudio del control y la comunicación en animales y máquinas.

Tanto Von Neumann como Wiener se interesaron profundamente por la mecánica cuántica, y el primero de los dos fue nombrado en 1955 miembro de la Atomic Energy Commission; sería equivocado pensar, sin embargo, que estos hombres y otros análogos eran simplemente matemáticos aplicados. Los dos ayudaron tanto o más que a la matemática aplicada a la matemática pura: a la teoría de conjuntos, a la teoría de grupos, al cálculo operacional, a la teoría de probabilidades y a la lógica matemática y los fundamentos de la matemática.

De hecho, Von Neumann fue quien, hacia el año 1929, dio su nombre a los espacios de Hilbert, así como la primera axiomatización de este concepto y la forma completamente abstracta que tienen hoy. Por su parte, Wiener desempeñó un importante papel a comienzos de la década de 1920 en los orígenes de la teoría moderna de los espacios lineales, y en particular en el desarrollo de la teoría de espacios de Banach. El espectacular desarrollo de la matemática aplicada durante el siglo xx no solo no ha frenado el desarrollo de la matemática pura, sino que en muchos casos lo ha impulsado, y tampoco el nacimiento de ramas nuevas de la matemática ha debilitado el vigor de las más antiguas.

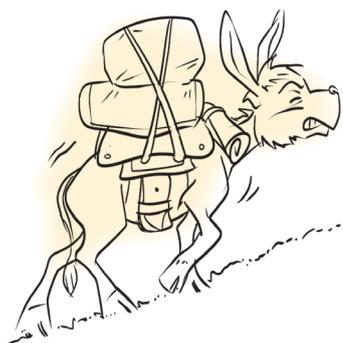
## MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA

### Hagamos estadística

#### Análisis de datos en un experimento

La estadística tiene gran aplicación para el análisis de los datos provenientes de experimentos. Un científico ha repetido una experiencia y ha recogido una gran cantidad de datos. ¿Qué hace con ellos?

1. Lo primero de todo es buscar una cifra que se pueda tomar como representativa de todos los datos. Se suele usar los dos parámetros vistos: la media, para las variables cuantitativas, y la moda para las cualitativas.
2. Viene bien saber cuánto se separan de la medida central los datos que han resultado del experimento, es decir, hace falta medir de algún modo la variabilidad. Se suelen usar la desviación típica y, a veces, el recorrido, que es la diferencia entre el valor mayor y el menor.



3. En un experimento se suele tratar de comparar dos series de datos, para tratar de establecer si un factor determinado influye y cuánto influye en el otro, por ejemplo, la cantidad de fertilizante y el crecimiento de una planta. Se trata de obtener alguna medida de la correlación entre las dos series de datos.
4. El experimentador desea saber hasta qué punto puede confiar en sus resultados a partir de los datos que obtiene. Se trata de medir el nivel de confianza de su experimento, mediante un número, que le viene a decir algo así como, "la probabilidad de que los mismos resultados se obtengan repitiendo este experimento es del 90 por ciento".

### Sobre el signo sumatorio, $\Sigma$

En algunas fórmulas conocidas aparece el signo  $\Sigma$  para indicar la suma de todos los elementos sobre los que actúa. Con  $\Sigma f$  significa suma de todas las frecuencias;  $\Sigma f x_i$ , significa suma de todos los productos que se obtienen al multiplicar cada valor  $x_i$ , por su correspondiente frecuencia. Pero a veces no está claro cuáles son todos los sumandos que queremos sumar. En estos casos hay que ponerlo expresamente. Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2.$$

**Propiedades:**

$$1. \sum_{i=1}^n k = n \cdot k.$$

$$2. \sum_{i=1}^n x_i = n \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = n \bar{x}.$$

$$3. \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

$$4. \sum_{i=1}^n kx_i = kx_1 + kx_2 + \dots + kx_n = k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = k \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$5. \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n (-2x_i \bar{x})}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2.$$

### El valor de las muestras

Deseamos contar el número de peces que hay en un gran estanque. Nuestra primera idea es montar una oficina de empadronamiento y poner un bando animando a todos los peces a que pasen por él, pero tras meditarlo un poco empezamos a dudar de la eficacia de este método y decidimos poner otro en práctica: pescamos con red, o mediante cualquier otra forma que no los lastime, un buen montón de ellos. Supongamos que son 343. Los señalamos (con una pequeña anilla, por ejemplo), y los devolvemos al estanque. Al cabo de varios días volvemos a sacar una muestra (286, por ejemplo). En esa muestra contamos que hay 37 peces señalados. Inducimos que se cumple lo siguiente:

$$(\text{proporción de peces señalados en el estanque}) = (\text{proporción de peces en la muestra de 286}).$$

Llamando  $N$  al número total de peces del estanque, la igualdad anterior queda así:

$$\frac{343}{N} = \frac{37}{286}$$

de donde se deduce que  $N = 2651$ . Inducimos, pues, que hay 2651 peces en el estanque.



Ahora debemos hacer las siguientes reflexiones.

¿Podemos asegurar que el número total de peces en el estanque es 2 651? Por supuesto que no. Esta valoración es aproximada.

Debemos, por tanto, conformarnos con dar el resultado de forma aproximada. Por ejemplo: el número total de peces está comprendido entre 2 400 y 2 900.

Aun así, no podemos estar seguros del todo. Nos conformaremos con decir que muy probablemente el número total de peces está entre 2 400 y 2 900.

### A jugar y experimentar

Esta experiencia anterior podemos imitarla bastante cómodamente y sin molestar a los peces.

Juntemos un buen montón de chapas, o cualquier otro objeto a nuestro alcance, en una gran caja. ¿Cuántas tenemos? Intentemos estimarlo sin contarlas todas. Para ello saquemos un montoncito, las contamos y las señalamos. Las devolvemos a la caja, removemos un buen rato para que se mezclen bien y sigamos los pasos del ejemplo de los peces del estanque.

Ahora tenemos la ventaja de que, después de hacer la estimación, podemos contarlas todas y comparar el número real con el número estimado.

Algunas reflexiones sobre este ejemplo:

1. La experiencia de los peces nos ha servido para estimar el total de ellos que había en el estanque. Pero podríamos haber utilizado esa muestra para estimar la media y la desviación típica de sus longitudes, o sus pesos. Los parámetros obtenidos en la muestra los identificaremos con los del total con cierta cautela: es probable que la media de los pesos de todos los peces del estanque sea aproximadamente igual a la media de los pesos de la muestra.
2. Observemos que por los boquetes de la red pueden escapar los peces chiquitines, es decir que el tipo de red utilizada produce una selección de tamaños en los peces de la muestra. De este modo, las conclusiones que saquemos no son del todo válidas. Si acaso, podremos sacar conclusiones sobre peces a partir de un cierto tamaño. Es lo mismo que si, para obtener datos sobre la renta de los ciudadanos, hiciéramos una encuesta telefónica. Los resultados serían erróneos, válidos tan solo para ciudadanos con teléfono.

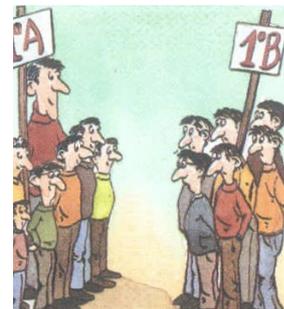
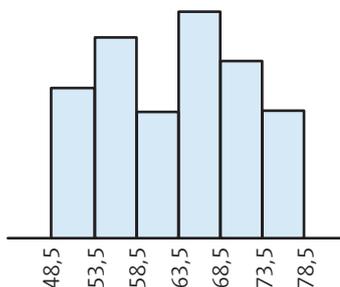
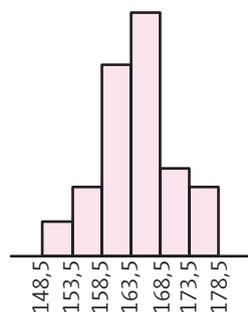
La elección de una muestra es una tarea muy delicada en la que hay que cuidar, entre otras cosas, que todos los individuos de la población tengan la misma probabilidad de estar incluidos en ella.

### Parámetros estadísticos

¿Cómo reconocer cuáles son los parámetros más adecuados a una distribución? ¿Cómo calcularlos con exactitud a partir de los datos iniciales?

Los parámetros estadísticos sirven para resumir en pocos números una distribución. Como es lógico, en el extracto se pierde mucha información, pero se gana en simplicidad, en eficacia y en operatividad. Los parámetros estadísticos por excelencia son la media y la desviación típica. Recordemos su significado y la forma de calcularlas.

Los alumnos de 1º A y 1º B se distribuyen, según sus estaturas, mediante las gráficas siguientes:



¿Qué gráfica corresponde a cada curso? De las siguientes cuatro posibilidades, ¿qué par de parámetros podría corresponder a cada curso?

1.  $\bar{x} = 150$ ;  $\sigma = 6,5$
2.  $\bar{x} = 170$ ;  $\sigma = 8,5$
3.  $\bar{x} = 163,25$ ;  $\sigma = 8,13$
4.  $\bar{x} = 164,5$ ;  $\sigma = 6,25$

Recordemos que  $\bar{x}$  es la media y  $\sigma$  la desviación típica.

### Significado de la media y de la desviación típica

La *media* de una distribución es el valor central de la misma alrededor del cual se distribuyen los valores. Con solo mirar las dos gráficas anteriores vemos que, en ambas, la media es, aproximadamente, 163,5 cm. Podemos descartar, pues, las opciones 1 y 2.

La desviación típica mide en cuánto los valores de la distribución están separados de  $x$ , en término medio. Una desviación típica alta significa valores muy dispersos, lejanos de la media. Una desviación típica baja significa que, en general, los valores están próximos a la media.

La primera de las dos distribuciones anteriores, la que corresponde a la clase B, tiene menos individuos de estaturas extremas (altos y bajos) y más de ellos en los intervalos centrales (medianos). Por tanto, su desviación típica debe ser menor que la de la otra distribución. Podemos, pues, asegurar que los parámetros de la opción 3 corresponden a la clase A y los de la 4, a la clase B.

### Cálculo de $\bar{x}$ y de $\sigma$

Recordemos que para una distribución estadística de valores  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ , se definen así:

*Media:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

*Desviación típica:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Cuando la distribución viene dada en una tabla de frecuencias.

$x_i$	$f_i$
$x_1$	$f_1$
$x_2$	$f_2$
$x_3$	$f_3$
...	...
$x_n$	$f_n$

Recordemos que en una distribución estadística cualquiera casi podemos asegurar que:

1. En el intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  están entre el 60% y el 80% de los datos observados.
2. En el Intervalo  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$  están entre el 90% y el 100% del total de datos.

Estos parámetros se pueden obtener mediante las siguientes expresiones:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

La desviación típica puede ponerse de otra forma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \frac{\sum f_i (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - 2\bar{x} \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} + n\bar{x}^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

Observemos que, en la última igualdad,  $2\bar{x}$  es factor común en todos los sumandos. Por lo tanto,

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_nx_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

Esta última expresión es notablemente más cómoda que la anterior para la obtención de  $\sigma$ , como veremos más adelante en los ejemplos.

**Uso de calculadora para la obtención de  $\bar{x}$  y de  $\sigma$ .** Hay calculadoras que tienen funciones estadísticas. Las reconoceremos porque, bajo algunas teclas, tienen las anotaciones:

$$\sum x^2, \sum x, n, \bar{x}, \sigma.$$



¿Cómo proceder con ellas para calcular  $\bar{x}$  y  $\sigma$  a partir de una tabla de frecuencias? Veámoslo:

- 1) Procuremos que el aparato se encuentre en disposición de efectuar cálculos estadísticos. En tal caso suele presentar en la parte alta de la pantalla la notación SD. En cada modelo, esto se consigue de un modo distinto.
- 2) Cerciorémonos de que no hay nada acumulado. Para ello, pulsemos la tecla  $\boxed{n}$ . Si sale 0 en la pantalla, está en condiciones de acumular los datos. Si no, borremos lo que hay en memoria mediante la secuencia  $\boxed{INV} \boxed{AC}$ .

Cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y procedimientos propios. Hay que leer con atención las instrucciones y orientaciones que se darán, pero además, cabe investigar directamente en el aparato cómo se realizan las funciones que se describen mientras se consulta el manual de la máquina.

Según el modelo de calculadora, los datos pueden introducirse con la tecla  $\boxed{DATA}$  o, también, con la tecla  $\boxed{x}$ .

- 3) Acumulación de datos:

1º dato  $\boxed{x}$  1ª frecuencia  $\boxed{M+}$

2º dato  $\boxed{x}$  2ª frecuencia  $\boxed{M+}$

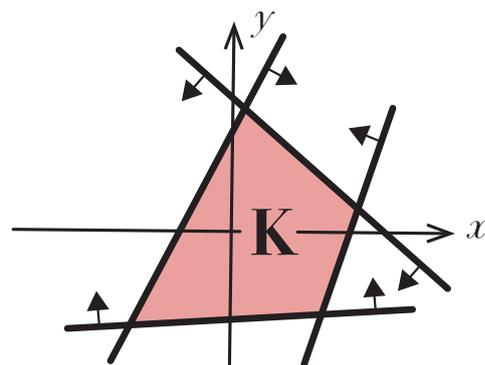
Así, sucesivamente, hasta haber cargado todos los datos. También se pueden cargar así:

1º dato  $\boxed{M+} \boxed{M+}$  ... (se pulsa la tecla  $\boxed{M+}$  tantas veces como aparezca este dato).

Si hemos introducido erróneamente algún dato y necesitamos corregirlo, podemos suprimirlo del siguiente modo:

Dato erróneo  $\boxed{INV} \boxed{M+}$

- 4) Pulsando cualquiera de las teclas  $\boxed{\eta}$ ,  $\boxed{\sum x^2}$ ,  $\boxed{\sum x}$ ,  $\boxed{\bar{x}}$ ,  $\boxed{\sigma_n}$  obtendremos el valor correspondiente, y esta consulta puede hacerse en cualquier momento del proceso. Después, si se quiere, se puede seguir introduciendo datos.

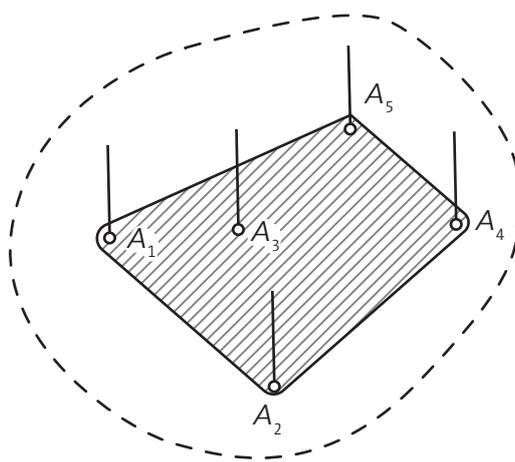


Continúa de *Leñitas Geométricas* N° 3, 5ª época, p. 21. Los sistemas de desigualdades lineales.

### 3. Cápsula convexa de un sistema de puntos



Imaginemos que en un plano con aspecto semejante al de una hoja de madera contrachapada sin límites, en los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$  están insertas unas clavijas.

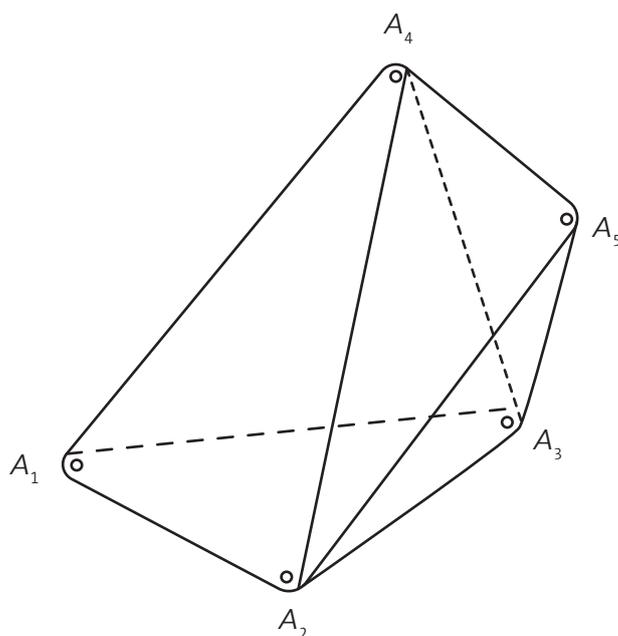


Estirando como corresponde un lazo de goma, abarquemos con él todas las clavijas (dentro de la línea de trazos). A continuación, dejemos el lazo contraerse en la medida en que lo permitan las clavijas. El conjunto de puntos abarcados por el lazo después de contraerse se muestra en rayado en la figura de arriba.

Esta multitud representa naturalmente un polígono convexo. Este último se llama capsula convexa del sistema de puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$ .

Realizar semejante experimento cuando los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$  se sitúan en el espacio en vez de en el plano es bastante difícil.

No obstante, demos libertad a la imaginación y supongamos que hemos logrado meter los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , en una bolsa de film plástico ajustada. Esta bolsa se contraerá hasta que comiencen a impedirlo algunos de los puntos. Por último, llegará el momento en que la bolsa ya no podrá seguir ajustándose.



Claramente, al llegar este momento, la bolsa toma la forma de un poliedro convexo con sus vértices en algunos de los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . La región del espacio abarcada por este poliedro también se llama *cápsula convexa del sistema de puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$* .

La definición que acabamos de dar de la cápsula convexa, aunque es muy evidente, no es del todo irreplicable desde el punto de vista del "rigor matemático". A continuación, daremos su definición estricta.

Supongamos que  $A_1, A_2, \dots, A_p$  es un conjunto arbitrario de puntos (en un plano o un espacio). Examinemos todos los puntos que puedan tener la forma

$$s_1 \cdot A_1 + s_2 \cdot A_2 + \dots + s_p \cdot A_p. \quad (1)$$

siendo  $s_1, s_2, \dots, s_p$ , cualesquiera números no negativos, cuya suma es igual a la unidad.

$$s_1, s_2, \dots, s_p \geq 0 \quad \text{y} \quad s_1 + s_2 + \dots + s_p = 1. \quad (2)$$

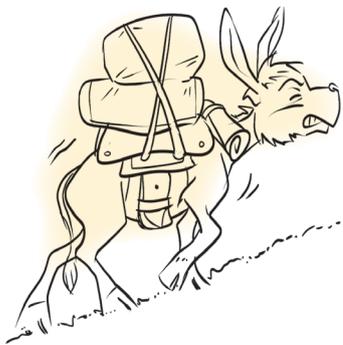
**Definición.** El conjunto de puntos de la forma (1) con la condición (2) se denomina *cápsula convexa del sistema de puntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$*  y se designa

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle.$$

Para convencernos de que esta definición no difiere de la anterior, veamos en primer lugar los casos  $p = 2$  y  $p = 3$ . Siendo  $p = 2$ , tendremos dados dos puntos  $A_1$  y  $A_2$ . El conjunto  $\langle A_1, A_2 \rangle$ , conforme a la afirmación (1) recién establecida, es el segmento  $\overline{A_1 A_2}$ .

Si  $p = 3$  tendremos dados tres puntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$ . Demostremos que el conjunto  $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$  está compuesto por todos los puntos que yacen dentro y en los lados del triángulo  $A_1 A_2 A_3$ .

Y, en general, demostremos el siguiente lema.



**Lema.** El conjunto  $\langle A_1, \dots, A_{p-1}, A_p \rangle$  está compuesto por todos los posibles segmentos que unen el punto  $A_p$  con los puntos del conjunto  $\langle A_1, \dots, A_{p-1} \rangle$ .

**Demostración.** En lo sucesivo, para comodidad de escritura, designaremos el conjunto  $\langle A_1, \dots, A_{p-1} \rangle$  por  $\mathcal{M}_{p-1}$  y el conjunto  $\langle A_1, \dots, A_{p-1}, A_p \rangle$  por  $\mathcal{M}_p$ .

Veamos cualquier punto  $A \in \mathcal{M}$ . Este punto tiene la forma

$$A = s_1 A_1 + \dots + s_{p-1} A_{p-1} + s_p A_p,$$

siendo

$$s_1, \dots, s_p \geq 0, \quad s_1 + \dots + s_p = 1.$$

Si  $s_p = 0$ , entonces  $A \in \mathcal{M}_{p-1}$ , o sea, el conjunto  $\mathcal{M}_{p-1}$  es parte de  $\mathcal{M}_p$ . Si  $s_p = 1$ , entonces  $A = A_p$ , es decir, el punto  $A_p$  pertenece a  $\mathcal{M}_p$ . Así pues,  $\mathcal{M}_p$  contiene a  $\mathcal{M}_{p-1}$  y al punto  $A_p$ . A continuación, demostraremos que cualquier segmento  $A'A_p$ , siendo  $A' \in \mathcal{M}_{p-1}$ , pertenece totalmente a  $\mathcal{M}_p$ .

Si  $A$  es un punto de tal segmento, entonces

$$A = tA' + sA_p \quad (t, s \geq 0, t + s = 1).$$

Por otra parte, según la definición del punto  $A'$ , tenemos

$$A' = t_1 A_1 + \dots + t_{p-1} A_{p-1} \quad (t_1, \dots, t_{p-1} \geq 0, t_1 + \dots + t_{p-1} = 1)$$

por consiguiente,

$$A = tt_1 A_1 + \dots + tt_{p-1} A_{p-1} + sA_p.$$

Suponiendo que  $tt_1 = s_1, \dots, tt_{p-1} = s_{p-1}, s = s_p$ , obtenemos (1) y (2). Con esto queda demostrado que  $A \in \mathcal{M}$ . Así pues, cualquiera de los segmentos indicados pertenece totalmente a  $\mathcal{M}_p$ .

Nos queda por comprobar que el conjunto  $\mathcal{M}_p$  no contiene otra cosa que no sean estos segmentos, es decir, que cualquier punto  $A$  de  $\mathcal{M}_p$  pertenece a uno de los segmentos a considerar.

Sea  $A \in \mathcal{M}_p$ . Entonces, tenemos (1) y (2). Se puede considerar  $s_p \neq 1$ , de lo contrario,  $A = A_p$  y entonces no nos queda nada que demostrar. Pero siendo  $s \neq 1$ , entonces  $s_1 + \dots + s_{p-1} = 1 - s_p > 0$ ; por lo tanto, podemos escribir

$$A = (s_1 + \dots + s_{p-1}) \left[ \frac{s_1}{s_1 + \dots + s_{p-1}} A_1 + \dots + \frac{s_{p-1}}{s_1 + \dots + s_{p-1}} A_{p-1} \right] + s_p A_p.$$

La expresión entre corchetes determina cierto punto  $A'$  perteneciente a  $\mathcal{M}_{p-1}$ , debido a que los coeficientes de  $A_1, \dots, A_{p-1}$  en esta expresión no son negativos y su suma es igual a 1. O sea,

$$A = (s_1 + \dots + s_{p-1}) A' + s_p A_p.$$

Puesto que los coeficientes de  $A'$  y  $A$  tampoco son negativos y su suma es igual a 1, entonces el punto  $A$  se encuentra en el segmento  $\overline{A'A}$ . Con esto finaliza la demostración del lema.

Ahora no es difícil comprobar que tanto la definición evidente como la estricta que hemos dado para la cápsula convexa son equivalentes. En efecto, independientemente de cuál de las dos definiciones utilicemos como base, el paso de la cápsula convexa del sistema  $A_1, \dots, A_{p-1}$  a la cápsula convexa del sistema  $A_1, \dots, A_{p-1}, A_p$  transcurre en ambos casos en conformidad con una misma regla: el punto  $A_p$  debe unirse mediante segmentos con todos los puntos de la cápsula convexa para  $A_1, \dots, A_{p-1}$  (con una definición evidente de cápsula convexa, dicha regla se manifiesta directamente; si la definición es estricta, esta regla forma el contenido del lema).

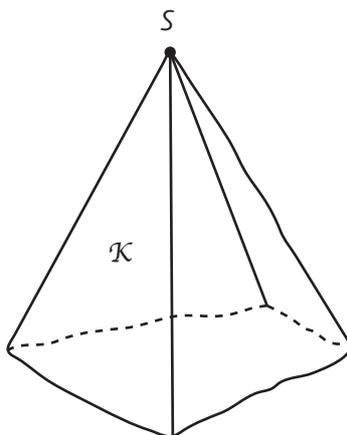
Ahora, si tenemos en cuenta que siendo  $p = 2$ , conforme a ambas definiciones, obtenemos un mismo conjunto, o sea, el segmento  $\overline{A_1 A_2}$ . Entonces, la equivalencia de las dos definiciones se hace evidente.

Sin embargo, no hemos justificado aún por completo el término "cápsula convexa", pues, no tenemos demostrado que el conjunto  $\langle A_1, A_2, \dots, A_p \rangle$  es siempre convexo. Hagámoslo a continuación.

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos arbitrarios de este conjunto, tales que:

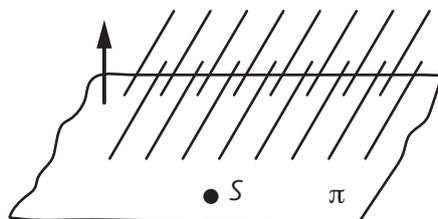


Un ejemplo de cono poliedro convexo puede ser una región convexa en el espacio, cuyos confines o límites constituyen cierto ángulo poliedro con el vértice  $S$  –algo parecido a una pirámide convexa, ilimitada y sin base, que se extiende sin límites desde su vértice– (en la figura siguiente se muestra una de estas pirámides con cuatro caras).



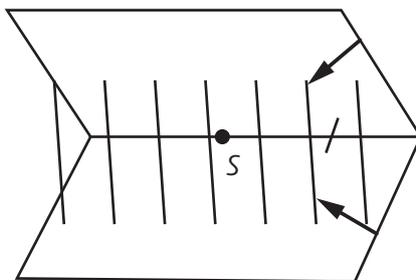
También puede haber casos menos interesantes, como los que siguen.

1. Un semiespacio.



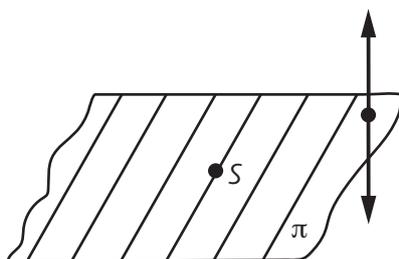
En este “cono”, el vértice puede ser cualquier punto  $S \in \pi$ , siendo  $\pi$  el plano confín de dicho semiespacio.

2. La intersección de dos semiespacios cuyos planos confines se cortan por una recta  $l$  (ver la figura siguiente)



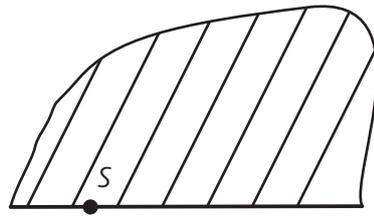
puede ser cualquier punto  $S \in l$ .

3. Un plano. Naturalmente, cualquier plano  $\pi$  en el espacio puede considerarse como la intersección de dos semiespacios, situados en diferentes lados de  $\pi$ .



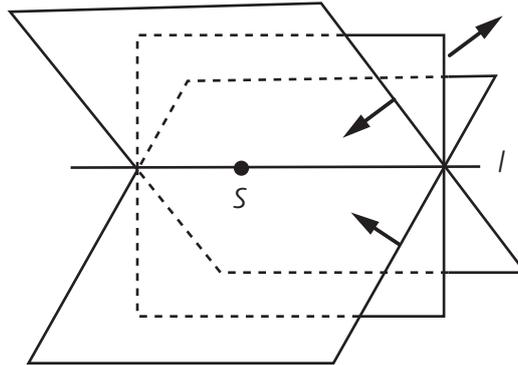
En este caso, el vértice puede ser cualquier punto  $S \in \pi$ .

4. Un semiplano.



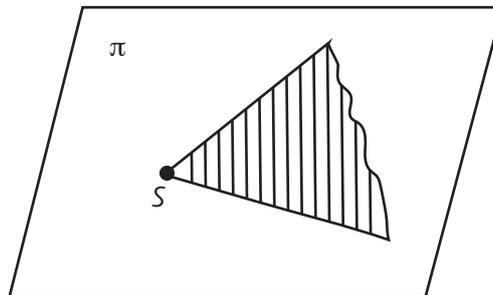
El vértice  $S$  puede ser cualquier punto de la recta confín.

5. Una recta. En el espacio, cada recta  $l$  puede obtenerse mediante la intersección de tres semiespacios, cuyos planos confines pasan por  $l$ , como se muestra en la figura abajo.



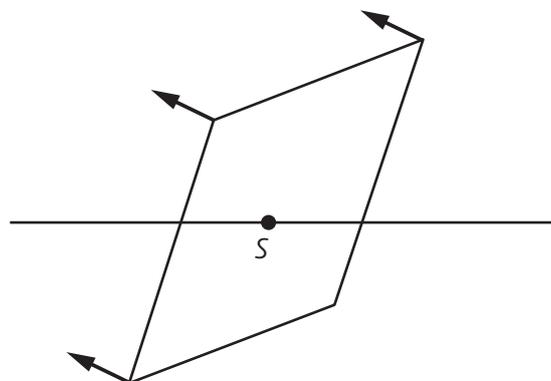
El vértice  $S$  puede ser cualquier punto de la recta  $l$ .

6. Un ángulo (menor que  $180^\circ$ ) en un plano arbitrario  $\pi$ :



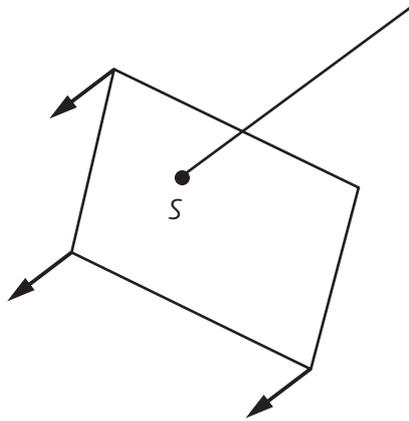
Este ángulo puede resultar de la intersección del plano  $\pi$  con dos semi espacios (¿cómo, concretamente?).

7. Un rayo.



Un rayo puede ser considerado como la intersección de una recta con un semiespacio. El vértice  $S$  es el origen del rayo.

8. Un punto. Un "cono" semejante puede obtenerse tomando la parte común entre un rayo y un respectivo semiespacio:



Claro que los ejemplos enumerados de 1 a 8 difieren (unos en menor, otros en mayor grado) de la habitual utilización de la palabra “cono”, pero nos vemos obligados a conformarnos con ello si queremos conservar la definición general de cono poliedro convexo dada al principio.

Ahora procuraremos demostrar, en pocas palabras, que los conjuntos que acabamos de enumerar representan todos los conos convexos en el espacio.

Supongamos que  $\rho$  significa cierta cantidad de semiespacios cuya intersección constituye el cono considerado  $\mathcal{K}$ . Siendo  $\rho = 1$ , nuestra afirmación es válida, puesto que entonces  $\mathcal{K}$  es un semiespacio. Un simple cálculo, que proponemos hacer, muestra que nuestra afirmación es válida para el cono obtenido mediante la intersección de  $\rho$  semiespacios, y lo será también para un cono obtenido mediante la intersección de  $\rho + 1$  semiespacios. De esto, en conformidad con el principio de inducción completa, se deduce que nuestra afirmación es válida para cualquier  $\rho$ .

Los conos poliedros convexos presentan muchas propiedades interesantes, cuya profundización superaría el espacio disponible; no obstante, procuraremos exponer algunas nociones, en parte aquí mismo y en parte más adelante, en un próximo número de *Leñitas Geométricas*.

Formulemos una definición o, mejor dicho, una designación. Sea  $B_1, B_2, \dots, B_q$ , el conjunto arbitrario de una cantidad finita de puntos (en el espacio). Con los símbolos  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  designaremos el conjunto de puntos de la forma

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 + \dots + t_q B_q,$$

siendo  $t_1, t_2, \dots, t_q$ , números arbitrarios no negativos.

¿Qué representa geoméricamente el conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$ ? De la definición queda claro que este conjunto representa la suma de los conjuntos  $\langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle, \dots, \langle B_q \rangle$ ; por eso, primero debemos determinar qué representa el conjunto  $\langle B \rangle$ , es decir, el conjunto de puntos de la forma  $tB$ , siendo  $t$  cualquier número no negativo y  $B$  un punto prefijado. La respuesta a esta última pregunta es evidente: si  $B$  es el origen de las coordenadas, entonces el conjunto  $\langle B \rangle$  también coincide con este origen, pues de lo contrario  $\langle B \rangle$  es un rayo que parte del origen de dichas coordenadas y que pasa por el punto  $B$ .

Ahora observemos que la suma de cualquier conjunto con el origen de las coordenadas nos da nuevamente este mismo conjunto; con esto queda claro que al examinar el conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  no perdemos nada, si consideramos todos los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_q$  diferentes del origen de las coordenadas. En este caso, el conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  representará la suma de los rayos  $\langle B_1 \rangle, \langle B_2 \rangle, \dots, \langle B_q \rangle$ .

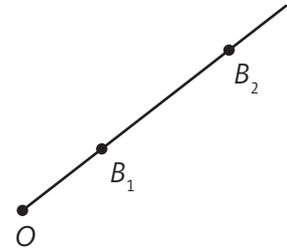
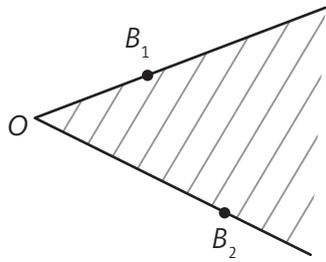
La última observación hace casi evidente el siguiente lema.

**Lema.** El conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  es la unión de los segmentos que reúnen cada punto del conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  con cada punto del rayo  $\langle B_q \rangle$ .

Una estricta demostración de este lema se realiza con el mismo procedimiento que para demostrar el lema análogo anterior. Recomendamos hacerla.

Partiendo de este lema, es fácil deducir que  $\langle B_1 B_2 \rangle$  es un ángulo, una recta, o bien un rayo:





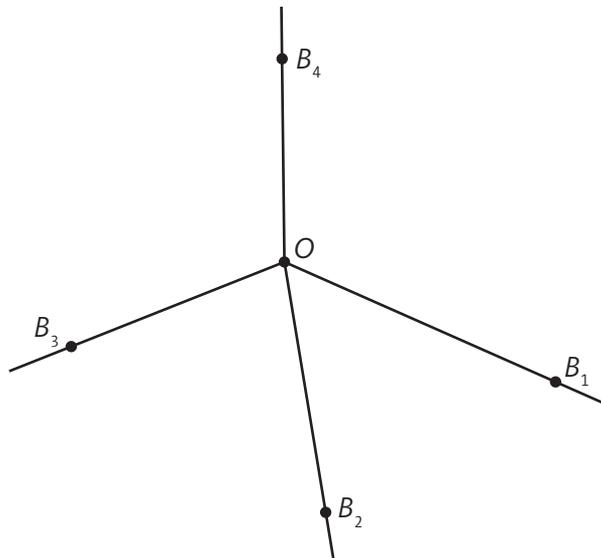
A continuación, será fácil establecer que  $\langle B_1, B_2, B_3 \rangle$  es uno de los siguientes conjuntos: una pirámide triangular ilimitada, un plano, un semiplano, un ángulo, una recta o un rayo.

Ahora está claro que entre los conjuntos  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  y los conos poliedros convexos debe existir una relación estrecha. Y esta relación efectivamente existe. Para mayor claridad formularemos las respectivas afirmaciones bajo la forma de dos teoremas.



**Teorema 1.** El conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$ , o bien coincide con todo el espacio, o bien representa cierto cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas.

En efecto, el conjunto  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$  puede coincidir con todo el espacio; lo demuestra el siguiente ejemplo. Consideremos cuatro puntos  $B_1, B_2, B_3, B_4$  situados de tal forma que los rayos  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$  constituyen, por pares, ángulos obtusos, como muestra la figura de abajo.



Cada uno de los conjuntos  $\langle B_1, B_2, B_3 \rangle, \langle B_1, B_2, B_4 \rangle, \langle B_1, B_3, B_4 \rangle, \langle B_2, B_3, B_4 \rangle$  representa una pirámide triangular ilimitada con el vértice en el origen de las coordenadas. Evidentemente, el conjunto  $\langle B_1, B_2, B_3, B_4 \rangle$  contiene cada una de estas pirámides. Ahora bien, la unión de dichas pirámides coincide con todo el espacio.

**Teorema 2.** Cualquier cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas es un conjunto de la forma  $\langle B_1, B_2, \dots, B_q \rangle$ .

**Demostración del teorema 1.** La daremos en rasgos generales. Utilizaremos para ello el método de inducción matemática completa.

La confirmación del teorema, siendo  $q = 1$ , es evidente. Supongamos ahora que este teorema se cumple para los conjuntos de la forma  $\langle B_1, \dots, B_q \rangle$  y, basándonos en este hecho, demostremos su validez para el conjunto  $\langle B_1, \dots, B_q, B_{q+1} \rangle$ .

Conforme con el presupuesto de inducción,  $\langle B_1, \dots, B_q \rangle$  representa a todo el espacio, o bien cierto cono poliedro convexo en este espacio. El primer caso, prácticamente, no necesita demostración, puesto que entonces  $\langle B_1, \dots, B_q, B_{q+1} \rangle$  es también todo el espacio.

Sea que tiene lugar el segundo caso:  $\langle B_1, \dots, B_q \rangle$  es el cono poliedro convexo  $\mathcal{K}$ . Según el lema, el conjunto  $\langle B_1, \dots, B_q, B_{q+1} \rangle$  es la unión de los segmentos que van desde cada punto del conjunto  $\mathcal{K}$  hasta cada punto del rayo  $(B_{q+1})$ .



Pero, como hemos demostrado anteriormente, cualquier cono poliedro convexo  $\mathcal{K}$  es, o bien una pirámide convexa ilimitada, o bien uno de los conjuntos 1 a 8. Examinando para cada uno de estos dos casos la unión de segmentos que acabamos de indicar, no es difícil convencerse de que esta unión o bien coincide con todo el espacio, o bien representa de nuevo un cono poliedro convexo.

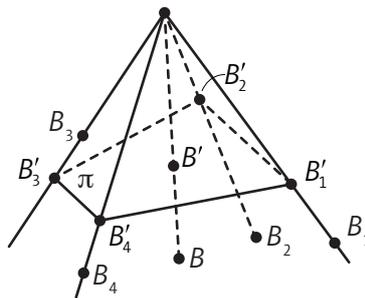
Así pues, el teorema es válido para conjuntos de la forma  $\langle B_1 \rangle$ , así como también para  $\langle B_{1'} \dots, B_q, B_{q+1} \rangle$ , puesto que lo hemos considerado justo para  $\langle B_{1'} \dots, B_q \rangle$ . De ello se deduce que este teorema es válido para cualquier  $q$ .



**Demostración del teorema 2.** Supongamos que  $\mathcal{K}$  es un cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas  $O$ . Como hemos dicho,  $\mathcal{K}$  o bien es una pirámide convexa ilimitada, o bien uno de los conjuntos 1 a 8.

Supongamos que  $\mathcal{K}$  es una pirámide. Elijamos un punto en cada una de sus aristas; obtenemos un sistema de puntos  $B_1, B_2, \dots, B_q$ . Afirmamos que el conjunto  $\langle B_{1'} B_2 \dots, B_q \rangle$  es, precisamente,  $\mathcal{K}$ .

Para demostrarlo examinemos un plano  $\pi$  cualquiera, que corta todas las aristas de la pirámide  $\mathcal{K}$ . Obtenemos los puntos  $B_1', B_2', \dots, B_q'$ .



Es evidente que

$$B_1' = k_1 B_{1'}; \quad B_2' = k_2 B_2; \quad \dots; \quad B_q = k_q B_q; \quad (1)$$

siendo  $k_1, k_2, \dots, k_q$  ciertos números no negativos.

Supongamos ahora que  $B$  es cualquier punto de nuestra pirámide diferente de su vértice  $O$ . El rayo  $\overline{OB}$  se cruza con el plano  $\pi$  en cierto punto  $B'$ . Es evidente que  $B'$  pertenece a la cápsula convexa del sistema  $B_1', B_2', \dots, B_q'$  y, por lo tanto,

$$B' = s_1 B_1' + s_2 B_2' + \dots + s_q B_q'.$$

Sean  $s_1, s_2, \dots, s_q$  números no negativos cuya suma es igual a 1. Ahora, si tenemos en consideración la afirmación (1) obtenemos

$$B' = s_1 k_1 B_{1'} + s_2 k_2 B_2 + \dots + s_q k_q B_q$$

y teniendo también en consideración que  $B' = kB$  ( $k > 0$ ), obtenemos

$$B = t_1 B_{1'} + t_2 B_2 + \dots + t_q B_q$$

donde

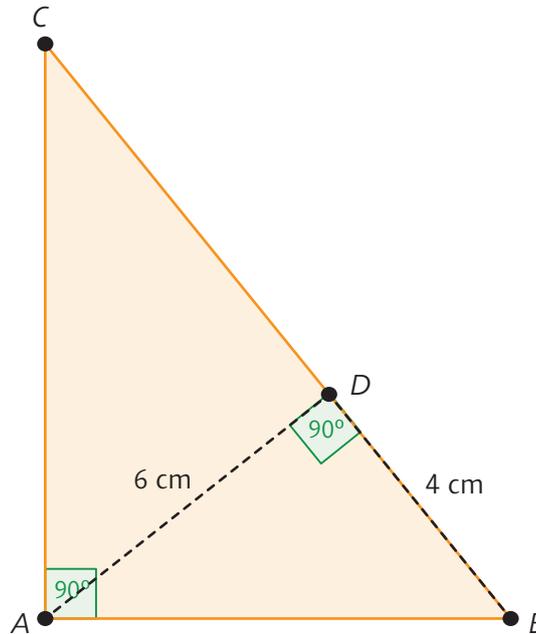
$$t_i = \frac{s_i k_i}{k}; \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Así pues, hemos demostrado que cualquier punto  $B$  de la pirámide  $\mathcal{K}$  pertenece al conjunto  $\langle B_{1'} B_2 \dots, B_q \rangle$ . Lo recíproco, es decir, que cualquier punto del conjunto  $\langle B_{1'} B_2 \dots, B_q \rangle$ , pertenece a  $\mathcal{K}$  es evidente. O sea,  $\mathcal{K}$  coincide con  $\langle B_{1'} B_2 \dots, B_q \rangle$ .





Hallar el área del triángulo  $ABC$  utilizando la altura  $AD$  de 6 cm y el segmento  $BD$  de 4 cm.



**Solución**

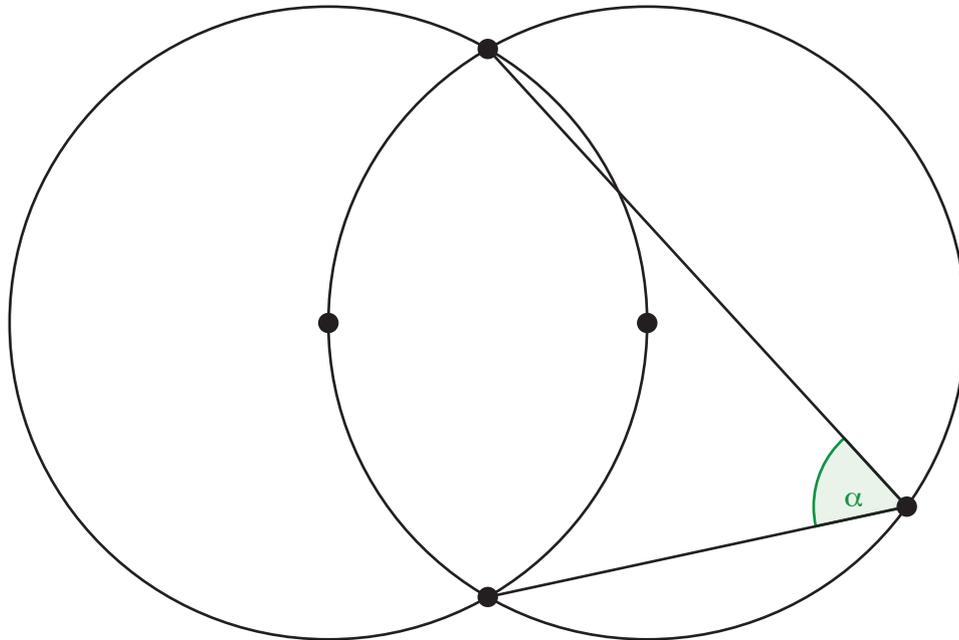
Los triángulos  $ABD$  y  $ADC$  son rectángulos y el ángulo en el vértice  $B$  de  $ABD$  es igual al ángulo en el vértice  $A$  de  $ADC$ , luego son triángulos semejantes. De la relación:

$$\frac{D}{6} = \frac{6}{4}$$

resulta que  $CD$  mide 9 cm. Entonces, el área de  $ABC$  es  $39 \text{ cm}^2$ .

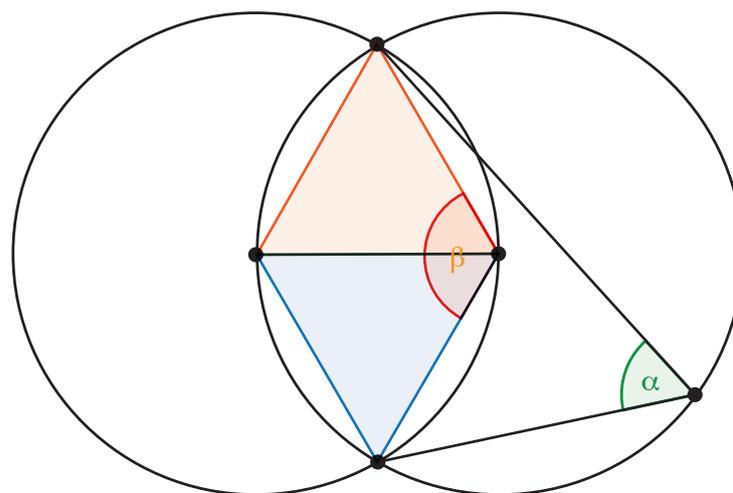


En la figura, cada circunferencia pasa por el centro de la otra. Hallar el valor del ángulo  $\alpha$  dado en la figura.



**Solución**

Como cada circunferencia pasa por el centro de la otra, las circunferencias tienen radios del mismo valor, igual a la distancia entre sus centros. Los triángulos coloreados son equiláteros, puesto que sus lados son radios de las circunferencias,



El ángulo central  $\beta$  mide  $120^\circ$ , luego el ángulo inscrito  $\alpha$  debe medir  $60^\circ$ , es decir, la mitad del central correspondiente.