



# Leñitas Geométricas\*

para el Fogón Matemático de los Festivales

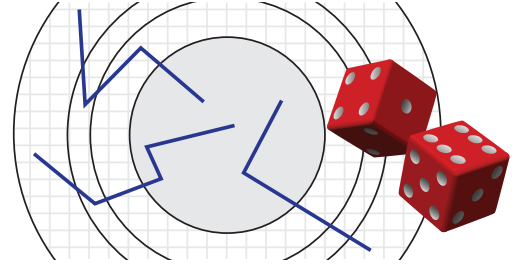
De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✕ N° 4  
20 de abril de 2023



"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

## El Método Montecarlo



### Simulación de variables aleatorias

## 2. Variables aleatorias



Suponemos que estamos más o menos familiarizados con el concepto de probabilidad y pasamos directamente al de variable aleatoria.

Las palabras "variable aleatoria" suelen emplearse para subrayar que se ignora el valor concreto que tomará esta variable. Sucede también que incluso encierren un desconocimiento de cuál es esta misma variable.

En cambio, el matemático emplea estos términos dándoles un contenido positivo bien específico. Efectivamente, decimos no conocer el valor que tomará esta variable en un caso concreto dado, pero sabemos qué valores puede tomar, así como las probabilidades de que sean unos u otros valores.

Sobre la base de estos datos no podemos predecir con exactitud el resultado de una prueba relacionada con esta variable aleatoria; no obstante, sí podemos prever con gran seguridad los resultados de un gran número de pruebas. Cuanto mayor sea el número de pruebas, mayor exactitud tendrán nuestras predicciones.

Es decir, para definir una variable aleatoria es preciso señalar los valores que puede tomar y las probabilidades de estos valores.

### Publicación reciente

**Los números complejos en la geometría del plano. Teorema de Ptolomeo. Potencia.**

**fenchu@oma.org.ar**

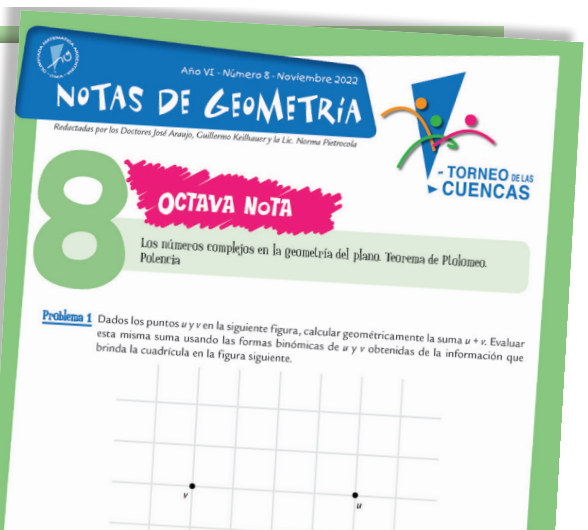
☎ **11 4826 8976**

📞 **+54 9 11 5035 7537**



**¡Hacé tu pedido!**

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.



\* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

→ **1. Variables aleatorias discretas.** Se dice que la variable aleatoria  $\xi$  es *discreta* si puede tomar valores en un conjunto discreto de valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . **La teoría de probabilidades estudia también variables aleatorias discretas que pueden tomar un número infinito de valores.** Una variable aleatoria discreta se define mediante la tabla

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (T)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son los valores posibles de la variable  $\xi$  y  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son las probabilidades que les corresponden. Hablando con más precisión, la probabilidad de que la variable aleatoria  $\xi$  tome el valor  $x_i$  (designaremos esta probabilidad por  $P\{\xi = x_i\}$ ) es igual a  $p_i$ :

$$P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

La tabla (T) se denomina *distribución de la variable aleatoria*.

Hablando en términos generales, los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pueden ser cualesquiera. En cambio, las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$  deben cumplir dos condiciones:

a) todos los números  $p_i$  deben ser positivos:

$$p_i > 0; \quad (1)$$

b) la suma de todos los  $p_i$  debe ser igual a 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2)$$

La última condición significa que  $\xi$  debe necesariamente tomar en cada caso uno de los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Se denomina *esperanza matemática* de la variable aleatoria  $\xi$  el número

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3)$$

Para aclarar el significado real de esta magnitud, la representaremos bajo la forma

$$M\xi = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

De aquí puede verse que  $M\xi$  es el valor medio o media ponderada de la variable  $\xi$ , con la particularidad de que los valores  $x_i$  de mayor probabilidad figuran en la suma con pesos mayores.



**La media ponderada aparece con frecuencia en las más diversas ramas de la ciencia. Por ejemplo, en la mecánica: si en los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , del eje  $Ox$  están concentradas las masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , la abscisa del centro de gravedad de este sistema se determina mediante la fórmula**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

**Por supuesto, la suma de todas las masas puede ser, en este caso, distinta de la unidad.**

Señalemos las propiedades principales de la *esperanza matemática*: si  $c$  es una variable no aleatoria, se tiene

$$M(\xi + c) = M\xi + c \quad (4)$$

$$M(c\xi) = c M\xi, \quad (5)$$

si  $\xi$  y  $\eta$  son dos variables aleatorias cualesquiera, se tiene

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (6)$$

Se denomina *varianza de la variable aleatoria*  $\xi$  el número

$$D \xi = M |(\xi - M \xi)^2|. \quad (7)$$

Por consiguiente, la *varianza*  $D \xi$  es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de la variable aleatoria de su valor medio  $M \xi$ . Es obvio que siempre se tiene  $D \xi > 0$ .

La esperanza matemática y la varianza son las características numéricas más importantes de la variable aleatoria  $\xi$ . ¿Qué valor práctico tienen?

Supongamos que hemos observado varias veces la variable  $\xi$  obteniendo los valores  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  (cada uno de los cuales es igual a uno de los números  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ); entonces, la media aritmética de estos valores será próxima a  $M \xi$ :

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \approx M \xi \quad (8)$$

y la varianza  $D \xi$  caracterizará la dispersión de estos valores alrededor del valor medio  $M \xi$ .

Empleando (4), (5) y (6) podemos dar otra forma a (7):

$$D \xi = M |\xi^2 - 2M \xi \cdot \xi + M \xi^2| = M \xi^2 - 2M \xi \cdot M \xi + M \xi^2$$

de donde

$$D \xi = M \xi^2 - (M \xi)^2. \quad (9)$$

Resulta más fácil, para utilizar como regla, calcular la varianza aplicando la fórmula (9) en lugar de la fórmula (7).

Señalemos las propiedades principales de la varianza.

Si  $c$  es una variable no aleatoria, se tiene

$$D(\xi + c) = D \xi, \quad (10)$$

$$D(c \xi) = c^2 D \xi. \quad (11)$$

En la teoría de las probabilidades desempeña un papel importante el concepto de *independencia* de variables aleatorias. En realidad, se trata de un concepto bastante complejo; pero en los casos más sencillos la cuestión se aclara fácilmente. Supongamos que además de la variable  $\xi$  estamos observando otra variable aleatoria  $\eta$ . Si la distribución de la variable  $\xi$  no se altera al conocerse el valor que ha tomado la variable  $\eta$ , es lógico decir que no depende de  $\eta$ .

Para dos variables aleatorias independientes  $\xi$  y  $\eta$  son válidas las relaciones

$$M(\xi \eta) = M \xi \cdot M \eta \quad (12)$$

$$D(\xi + \eta) = D \xi + D \eta. \quad (13)$$

**Ejemplo.** Consideremos la variable aleatoria  $\kappa$  con la distribución siguiente

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Es obvio que podemos realizar esta variable considerando un número de puntos que aparece al arrojar un dado: todos los valores son igualmente probables. Calculemos la esperanza matemática y la varianza de  $\kappa$ . Según la fórmula (3), tenemos

$$M \kappa = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Según la fórmula (9), tenemos

$$D \kappa = M(\kappa)^2 - (M \kappa)^2 = 1^2 \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \frac{1}{6} - (3,5)^2 = 2,917.$$

**Ejemplo.** Consideremos la variable aleatoria  $\theta$  con la distribución siguiente:

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

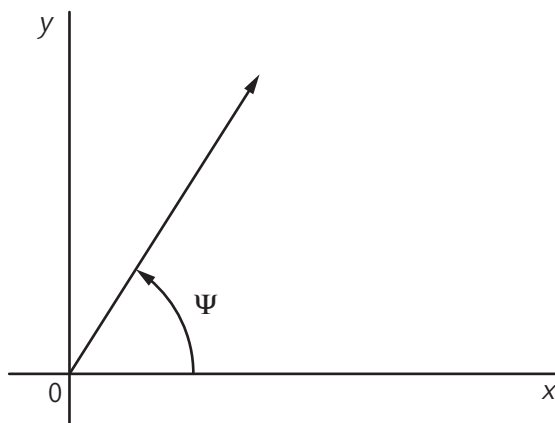
Podemos realizar esta variable considerando el juego de cara o cruz en el que a la cara le corresponden 3 puntos y a la cruz, 4 puntos. En este caso tenemos:

$$M\theta = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 = 3,5;$$

$$D\theta = 0,5 (3^2 + 4^2) - (3,5)^2 = 0,25.$$

Como vemos,  $M\theta = M\kappa$  mientras que  $D\theta < D\kappa$ . Lo último era de esperar, ya que los valores de  $\theta$  pueden diferir de 3,5 en  $\pm 0,5$  cuanto más, mientras que la dispersión de los valores de  $\kappa$  puede alcanzar hasta  $\pm 2,5$ .

→ **2. Variables aleatorias continuas.** Supongamos que en el origen de coordenadas del plano se encuentra una cantidad determinada de radio. Todo átomo de radio emite, al desintegrarse, una partícula  $\alpha$ . Su dirección puede ser caracterizada mediante el ángulo  $\Psi$ , como se muestra en la figura siguiente:



Tanto desde el punto de vista teórico como práctico, la emisión es posible en cualquier dirección; por eso, esta variable aleatoria puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y  $2\pi$ .

Diremos que una variable aleatoria es continua si puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo  $(a, b)$ .

Toda variable aleatoria continua  $\xi$  queda definida si se dan el intervalo  $(a, b)$ , que contiene los valores posibles de esta variable, y la función  $p(x)$ , que lleva el nombre de *densidad de probabilidad* de la variable aleatoria  $\xi$ , o *densidad de distribución* de  $\xi$ .

El significado real de la función  $p(x)$  es el siguiente: sea  $(a', b')$  un intervalo cualquiera contenido en  $(a, b)$  (es decir, sea  $a' \leq a$  y  $b' \leq b$ ); entonces, la probabilidad de que  $\xi$  tome un valor perteneciente al intervalo  $(a', b')$  es igual a la integral

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_a^b p(x) dx. \quad (14)$$

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". Miguel de Guzmán



[fenchu@oma.org.ar](mailto:fenchu@oma.org.ar)

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

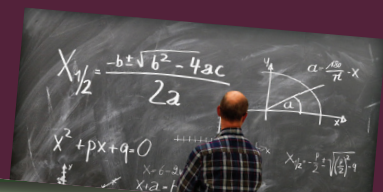
**¡Hacé tu pedido!**

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

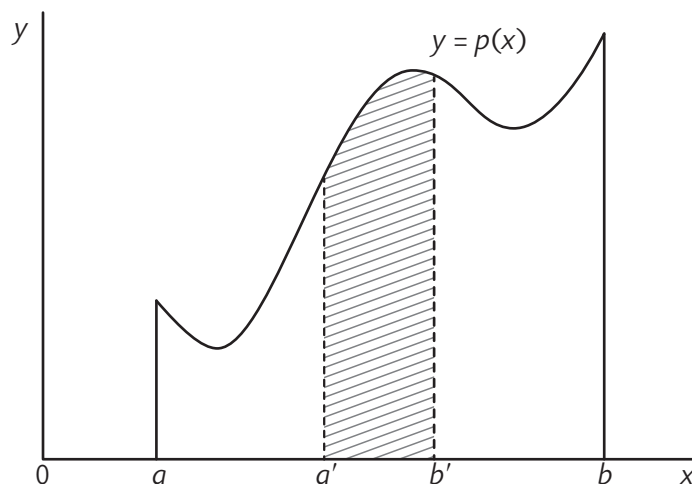
*¿Ya lo tenés?*

Godfrey Harold Hardy

**Apología  
de un  
matemático**



El área sombreada en la figura de abajo es igual al valor de la integral (14).



El conjunto de los valores de  $\xi$  puede formar un intervalo cualquiera. Puede darse incluso el caso de que  $a = -\infty$  y también el de que  $b = \infty$ . En cambio, la densidad  $p(x)$  debe cumplir dos condiciones análogas a las condiciones (1) y (2) para las variables discretas:

a) la densidad  $p(x)$  debe ser positiva:

$$p(x) > 0 \tag{15}$$

b) la integral de la densidad  $p(x)$  correspondiente a todo el intervalo  $(a, b)$  debe ser igual a 1:

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \tag{16}$$

Se denomina *esperanza matemática de la variable aleatoria continua* al número

$$M \xi = \int_a^b xp(x) dx. \tag{17}$$

El significado de esta característica es el mismo que en el caso de una variable aleatoria discreta. En efecto, puesto que

$$M \xi = \frac{\int_a^b xp(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

es fácil ver que se trata del valor medio de  $\xi$  pues cualquier valor de  $\xi$  es un número  $x$  del intervalo  $(a, b)$  que aparece en la integral con el peso  $p(x)$ . También en este caso podemos señalar una fórmula análoga de la mecánica: si  $p(x)$  es la densidad lineal de la barra a la abscisa del centro de gravedad de la barra, se calcula mediante la fórmula

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xp(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

Todo lo expuesto, en el punto 1 para variables aleatorias discretas, desde la fórmula (4) hasta la fórmula (13) incluida, sigue siendo válido también para las variables aleatorias continuas. Esto se refiere a la definición (7) de la varianza, a la fórmula (9) que se emplea para calcularla y a todas las propiedades de  $M \xi$  y  $D \xi$ . Huelgan las repeticiones.

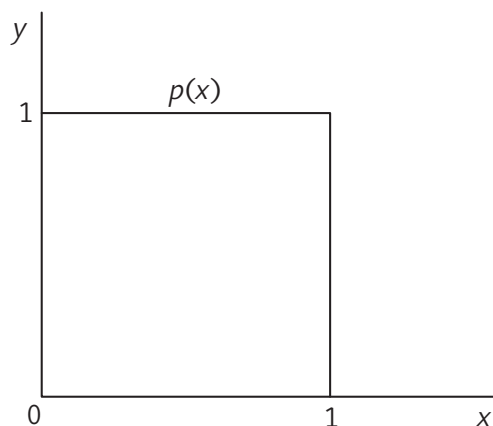
Citemos únicamente otra fórmula más, que permite calcular la esperanza matemática de una función de  $\xi$ . Sea, como antes,  $p(x)$  la densidad de probabilidad de la variable aleatoria. Tomemos una función continua cualquiera  $f(x)$  y consideremos la variable aleatoria  $\eta = f(\xi)$ .

Se puede demostrar que

$$\mathbf{M} f(\xi) = \int_a^b f(x) p(x) dx. \quad (18)$$

Cabe subrayar que, hablando en términos generales,  $\mathbf{M} f(\xi) \neq f(\mathbf{M} \xi)$ .

Si la variable aleatoria  $\gamma$  está definida en el intervalo  $(0, 1)$  y su densidad es  $p(x) = 1$ , como se representa en la figura de abajo,



se dice que está *uniformemente distribuida* en  $(0, 1)$ .

En efecto, cualquiera sea el intervalo  $(a', b')$  que se tome dentro de  $(0, 1)$ , la probabilidad de que  $\gamma$  tome un valor perteneciente al intervalo  $(a', b')$  es igual a

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a'$$

o sea, es igual a la longitud de este intervalo. En particular, si dividimos  $(0, 1)$  en un número arbitrario de intervalos de igual longitud, la probabilidad de que  $\gamma$  tome un valor perteneciente a cualquiera de estos intervalos será la misma.

Es fácil calcular que

$$\mathbf{M} \gamma = \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{D} \gamma = \int_0^1 x^2 p(x) dx - \mathbf{M} \gamma^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

La variable aleatoria  $\gamma$  será empleada frecuentemente en lo sucesivo.

→ **3. Variables aleatorias normales.** Se da el nombre de *variable aleatoria normal* (o gaussiana) a toda variable aleatoria  $\xi$  que está definida en todo el eje  $(-\infty, \infty)$  y que tiene la densidad

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

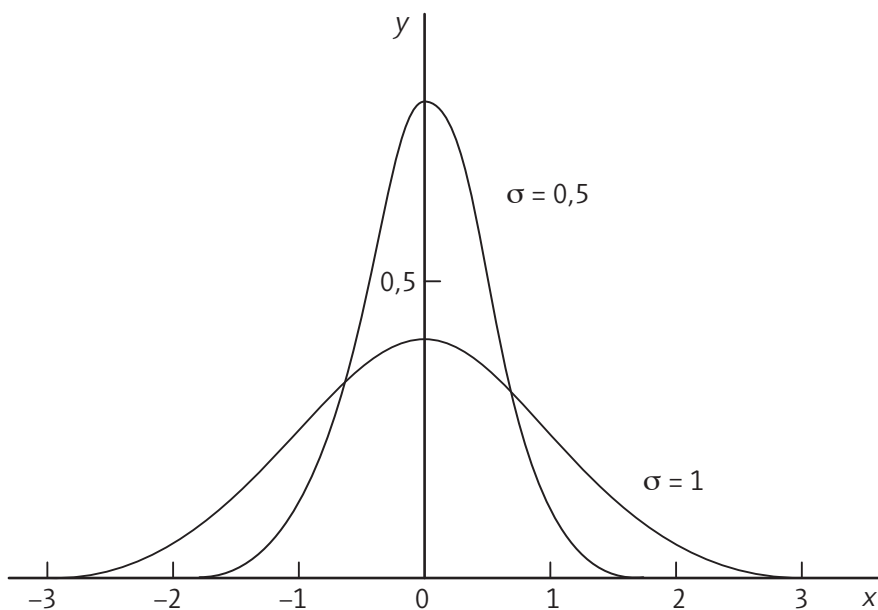
donde  $a$  y  $\sigma > 0$  son unos parámetros numéricos. El parámetro  $\sigma$  es un número y no una variable aleatoria. Sin embargo, empleamos esta letra griega por tradición.

El parámetro  $a$  no influye en la forma de la curva  $p(x)$ : su variación solo conduce a un desplazamiento de la curva a lo largo del eje  $x$ . En cambio, al variar  $\sigma$  sí se altera la forma de la curva. En efecto, es fácil ver que

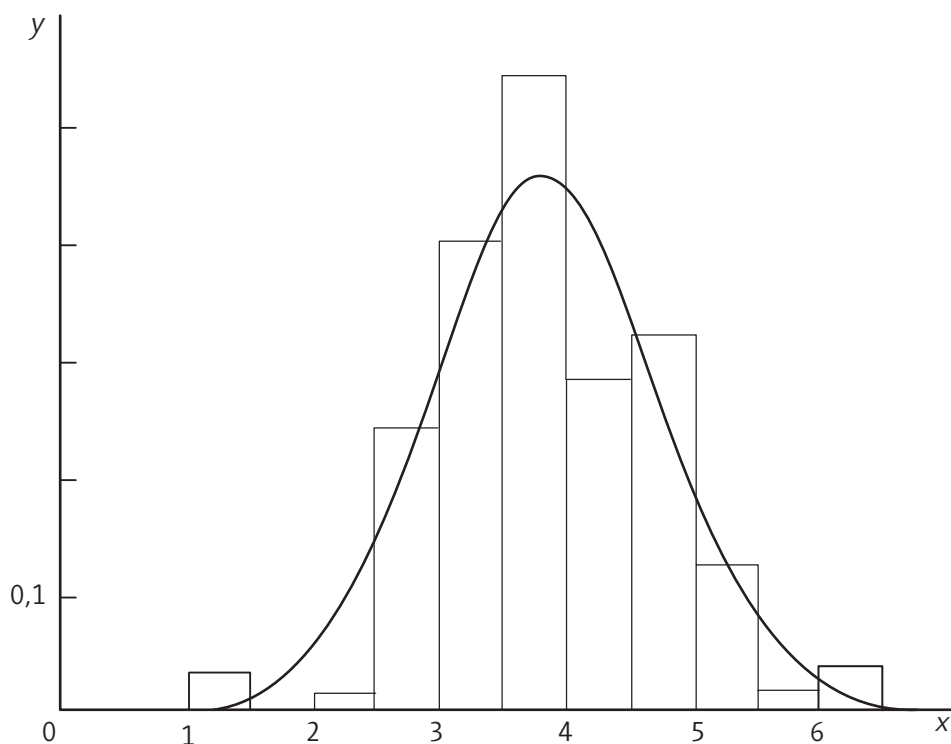
$$\max p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$



Si disminuimos  $\sigma$ , aumentará el  $\max p(x)$ . Pero toda el área que encierra la curva  $p(x)$  es igual a 1 según (16). Por eso, la curva tendrá que estirarse hacia arriba en una vecindad de  $x = a$  y decrecer para todos los valores suficientemente grandes de  $x$ .



En la figura anterior hemos representado dos densidades normales correspondientes al caso  $a = 0$  y  $\sigma = 1$  y al caso  $a = 0$  y  $\sigma = 0,5$  (otra densidad normal será construida más adelante, pero adelantamos su figura).



Se puede demostrar que

$$\mathbf{M} \zeta = a \quad \text{y} \quad \mathbf{D} \zeta = \sigma^2.$$

Las variables aleatorias normales aparecen con gran frecuencia al analizar cuestiones de la más diversa índole. La razón de esto será explicada a continuación. Por ejemplo, el error de mediciones  $\delta$  es, como regla, una variable aleatoria normal.

Si no existe error sistemático en las mediciones, se tiene  $a = \mathbf{M} \sigma = 0$ . La magnitud  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D} \delta}$ , llamada *error cuadrático medio*, caracteriza el error del método que se emplea para la medición.

La regla de “las tres sigmas”. Es fácil calcular que

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} p(x) dx = 0,997$$

cualesquiera sean  $a$  y  $\sigma$  en (19). De (14) resulta que

$$P \{a - 3\sigma < \zeta < a + 3\sigma\} = 0,997. \quad (20)$$

La probabilidad 0,997 es tan próxima a 1 que la última fórmula se interpreta a veces así: al efectuar una prueba es prácticamente imposible obtener un valor de  $\zeta$  que difiera de  $M \zeta$  en más de  $3\sigma$ .

→ **4. Teorema central del límite en la teoría de las probabilidades.** Pierre-Simon Laplace fue el primero en enunciar este importante teorema. Varios matemáticos destacados, entre los cuales figuran Pafnuty Lvóvich Chebyshev, Andréi Márkov y Aleksandr Mijáilovich Liapunov, estudiaron sus generalizaciones. Su demostración es bastante compleja.

Consideremos  $N$  variables aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  independientes e idénticas de modo que las distribuciones de probabilidad de estas variables coinciden. Por consiguiente, también coinciden sus esperanzas matemáticas y varianzas.

Pongamos

$$M \xi_1 = M \xi_2 = \dots = M \xi_N = m$$

$$D \xi_1 = D \xi_2 = \dots = D \xi_N = b^2.$$

Designemos por  $\rho_N$  la suma de todas estas variables:

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$$

De las fórmulas (6) y (13) se deduce que

$$M \rho_N = M (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nm,$$

$$D \rho_N = D (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nb^2.$$

Consideremos ahora la variable aleatoria normal  $\zeta_N$  con estos mismos parámetros:  $a = Nm$  y  $\rho^2 = Nb^2$ .

**El teorema central del límite afirma que, cualquiera sea el intervalo  $(a', b')$ , se tiene para valores grandes de  $N$ :**

$$P\{a' < \rho_N < b'\} \approx \int_{a'}^{b'} p_{\zeta_N}(x) dx.$$

El significado real de este teorema es obvio: la suma  $\rho_N$  de una gran cantidad de variables aleatorias idénticas es aproximadamente normal ( $p_{\rho_N}(x) \approx p_{\zeta_N}(x)$ ).

En realidad, este teorema es válido en situaciones mucho más generales: los sumandos  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  pueden no ser idénticos e independientes; lo que solamente importa es que cada sumando por separado no influya considerablemente en la suma.

Es este teorema el que explica por qué las variables aleatorias normales aparecen con tanta frecuencia en la práctica. En efecto, siempre que tropezamos con el efecto sumario de una gran cantidad de factores aleatorios insignificantes, la variable aleatoria resultante es normal.

Por ejemplo, la desviación del proyectil respecto del objetivo es casi siempre una variable aleatoria normal por cuanto depende de las condiciones meteorológicas en las diferentes partes de la trayectoria y de otros muchos factores.

→ **5. Esquema general de aplicación del método Montecarlo.** Supongamos que debemos calcular una magnitud  $m$  que desconocemos. Tratemos de idear una variable aleatoria tal que  $M \xi = m$ . Sea, además:  $D \xi = b^2$ .

Consideremos  $N$  variables aleatorias independientes normales  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  con la misma distribución que tiene  $\xi$ . Si  $N$  es suficientemente grande, la distribución de la suma  $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  será, según el teorema del punto 4 anterior, una distribución aproximada normal con los parámetros  $a = Nm$  y  $\sigma^2 = Nb^2$ . De (20) se deduce que





$$P\{Nm - 3b\sqrt{N} < \rho_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0,997.$$

Si dividimos por  $N$  la desigualdad que figura entre las llaves, obtendremos una desigualdad equivalente; la probabilidad continuará siendo la misma:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997.$$

Podemos representar este último resultado bajo la forma siguiente

$$P\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997. \quad (21)$$

Esta es una relación de suma importancia para el método Montecarlo. Ofrece un mecanismo para evaluar  $m$  y, a la vez, permite estimar el error.

En efecto, determinemos  $N$  valores de la variable aleatoria  $\xi$ . (Resulta lo mismo determinar un valor de cada una de las variables  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$  o hallar  $N$  valores de la variable  $\xi$ , ya que todas estas variables aleatorias son idénticas: tienen la misma distribución).

Según la fórmula (21), la media aritmética de estos valores será aproximadamente igual a  $m$ . Con una elevada probabilidad podemos afirmar que el error de esta aproximación no pasa de  $\frac{3b}{\sqrt{N}}$ . Es obvio que el error tiende a cero cuando  $N$  crece.

### Armando festivales y pasatiempos

1. Se arrojan dos dados simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el total de los puntos sea cinco? Será buena ayuda disponer el cálculo en forma de tabla, como sigue:

Primer dado	1	2	3	4
Segundo dado	4	3	2	1
Probabilidad				



2. Un grupo de cuatro naipes es extraído de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que contenga los cuatro ases?
3. Una anotación en la sección "sacar cuatro" de una polla del fútbol tiene siete equipos marcados con la instrucción "Perm. 4 from 7" (es una combinación, efectivamente). Encuéntrese el costo de la anotación a 6 peniques por línea.
4. En una investigación de análisis de la varianza (el análisis de la varianza se trata en el capítulo xix del libro *Facts from Figures*, de Michael Joseph Moroney, que ya mencionamos en *Leñitas Geométricas*, N° 1, 5ª época, p. 13, pero no se necesita conocer nada a su respecto para contestar esta pregunta) son considerados cinco factores diferentes,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . Para investigar lo que se conoce como "efectos de interacción", los factores son tomados en combinaciones. ¿Cuántas interacciones de los tipos  $AB$ ,  $CE$ , etc., existen? ¿Cuántas de los tipos  $ABC$ ,  $BCE$ , etc.?
5. Seis hombres tiran un penique al aire cada uno y los resultados se coordinan con los respectivos nombres. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles?
6. El director de una escuela envía seis libros a la maestra encargada, entre los que la alumna monitora debe elegir cuatro como premio. Uno de los seis libros tiene por título *Ninguna orquídea para la señorita Blandish*, que advierte rápidamente la maestra. ¿De cuántas maneras puede elegir la alumna sus cuatro libros si la maestra encargada le prohíbe tener *Ninguna orquídea*...? ¿De cuántas maneras podría elegir la alumna monitora sus cuatro libros si la maestra encargada, siendo más progresista, insiste en que el famoso libro sea incluido en la selección? ¿Cuántas maneras hay si la maestra le permite a la niña

elegir libremente entre los seis libros? Exprese sus respuestas simbólicamente, así como sus respectivas relaciones. ¿Cree usted que esta es una regla general, o que se aplica solamente a este ejemplo particular?

7. Encuéntrese el valor de lo siguiente: a)  $8C3$ , b)  $7C6$ , c)  $5P2$ , d)  $10P3$ .
8. Encuéntrese el valor de  $\frac{7!3!}{2!4!}$ .
9. ¿Cuántas permutaciones diferentes que contengan todas las letras de las siguientes palabras pueden usarse?  
a) Statesmen      b) Procrastinator  
¿Cuántas pueden formarse con todas las letras de las dos palabras combinadas?
10. ¿De cuántas maneras diferentes pueden aparecer simultáneamente frente al tablero diez jugadores de damas durante un partido?
11. Calcúlese la probabilidad de conseguir al menos un seis en tres lanzamientos de un dado no trucado.

**Indicación.** Calcúlese la probabilidad de no sacar ningún seis en tres lanzamientos. Indíquese el fallo del siguiente razonamiento:

- La probabilidad de que al lanzar un dado el resultado sea seis es  $1/6$ .
- Puesto que lanzamos el dado tres veces  $p$  (al menos un 6 en 3 lanzamientos =  $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ ).

¡Posibilidades equilibradas!

12. Resolver el problema planteado por el caballero de Méré (véase *Leñitas Geométricas* N° 3, 5ª época, p. 1), determinando la probabilidad de obtener uno o más doble seis en 24 lanzamientos de un par de dados.

**Indicación.**  $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,5086$ . Concluir que De Méré tuvo muy buen criterio al desconfiar del juicio que consideraba que ganar una apuesta al doble seis tenía tantas posibilidades como las de perderla.

13. Retomando el problema de los puntos (tratado en *Leñitas Geométricas* N° 3, 5ª época, p. 2) explíquese cómo Jimmy y Walter tendrían que repartirse el monto de las apuestas en una partida a 5 puntos, si cuando esta quedó interrumpida Walter tenía 3 puntos y Jimmy, 2.
14. Calcúlese el número de sucesos elementales distintos y equiprobables del experimento consistente en lanzar tres dados. A continuación, determínese  $p(A)$ ,  $p(B)$  y  $p(C)$  donde  $A$  = suma de los resultados es igual a 3,  $B$  = suma de los resultados es igual a 5,  $C$  = suma de los resultados es, al menos, igual a 6 o más. Finalmente, calcúlese las expectativas a favor y en contra de cada uno de los sucesos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
15. Si en una mano de póker tiene un 3, un 4, un 5 y un 7, ¿cuál es la probabilidad de conseguir un 6 en la quinta carta? Si la quinta carta no fuese un 6, calcúlese la probabilidad de reemplazarla (con una carta extraída sin reemplazamiento) con una nueva quinta carta que sea un seis. Como consecuencia, obténgase la probabilidad de que al extraer una carta se complete una escalera.
16. Determinar cuál es la probabilidad de que, al lanzar 4 dados, 2 o más de ellos muestren el mismo número de puntos.

**Indicación.** En primer lugar, calcúlese la probabilidad de que los 4 dados presenten resultados distintos, considerando 4 pruebas sucesivas e independientes.

17. En una ruleta de Las Vegas un cliente hace una apuesta combinada: 5 dólares al negro y 2 al grupo de 4 números 13, 14, 16 y 17. ¿Cuál es la esperanza de esta apuesta? Como corolario, conclúyase que la esperanza de cualquier apuesta es de 5,26 centavos perdidos por cada dólar apostado.
18. Una ruleta europea tiene 37 sectores, incluido un cero pero no un doble cero. Además, si el resultado es cero, cualquier apuesta con expectativa 1:1 (apuestas al rojo, negro, impar, 2ª mitad, números 18-36, etc.) permanece sobre la mesa; si en el siguiente giro el resultado es favorable, el dinero apostado es reintegrado (en este caso, ni se gana ni se pierde). Se pide:
  - Calcular la esperanza de una apuesta de 1 euro al rojo sobre esta ruleta.
  - La esperanza de los demás tipos de apuestas, poniendo en juego un euro.

- Concluir que la ruleta europea tiene mayor grado de “sofisticación” que una ruleta de Las Vegas.

19. Un juego consiste en lanzar una moneda al aire y seguidamente un dado. Los premios de este juego están indicados más abajo. ¿Cuál es la esperanza de este juego? y ¿cuánto dinero debería pagar el jugador en cada ronda, o en su caso cobrar, para que el juego fuese equilibrado?

	1 o 2	3, 4 o 5	6
cara	12	-10	0
cruz	-6	9	-6

20. (Paradoja de San Petersburgo). Lanzamos una moneda al aire hasta que sale una cruz, momento en el cual cesamos los lanzamientos. Los premios, que están basados en el número de caras que han salido hasta la primera cruz, se muestran en la siguiente tabla:

Número de caras	0	1	2	3	...	$n$	...
Premios (dólares)	1	2	4	8	...	$2^n$	...

¿Cuál es la esperanza de este juego? Razone su respuesta preguntándose qué significa esta esperanza y si es realista.



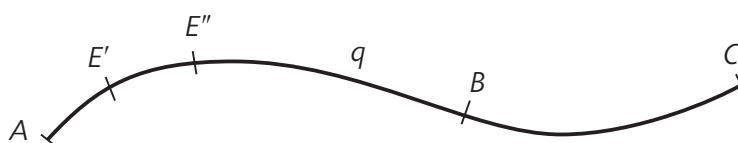
 Continúa de *Leñitas Geométricas* 16, 4ª época. Problemas de variaciones (líneas más cortas)

## Cálculo de variaciones. Energía potencial de un hilo estirado

### 11. Movimientos de las líneas que no alteran la longitud de estas

→ **1. Energía potencial de un hilo flexible.** Convengamos en que un hilo flexible experimenta una tensión  $T$  igual en todos sus puntos, y que esta tensión queda invariable cuando el hilo cambia de longitud. Determinemos la energía potencial del hilo.

Sea  $q = \widehat{ABC}$  una curva suave de longitud  $l$ , que se compone de los arcos  $\widehat{AB}$  de longitud  $l_0$  y  $\widehat{BC}$  de longitud  $(l - l_0)$ .



Supongamos que el hilo, que ocupa la posición  $\widehat{AB}$ , pasó, siguiendo la curva  $q$  en la posición  $\widehat{ABC}$ , de modo tal que, con el punto  $A$  sujeto, el punto  $B$  describe la línea  $\widehat{BC}$  de longitud  $(l - l_0)$ . Examinemos el trabajo cumplido por las fuerzas de tensión. Las fuerzas de tensión en el punto  $B$  realizaron el trabajo expresado por  $T(l - l_0)$ .



El trabajo de las fuerzas de tensión, que actúan sobre el arco menor  $\widehat{EE'}$  de la curva  $q$ , es nulo. En efecto, la resultante de estas fuerzas está dirigida por la normal a la curva  $q$ , mientras que el arco  $\widehat{EE'}$  se desliza por la propia curva  $q$ .

De este modo, el trabajo total de las fuerzas de tensión en el movimiento del hilo se reduce al trabajo de la fuerza aplicada al extremo  $B$ , es decir, es igual a

$$T(l - l_0) = Tl - Tl_0.$$

Sea  $V_0$  la energía potencial del hilo cuando este ocupaba la posición  $\widehat{AB}$  y  $V$ , la energía potencial del mismo hilo en la posición  $\widehat{ABC}$ . El incremento de la energía potencial  $V - V_0$  es igual al trabajo realizado, es decir,

$$V - V_0 = Tl - Tl_0$$

o

$$V - Tl = V_0 - Tl_0 \quad (1)$$

Consideramos que, cuando la longitud del hilo tiende a cero, la energía potencial tiende a cero; por consiguiente, para  $l_0 \rightarrow 0$  tenemos  $V_0 \rightarrow 0$ , y, por lo tanto,  $(V_0 - Tl_0 \rightarrow 0)$ . Pasando al límite en el segundo miembro de la igualdad (1) para  $l_0 \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$V - Tl = 0,$$

de aquí

$$V = Tl \quad (2)$$

**La energía potencial de un hilo flexible es igual a su longitud multiplicada por la tensión.**

**Corolario.** Si al desplazarse el hilo el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo, la longitud del hilo queda invariable.

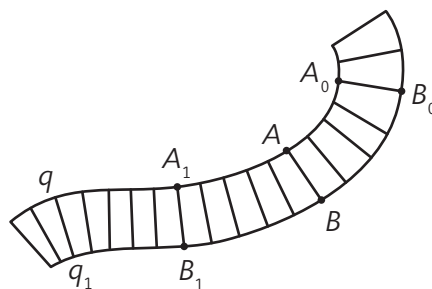
Efectivamente, en estas condiciones no ha variado la energía potencial del hilo, que es proporcional a la longitud del hilo.

Observemos que si un segmento rectilíneo  $\overline{AB}$  se desplaza, quedando rectilíneo, la energía total de las fuerzas de tensión se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en los extremos de este segmento. El trabajo del hilo que mantiene la forma de la quebrada  $\overline{ACB}$  se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en los extremos  $A$  y  $B$  de la quebrada y en su vértice  $C$ .

→ **2. Líneas paralelas.** Dos líneas con normales comunes se denominan paralelas. Como ejemplos simples de las líneas paralelas sirven las rectas paralelas y las circunferencias concéntricas.

**Teorema 1.** Los segmentos de las normales comunes entre las líneas paralelas  $q$  y  $q_1$  tienen igual longitud.

Supongamos que  $\overline{AB}$ , que es la normal común para las curvas  $q$  y  $q_1$ , se desplaza desde la posición  $A_0B_0$  hasta la posición  $A_1B_1$ , siendo siempre la normal común a las dos curvas.



El trabajo de las fuerzas de tensión en este desplazamiento es nulo. En efecto, en el extremo  $A$  la fuerza de tensión está dirigida según la normal a la curva, por lo cual, al desplazarse este extremo a lo largo de la curva  $q$ , el trabajo de las fuerzas de tensión es igual a cero.

Análogamente, en el extremo  $B$ , que se desplaza por la curva  $q_1$ , el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo. Así, pues, para este caso de desplazamiento de la normal común, el trabajo de las fuerzas de tensión es nulo. En virtud del corolario enunciado, la longitud  $l$  de la normal común no cambia de valor:

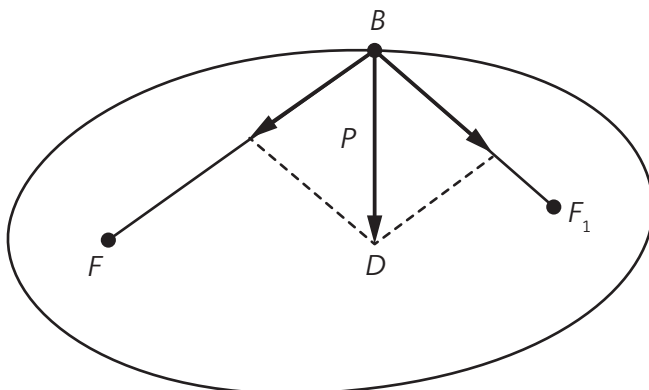
$$l(A_0B_0) = l(A_1B_1).$$

→ **3. Normales a una elipse y una parábola.** Se denomina *elipse* a un lugar geométrico de los puntos  $B$ , para los cuales la suma de distancias hasta los puntos dados,  $F$  y  $F_1$ , es una magnitud constante:

$$FB + F_1B = 2a \quad (3)$$

( $a$  es una magnitud constante). Los puntos  $F$  y  $F_1$  se llaman *focos de la elipse*, los segmentos  $\overline{FB}$  y  $\overline{F_1B}$  son *radios vectores*.

**Teorema 2.** La normal a la elipse en cualquier punto  $B$  es la bisectriz  $\overline{BD}$  del ángulo  $FBF_1$  formado por los radios vectores.



En efecto, supongamos que un hilo elástico en forma de la quebrada  $FBF_1$  está fijado en los puntos  $F$  y  $F_1$ . Si desplazamos este hilo, haciendo que el punto  $B$  se traslade por la elipse, la longitud del hilo no varía [en virtud de (3)].

# CASIO®

## CALCULADORA CIENTÍFICA FX-82LA PLUS

Descubrí toda la línea CASIO en

[www.calculadoras.ar](http://www.calculadoras.ar)

Las calculadoras mostradas son modelos de la serie FX-82LA PLUS de Casio. La pantalla LCD muestra el cálculo  $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{6}{3\sqrt{3}}$  y el resultado  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ . El teclado incluye funciones científicas como seno, coseno, tangente, logaritmos y potencias.

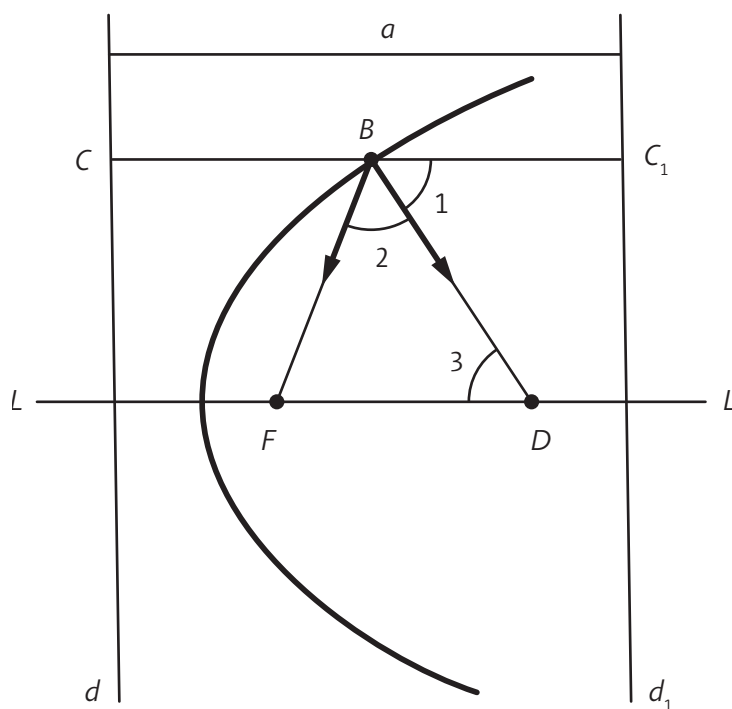
Quiere decir que el trabajo de las fuerzas de tensión es siempre nulo. El trabajo de las fuerzas de tensión se reduce al trabajo de las fuerzas en el punto  $B$ . En este punto están aplicadas dos fuerzas iguales de tensión dirigidas por  $\overline{BF}$  y  $\overline{BF_1}$ . Su resultante  $p$  está dirigida por la bisectriz  $\overline{BD}$  del ángulo  $FBF_1$ .

Puesto que en el desplazamiento del punto  $B$  por la elipse el trabajo  $p$  es siempre nulo, entonces  $p$  está siempre dirigido por la normal a la elipse. Por consiguiente, la normal a la elipse, en cualquier punto  $B$ , coincide con la bisectriz del ángulo  $FBF_1$ .

Se llama *parábola* a un lugar geométrico de los puntos  $B$  cuyas distancias de un punto dado  $F$  y de una recta dada  $d$ , son iguales entre sí:

$$\overline{FB} = \overline{BC} \quad (4)$$

$\overline{BC}$  es una perpendicular bajada de  $B$  a la recta  $d$ .



El punto  $F$  se denomina *foco de la parábola*, la recta  $d$  se llama *directriz* y la recta  $LL$ , que es perpendicular a  $d$  y pasa por el foco, el *eje de la parábola*.

Tracemos una recta  $d_1$ , paralela a  $d$ , de modo que el foco  $F$  y la directriz  $d$  se encuentren por un lado  $d_1$ . Designemos con  $a$  la distancia entre las rectas paralelas  $d$  y  $d_1$ . Tracemos por el punto  $B$  de la parábola una perpendicular común  $\overline{CC_1}$  a las rectas  $d$  y  $d_1$  ( $\overline{CC_1}$  es paralela al eje  $LL$ ). Tenemos:

$$\overline{CC_1} = \overline{CB} + \overline{BC_1} = a,$$

donde  $a$  es una constante igual a la distancia entre las rectas paralelas  $d$  y  $d_1$ . En virtud de (4)

$$\overline{FB} + \overline{BC_1} = a. \quad (5)$$

Ahora no es difícil demostrar la siguiente afirmación.

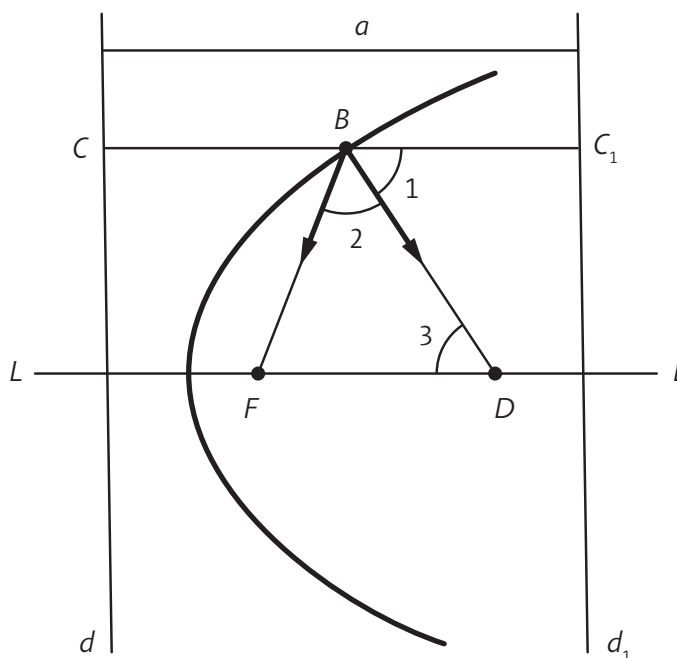
**Teorema 3.** La normal en un punto arbitrario  $B$  de la parábola es la bisectriz del ángulo  $FBC$ , formado por el radio vector  $\overline{FB}$  y la recta  $\overline{BC}$ , paralela al eje  $LL$ .

Consideraremos un hilo que tiene forma de una quebrada  $FBC$ , cuyo extremo  $F$  está fijado, mientras que el extremo  $C_1$  se desliza por la recta  $d_1$ , de tal modo que  $\overline{BC_1}$  quede perpendicular a  $d_1$ , y el punto  $B$  se desliza por la parábola.

La longitud de este hilo queda inalterable [lo que proviene de la fórmula (5)] y esto significa que el trabajo total de las fuerzas de tensión es nulo. Este trabajo es la suma de los trabajos de fuerzas de tensión en los puntos  $C_1$  y  $B$ . El trabajo de la fuerza de tensión en el punto  $C_1$  es nulo, puesto que la dirección de esta fuerza (por el segmento  $\overline{C_1B}$ ) es perpendicular a la recta  $d_1$ , por la cual se desliza el punto  $C_1$ .

Por lo tanto, el trabajo de las fuerzas de tensión en el punto  $B$  es también nulo. Reiterando los razonamientos aplicados en la investigación de una elipse, llegamos a la demostración del teorema. [Hemos demostrado este teorema, de hecho, para los puntos dispuestos en la parte de la parábola que se encuentra a la izquierda de la recta  $d$ . Pero, como la posición de esta recta (paralela a  $d$ ) es arbitraria, el teorema es válido, pues, para todos los puntos de la parábola].

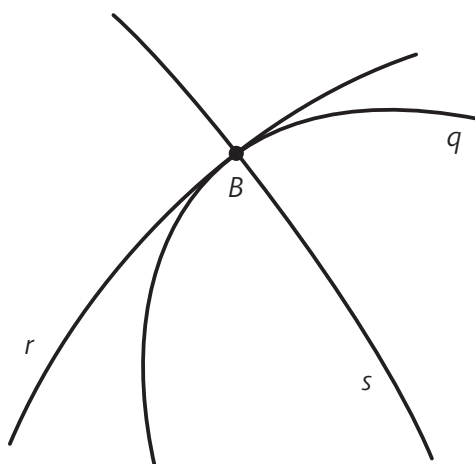
**Observación.** Del teorema 3 se deduce una regla para construir normales a la parábola. Llevemos sobre el eje  $LL$  un segmento  $FD$ , igual al radio vector  $FB$  de la parábola. La recta  $BD$  es una normal a la parábola.



En efecto, en la figura anterior los ángulos  $\sphericalangle 1$  y  $\sphericalangle 3$  son iguales como ángulos internos alternos dentro de las paralelas  $LL$  y  $CC_1$  y la secante  $BD$ ; los ángulos  $\sphericalangle 3$  y  $\sphericalangle 2$  son iguales, puesto que el triángulo  $FBD$  es isósceles. De aquí obtenemos:  $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$ , es decir,  $BD$  es la bisectriz del ángulo  $FBC_1$ ; y en virtud del teorema 3, es la normal a la parábola en el punto  $B$ .

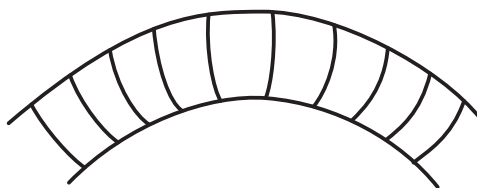
→ **4. Tangentes geodésicas normales.** Si el arco geodésico  $\widehat{AB}$  se desplaza por una superficie, el trabajo lo realizan solo las fuerzas de tensión que actúan sobre los extremos  $A$  y  $B$  del arco. Efectivamente, la resultante de las fuerzas, que actúan sobre cualquier parte menor interior del arco  $\widehat{AB}$ , está dirigida según la normal a la superficie y, por lo tanto, su trabajo en el desplazamiento por la superficie es nulo.

Se llama *tangente geodésica a la curva  $q$  en el punto  $B$  de una superficie* a una línea geodésica  $r$  que en el punto  $B$  tiene con  $q$  una tangente común; lleva el nombre de *normal geodésica a la curva  $q$  en el punto  $B$*  una línea geodésica  $s$  que es ortogonal a  $q$  en el punto  $B$ .



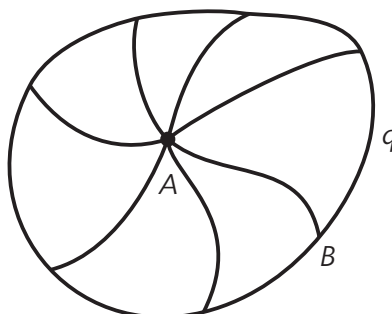
El teorema 1 sobre las normales comunes se generaliza para el caso de las normales geodésicas.

**Teorema 4.** Supongamos que dos curvas  $q$  y  $q_1$  en una superficie tienen comunes todas las normales geodésicas. Los segmentos de las normales geodésicas comunes entre  $q$  y  $q_1$  tienen longitudes iguales.



**Ejemplo.** Los segmentos de meridianos en la superficie de una bola entre dos paralelas tienen longitudes iguales. La demostración del teorema 4 es la misma que la demostración del teorema 1.

→ **5. Circunferencia geodésica.** Partiendo del punto  $A$  llevemos sobre la superficie toda una serie de los arcos geodésicos  $\overline{AB}$  de igual longitud. El lugar geométrico  $q$  de sus extremos  $B$  se llama *circunferencia geodésica*; los arcos geodésicos  $\overline{AB}$  se denominan *radios geodésicos*.



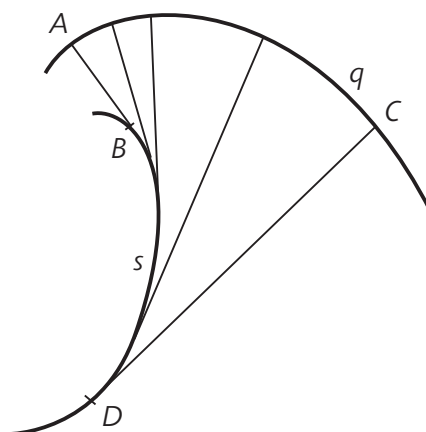
Todo radio geodésico  $\overline{AB}$  es una normal geodésica a la circunferencia geodésica en el punto  $B$ .

En efecto, supongamos que un hilo elástico  $\overline{AB}$ , que está sujeto en el extremo  $A$  y que tiene forma de radio geodésico, se desplaza de tal manera que su extremo  $B$  describa una circunferencia geodésica  $q$ . Como la longitud del arco geodésico  $\overline{AB}$  no varía, el trabajo de las fuerzas de tensión es igual a cero.

Este trabajo se reduce al trabajo de las fuerzas de tensión en el extremo  $B$ . Quiere decir que el trabajo de las fuerzas de tensión en el punto  $B$  es siempre nulo. Las fuerzas de tensión están dirigidas según la normal a la línea de desplazamiento  $q$ . Y como su dirección en el punto  $B$  es la dirección tangente al radio  $\overline{AB}$ , llegamos a nuestro teorema.

## 12. Evolutas y evolventes

Consideremos una curva plana  $q$ , un haz de las normales trazadas de diferentes puntos de dicha curva y una envolvente  $s$  de estas normales (es decir, la curva  $s$  que es tangente a las normales). La envolvente  $s$  se llama *evoluta de la curva  $q$* , y la curva  $q$ , que se interseca con todas las tangentes a la evoluta  $s$  bajo un ángulo recto, se llama *evolvente*, como vemos en la figura.





Todo punto  $B$  de la evoluta es un punto de intersección de la normal  $\overline{AB}$  a la evolvente con la normal  $\overline{A'B'}$ , infinitamente próxima a la primera; es decir, el punto  $B$  es el centro de curvatura para la curva  $q$  en el punto  $A$ . La evoluta  $s$  de la curva  $q$  se puede definir como un lugar geométrico de los centros de curvatura de esta curva.

Un hilo elástico tiene la forma de la curva  $r$ , compuesta de un segmento de la normal  $\overline{AB}$  a la evolvente y de un arco  $\widehat{BD}$  de la evoluta  $s$ . Desplazándonos por esta curva de  $A$  a  $D$  experimentamos en el punto  $B$  un paso suave del segmento  $AB$  al arco  $BD$ . Por esto, el hilo elástico en la posición  $r = \widehat{ABD}$  se encuentra en la posición de equilibrio. Hagamos trasladarse el hilo  $r$  de tal modo que su extremo  $A$  se mueva por la evolvente, y el punto  $B$ , por la evoluta. En este caso  $AB$  mantiene su posición de una normal a la evolvente, y la parte restante del hilo  $BD$  se adhiere a la curva  $s$ . El trabajo de las fuerzas de tensión que actúan sobre los puntos de la normal  $\overline{AB}$  es igual al trabajo de estas fuerzas en los puntos  $A$  y  $B$ . No obstante, en el punto  $A$  este trabajo es nulo, puesto que las fuerzas de tensión actúan por la normal a la curva  $q$ , por la cual se desliza el extremo  $A$ . Las fuerzas de tensión, que actúan en el punto  $B$ , están equilibradas y su trabajo en cada instante dado es nulo.

Finalmente, el trabajo en la parte  $BD$  del hilo, que en el instante dado no participa en el movimiento, es igual a cero. Así pues, el trabajo de las fuerzas de tensión en cada momento dado es nulo. Durante el movimiento considerado la energía potencial del hilo  $r$  queda invariable y, en consecuencia, sin cambio alguno la longitud del hilo  $r$ .

Si  $\widehat{ABD}$  es una posición inicial del hilo  $r$  y el segmento  $CD$ , la posición final, entonces la longitud  $\widehat{ABD}$  es igual a la longitud  $CD$ :

$$l(\widehat{ABD}) = l(CD)$$

Pero,

$$l(\widehat{ABD}) = l(AB) + l(\widehat{BD}),$$

ó

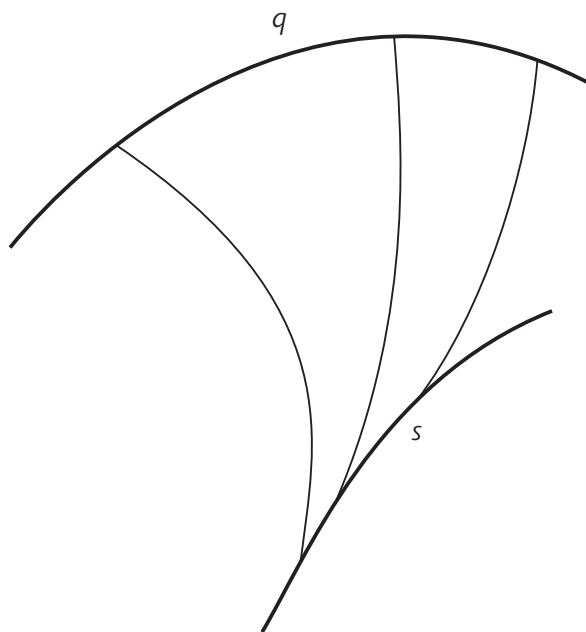
$$l(CD) = l(AB) + l(\widehat{BD})$$

de donde

$$l(\widehat{BD}) = l(CD) - l(AB).$$

Hemos demostrado el teorema que sigue.

**Teorema.** Si en dos puntos  $A$  y  $C$  de la evolvente trazamos las normales  $AB$  y  $CD$  hasta sus puntos de tangencia  $B$  y  $D$  con la evoluta, entonces la diferencia en longitudes de estos segmentos de las normales es igual a la longitud del arco de la evoluta  $\widehat{BD}$  encerrado entre ellos.



Si a la curva  $q$  en una superficie le trazamos un haz de sus normales geodésicas (figura precedente), la evolvente de estas,  $s$ , se llamará evoluta geodésica de la curva  $q$ , y la propia curva  $q$ , evolvente geodésica de

la curva  $s$ . El teorema sigue siendo válido si las palabras “normal”, “evoluta”, “evolvente” se entienden como normales geodésicas, evoluta y evolvente geodésicas. El lector mismo puede convencerse de que la demostración es lícita en este caso también.

### 13. Problemas referentes al equilibrio de los sistemas de hilos elásticos

→ **1. Principio de Dirichlet.** Para un sistema mecánico, la posición del mínimo de su energía potencial corresponde a la posición de equilibrio. En efecto, si un sistema mecánico inmóvil se desvía de la posición  $S$  del mínimo de la energía potencial, entonces la energía potencial solo puede crecer, y, en consecuencia, de acuerdo con el principio de conservación de la energía, la energía cinética del sistema solo puede disminuir. Por ello, si en la posición  $S$  el sistema estaba inmóvil, es decir, su energía cinética era nula, entonces, realizado un desplazamiento, el sistema no puede adquirir la energía cinética positiva, es decir, no puede empezar a moverse.



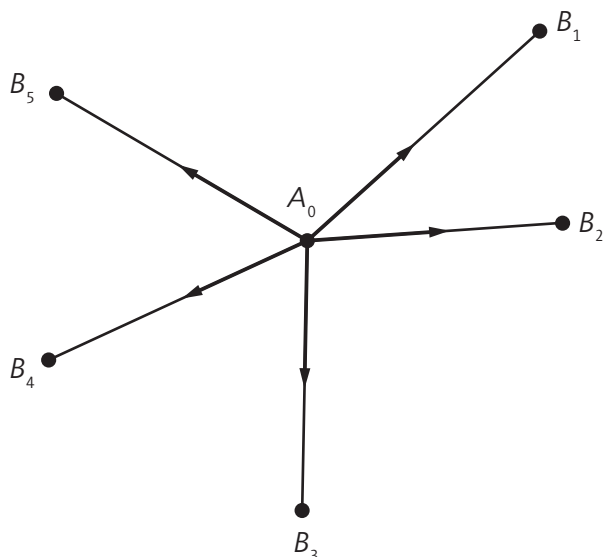
**Ejemplo.** Para un hilo elástico la energía potencial es proporcional a su longitud. Por eso, la posición en la que el hilo tiene una longitud mínima es la posición de equilibrio del hilo. Hemos aprovechado varias veces esta circunstancia.

He aquí dos problemas en los que se busca el equilibrio del sistema de varios hilos (el segundo de estos problemas será de importancia para lo ulterior).

→ **2. Problema del mínimo de la suma de longitudes.** En un plano están dados los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Hállese un punto  $A$  tal que la suma de las distancias entre  $A$  y los puntos dados sea mínima. Consideremos  $n$  hilos elásticos  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ , un extremo de los cuales  $A$  es común (por ejemplo, los hilos se encuentran entrelazados en el punto  $A$ ) y los otros extremos están sujetos en los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , respectivamente. La energía potencial de nuestro sistema de hilos es proporcional a la suma de longitudes de los hilos  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ .



A la suma mínima de longitudes de los hilos, es decir, a la energía potencial mínima, le corresponde la posición de equilibrio del sistema. En esta posición cada hilo se representa por un segmento rectilíneo y la suma de longitudes de estos segmentos es mínima. Sea  $A_0$  la posición del punto  $A$  en este estado de equilibrio (ver figura siguiente).

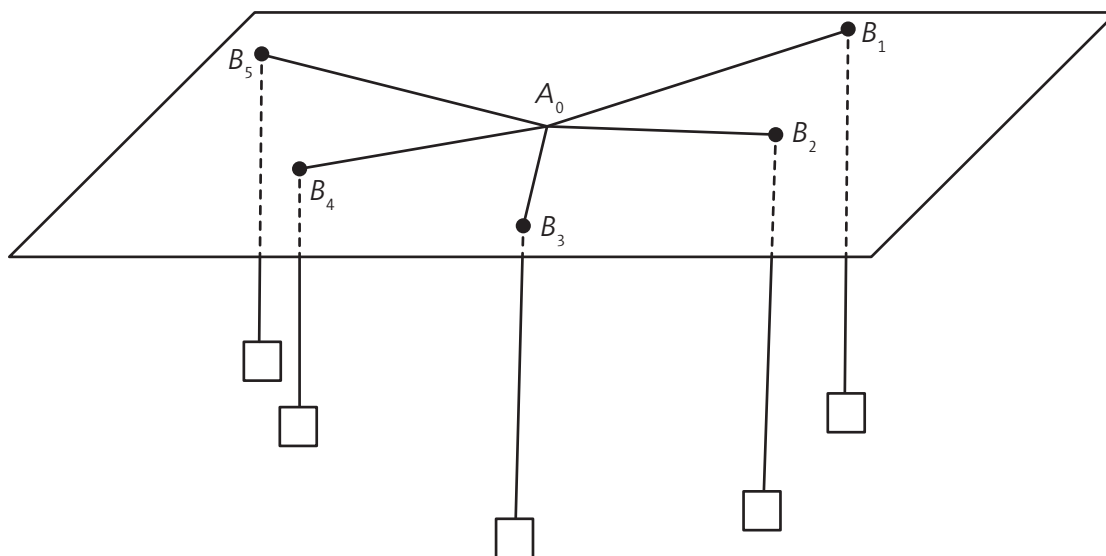


Sobre  $A_0$  actúan  $n$  fuerzas iguales de tensión, dirigidas por  $\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}, \dots, \overline{A_0B_n}$ . Estas  $n$  fuerzas se encuentran equilibradas.

Así pues, en el punto  $A_0$ , para el cual la suma de distancias hasta los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  es mínima, la resultante  $n$  de las fuerzas iguales y dirigidas por  $\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}, \dots, \overline{A_0B_n}$  es nula. [Señalemos que esta proposición necesita ser precisada. Es válida si el punto  $A$ , para el cual la suma de longitudes  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$  es mínima, no coincide ni con uno de los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Por ejemplo, en el caso de tres puntos  $B_1, B_2, B_3$ , el punto  $A$  se encuentra dentro del triángulo  $B_1, B_2, B_3$ , siempre que ninguno de sus ángulos sea

mayor que  $120^\circ$ . Si, en cambio, uno de ellos, por ejemplo, en el vértice  $B_1$  es igual o mayor que  $120^\circ$ , el punto  $A$  coincide con este vértice].

Volvamos al punto  $A_0$ , que puede hallarse por el procedimiento mecánico en una placa horizontal donde están hechos  $n$  orificios en los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ; atamos  $n$  cuerdas en un punto sobre la placa, hacemos pasar estas cuerdas a través de los orificios y suspendemos de ellas las pesas de igual peso (ver figura siguiente).



Nuestro sistema de cuerdas con pesas llegará al estado de equilibrio y el punto común de las cuerdas en el estado de equilibrio será precisamente el punto buscado  $A_0$ . En efecto, sobre este punto actúan  $n$  fuerzas iguales de tensión de las cuerdas dirigidas hacia los orificios  $B_1, B_2, \dots, B_n$  (cada una de estas fuerzas equivale al peso de una pesa colgada). Estas  $n$  fuerzas iguales están equilibradas.

Ahora nuestro problema se reduce al problema siguiente: están dados  $n$  puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , se necesita construir en el punto  $A$  un depósito y carreteras rectilíneas hacia él  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ . Hállese la posición más ventajosa del depósito para que la suma de longitudes de las carreteras  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$  sea mínima.

A veces este problema se presenta de un modo más complejo; se supone que la cantidad de cargas del depósito  $A$  en los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  es proporcional a  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , respectivamente. Hace falta encontrar tal posición del punto  $A$  para la cual la suma

$$S = q_1 \overline{AB_1} + q_2 \overline{AB_2} + \dots + q_n \overline{AB_n}$$

sea mínima (es decir, para la cual al suministrar las cargas por las carreteras  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ , la cantidad de toneladas por kilómetros sea mínima).

El problema se resuelve igual que el anterior (el que representa un caso particular, cuando  $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ). Se busca la posición de equilibrio del sistema de  $n$  hilos  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ , fijados en los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , con un punto común  $A$ . Pero los hilos  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$ , tienen diferentes tensiones, proporcionales a los números  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , o sea, a  $q_1 T, q_2 T, \dots, q_n T$ , respectivamente.

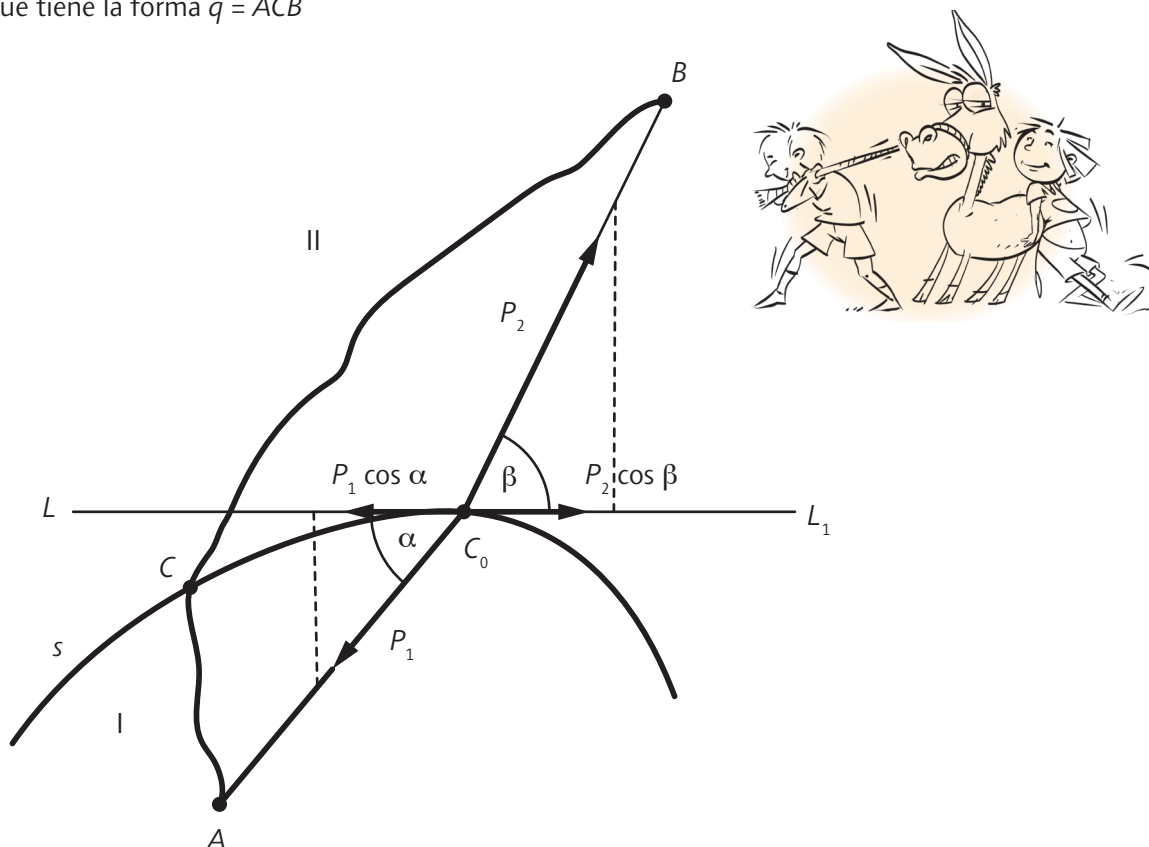
La energía potencial de los hilos  $\overline{AB_1}, \overline{AB_2}, \dots, \overline{AB_n}$  es igual a  $q_1 T \overline{AB_1} + q_2 T \overline{AB_2} + \dots + q_n T \overline{AB_n}$ , respectivamente. La energía potencial total del sistema es igual a

$$V = T(q_1 \overline{AB_1} + q_2 \overline{AB_2} + \dots + q_n \overline{AB_n}) = TS. \quad (1)$$

La posición del valor mínimo  $V$ , es decir, del valor mínimo de la suma  $S$  es la posición de equilibrio del sistema. Toda línea  $\overline{AB_i}, i = 1, 2, \dots, n$ , se transforma en un segmento rectilíneo. El punto común  $A = A_0$  de estos hilos se encuentra equilibrado bajo la acción de  $n$  fuerzas de tensión, dirigidas por los segmentos  $\overline{A_0 B_1}, \overline{A_0 B_2}, \dots, \overline{A_0 B_n}$ , y proporcionales a los números  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

El procedimiento mecánico de encontrar el punto buscado  $A_0$ , expuesto arriba, conserva su validez; no obstante, las pesas colgadas de los extremos de las cuerdas pasadas a través de los orificios en los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  deben ser proporcionales a los números  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

→ 3. Un problema referente al equilibrio del sistema de dos hilos. Consideremos un hilo flexible no homogéneo que tiene la forma  $q = ACB$



Los puntos  $A$  y  $B$  del hilo están fijados, mientras que el punto  $C$  se desplaza por la curva  $s$ , con la particularidad de que en la parte  $\widehat{AC}$  del hilo la tensión es  $T_1$ , y en la parte  $\widehat{CB}$  del hilo la tensión es igual a  $T_2$ . La energía potencial  $V(q)$  del hilo es igual a

$$V(q) = V(\widehat{AC}) + V(\widehat{CB}).$$

En virtud de que

$$V(\widehat{AC}) = T_1 l(AC),$$

$$V(\widehat{CB}) = T_2 l(\widehat{CB})$$

tenemos:

$$V(q) = T_1 l(\widehat{AC}) + T_2 l(\widehat{CB}). \quad (2)$$

Suponiendo que en la posición  $q_0$  el hilo  $q$  tiene la energía potencial mínima, en virtud del principio de Dirichlet, el hilo se encuentra equilibrado, ocupando la posición  $q_0$ . Sea  $C_0$  el punto de intersección de  $q_0$  y  $s$ .

Es fácil ver que cada una de las partes  $\widehat{AC_0}$  y  $\widehat{C_0B}$  de la línea  $q_0$  es un segmento rectilíneo. Examinemos las condiciones de equilibrio en el punto  $C_0$ .

A este punto están aplicadas las fuerzas de tensión: la fuerza  $P_1$  dirigida por  $C_0A$  e igual a  $T_1$ , y la fuerza  $P_2$  dirigida por  $C_0B$  e igual a  $T_2$ . Tracemos la tangente  $LL_1$  a la curva  $s$  en el punto  $C_0$ . Introduzcamos las designaciones:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AC_0L} &= \alpha \\ \widehat{L_1C_0B} &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La componente tangente de la fuerza  $P_1$  es igual a  $P_1 \cos \alpha = T_1 \cos \alpha$  y está dirigida por  $C_0L$ ; la componente tangente de la fuerza  $P_2$  es igual a  $P_2 \cos \beta = T_2 \cos \beta$  y está dirigida por  $C_0L_1$ .

El punto  $C_0$  está equilibrado, si están equilibradas ambas componentes tangentes, es decir, si

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta. \quad (4)$$

Así, la línea  $q_0$  es una quebrada  $AC_0B$  con vértice  $C_0$  en la curva de separación  $s$ , en la cual se cumple la condición (4).

Alexis Claude Clairaut nació el 7 de mayo de 1713 en París, Francia, donde también murió, el 17 de mayo de 1765.

Era un matemático francés que trabajó para confirmar la creencia de Isaac Newton y Christiaan Huygens de que la Tierra estaba achatada en los polos.



### Su biografía

El padre de Alexis Clairaut, Jean-Baptiste Clairaut, enseñaba matemáticas en París y sobresalió su excelencia cuando fue elegido miembro de la Academia de Berlín. Su madre, Catherine Petit, tuvo veinte hijos, aunque solo Alexis sobrevivió hasta la edad adulta.

Jean-Baptiste Clairaut educó a su hijo en casa y estableció estándares increíblemente altos. Alexis abordó tempranamente los *Elementos* de Euclides mientras aprendía leer y a la edad de nueve años dominaba el excelente libro de texto de matemática *Guía para la aplicación del álgebra a la geometría e integral*, que presentaba una buena introducción al cálculo diferencial, así como a la geometría analítica. Inmediatamente después, Clairaut pasó a estudiar los libros de Guillaume de L'Hôpital, en particular su famoso texto *Análisis de infinitesimales para el dominio de líneas curvas*.

Pocas personas han leído su primer artículo en una academia a la edad de 13 años. Sin embargo, este fue el increíble logro de Clairaut cuando leyó su artículo "Cuatro problemas sobre nuevas curvas" en la Academia de París, en 1726. Aunque Alexis fue el único de los veinte hijos en llegar a la edad adulta, como ya dijimos, tenía un hermano menor que a los 14 años leyó un trabajo de matemáticas en la Academia, en 1730. Este hermano murió en 1732, a la edad de 16 años.

Clairaut comenzó a realizar investigaciones sobre las curvas de doble curvatura, las cuales completó en 1729. Como resultado de este trabajo, fue propuesto como miembro de la Academia de París el 4 de septiembre de 1729, pero el rey no instituyó su elección hasta 1731. En julio de ese año, Clairaut se convirtió en la persona más joven jamás elegida por la Academia de Ciencias de París. Allí se unió a un pequeño grupo, encabezado por Pierre-Louis Maupertuis, que apoyaba la filosofía natural de Newton. Maupertuis era 15 años mayor que Clairaut, a pesar de lo cual, a los 33 años también era un joven miembro de la Academia.

Nuestro matemático se hizo amigo cercano de Maupertuis, Voltaire y Emilie du Châtelet. Estas relaciones trascendían mucho una simple amistad, ya que hizo un trabajo importante, tanto con Maupertuis como con Du Châtelet. Ayudó a la marquesa du Châtelet, tradujo los *Principia Mathematica* de Newton al francés, un proyecto que comenzó antes de 1745 y continuó hasta que se publicó parte del libro, en 1756. Muchas de las propias teorías de Clairaut se agregaron al libro, además de la traducción de Newton por Du Châtelet. Junto con Maupertuis, visitó Basilea en 1734, para pasar unos meses estudiando con Johann Bernoulli. Mientras allí estaba, se hizo amigo de Samuel König y los dos sostuvieron una útil colaboración científica por correspondencia durante muchos años.

Clairaut publicó algunos trabajos importantes durante el periodo de 1733 a 1743. Escribió el artículo "Sobre los problemas de máximos y mínimos" en 1733, sobre cálculo de variaciones, que estaba redactado al estilo de Johann Bernoulli, y en el mismo año publicó "Sobre geodésicas de cuadráticas de rotación", estudiando nuevamente un tema al que había contribuido el mismo Bernoulli. Al año siguiente, estudió las ecuaciones diferenciales ahora conocidas como *Ecuaciones diferenciales de Clairaut* y brindó una solución singular, además de la integral general de las ecuaciones. En 1739 y 1740 se publicaron nuevos trabajos sobre el cálculo integral, que demostraban la existencia de factores integrantes para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden (un tema que también interesaba a Johann Bernoulli, Charles Reyneau y Leonhard Euler). En 1742 Clairaut publicó un importante trabajo sobre dinámica, pero al año siguiente centró su atención en el tema por el que es más conocido. Se interesó por resolver cuestiones teóricas derivadas de los resultados prácticos de una expedición realizada unos años antes.

Desde el 20 de abril de 1736 hasta el 20 de agosto de 1737, Clairaut había participado en una expedición a Laponia dirigida por Maupertuis, destinada a medir un grado de longitud. El emprendimiento estaba organizado por la Academia de Ciencias de París, considerado como continuación del programa iniciado por

Giovanni Cassini para verificar la prueba teórica de Newton de que la Tierra es un esferoide achatado. Además de Maupertuis y Clairaut, el grupo había atraído a otros jóvenes científicos como Pierre-Charles Le Monnier, Louis-Camus Destouches y Anders Celsius. El equipo exitoso no estuvo exento de críticas: “Este grupo entusiasta cumplió su misión con rapidez y precisión, en un ambiente de alboroto juvenil que algunos reprochaban”.

En 1743, Clairaut publicó *Teoría de la forma de la Tierra*, confirmando la creencia de Newton y Huygens de que la Tierra estaba achatada en los polos. El libro era un estudio teórico orientado a respaldar los datos experimentales sobre la forma de la Tierra que había recopilado durante la expedición a Laponia y era importante, ya que sentaba las bases para el estudio de la hidrostática. Además de en las ideas de Newton y Huygens, se fundamentaba también en el trabajo de Colin Maclaurin sobre las mareas, que mostró algunos resultados de fondo en hidrostática.

Después de este estudio sobre la forma de la Tierra, Clairaut comenzó a trabajar en el problema de los tres cuerpos en 1745, en particular acerca de la órbita de la Luna. Las primeras conclusiones que sacó de sus investigaciones fueron que la teoría de la gravedad de Newton era incorrecta y que la ley del inverso del cuadrado no se cumplía. En esto contó con el apoyo de Euler quien, después de enterarse de sus conclusiones, le escribió el 30 de septiembre de 1747: “Puedo dar varias pruebas de que las fuerzas que actúan sobre la Luna no siguen exactamente la regla de Newton, y la que saca del movimiento del apogeo es la más llamativa...”.

Clairaut, más seguro con el apoyo de Euler, anunció a la Academia de París el 15 de noviembre de 1747 que la ley del inverso del cuadrado era falsa. Sorprendentemente, justo antes de que hiciera su anuncio, Jean le Rond D’Alembert depositó en la Academia un documento que mostraba la coincidencia de sus cálculos con los de Clairaut.

Por supuesto, no todos los matemáticos de la época creían en la teoría de Newton: algunos todavía adherían a las teorías del vórtice de René Descartes. El anuncio de que la ley de Newton era incorrecta hizo que muchos de los partidarios de Descartes se alegraran e incluso Euler volvió a apoyar sus opiniones. Algunos atacaron las conclusiones de Clairaut, entre ellos Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, quien avanzó un argumento metafísico basado en la simplicidad de la ley del inverso del cuadrado.

Sin embargo, para la primavera de 1748 Clairaut se dio cuenta de que la diferencia entre el movimiento observado del apogeo de la Luna y la predicción elaborada por la teoría se debía a errores provenientes de las aproximaciones que se estaban haciendo en lugar de aplicar la ley del inverso del cuadrado de la atracción gravitacional.

El matemático anunció a la Academia el 17 de mayo de 1749 que su teoría ahora funcionaba de acuerdo con la ley del cuadrado inverso. Luego disfrutó viendo a D’Alembert y Euler esforzándose durante un tiempo a repetir sus cálculos. Escribió a su amigo Gabriel Cramer: “[...] D’Alembert y Euler no tienen ni idea de la estrategia que me llevó a mis nuevos resultados. Este último me escribió dos veces para decirme que había hecho infructuosos esfuerzos por encontrar lo mismo que yo, y que me suplicaba que le dijera cómo había llegado a ellos. Le dije, más o menos, de qué se trataron...”.

A Euler todavía le costaba entender correctamente lo que había hecho Clairaut, por lo que lo invitó a redactarlo formalmente haciendo que la Academia de San Petersburgo estableciera el problema del apogeo de la Luna como el tema principal de estudio para el año 1752. De hecho, su estrategia resultó eficiente pues Clairaut presentó un ensayo que le permitió comprender cabalmente su método. Euler logró superar su frustración por no haber resuelto el problema por sí mismo escribiéndole a Clairaut que sus resultados eran: “[...] el descubrimiento más importante y profundo que jamás se haya hecho en matemáticas”.

Clairaut publicó *Teoría de la Luna* en 1752. Este documento, junto con sus tablas lunares publicadas dos años después, completaba su trabajo sobre este tema particular.

A continuación, aplicó su conocimiento del problema de los tres cuerpos al cálculo de la órbita del cometa Halley para así predecir la fecha exacta de su regreso. Esto requería aproximaciones mucho más precisas que las implicadas en el problema de la Luna. En el plazo de un mes, calculó el regreso del cometa Halley a su perihelio (punto más cercano al Sol) para el 15 de abril de 1759.

Anunció su resultado a la Academia de París el 14 de noviembre en 1758. Sin embargo, la fecha real del perihelio resultó ser el 13 de marzo. Cuando apareció el cometa, solo un mes antes de la fecha prevista, Clairaut fue muy aclamado por el público. Hubo una sugerencia de que el cometa fuera renombrado y a él lo llamaron el “nuevo Thales”.

Un artículo de Clairaut presentado a la Academia de San Petersburgo ganó el premio de 1762 mostrando que la aplicación de un método diferente mejoraba sus resultados. En este trabajo obtenía la fecha del 30 de marzo, la cual, dada la complejidad del problema de tener en cuenta las perturbaciones de Júpiter y Saturno, era ciertamente buena.



Alexis Clairaut

Surgió una disputa entre Clairaut y D'Alembert con respecto a este estudio relativo a los cometas. Aunque los dos habían sido rivales razonablemente amistosos hasta alrededor de 1747, a continuación sus relaciones se deterioraron. Cuando Clairaut escribió una reseña del libro de D'Alembert que contenía tablas lunares, escribe Hankins, "No fue abiertamente hostil, sino que adoptó el tono condescendiente de un maestro que instruye a un estudiante capaz; elogió la gran habilidad analítica de D'Alembert, pero dijo que sus tablas eran de poca utilidad, al menos en comparación con las propias".

En un ataque a aquellos que, como D'Alembert, se habían concentrado en la teoría y descuidaron el ensayo, Clairaut escribió: "Para evitar experimentos delicados o cálculos largos y tediosos, y sustituirlos por métodos analíticos que les cuestan menos trabajo, a menudo elaboran hipótesis que no tienen cabida en la naturaleza; persiguen teorías que son ajenas a su objeto, mientras que un poco de constancia en la ejecución de un método perfectamente simple seguramente los habría llevado a su objetivo".

Cuando D'Alembert atacó la solución de Clairaut al problema de los tres cuerpos por estar basada en la observación y no, como su propio trabajo, en resultados teóricos, se inició la disputa más amarga de sus vidas. Es difícil juzgar cuál de los dos grandes matemáticos tenía razón, pero Clairaut claramente ganó la discusión pública en ese momento, sobre todo porque su prestigio era muy alto después de la notable predicción de la fecha del regreso del cometa Halley.

También cabe mencionar otro tema al que Clairaut hizo contribuciones importantes, a saber, la aberración de la luz. Debía tener un conocimiento profundo de este tema, adquirido en el momento de las observaciones realizadas por la expedición de Laponia. Asimismo, tuvo que aplicar correcciones por aberración en su trabajo sobre los planetas y los cometas. Estaba particularmente interesado en las ideas para mejorar el diseño de los telescopios mediante el uso de lentes compuestos por dos tipos diferentes de vidrio. Escribió algunas memorias importantes sobre el tema, estudiando la teoría y realizando experimentos ópticos. Este trabajo aún estaba incompleto en el momento de su muerte.

Clairaut trabajó en una amplia gama de problemas dentro de la matemática. Un libro de geometría, *Los Elementos de Geometría*, se publicó en 1741 y uno de álgebra, *Elementos de Álgebra*, en 1749. En el prefacio de *Elementos de Geometría*, Clairaut comentaba sus objetivos al escribir el libro: "Tenía la intención de volver a lo que podría haber dado lugar a la geometría; y traté de desarrollar sus principios por un método lo suficientemente natural como para que uno pudiera suponer que era el mismo que el de los primeros inventores de la geometría, tratando solo de evitar cualquier paso en falso que pudiera haber tenido que dar...".

El libro de álgebra era un trabajo aún más erudito y llevó el tema hasta la solución de ecuaciones de cuarto grado. Intentó, con gran éxito, mostrar por qué la introducción de la notación algebraica era necesaria e inevitable. El libro se impuso para la enseñanza en las escuelas francesas durante muchos años.

Clairaut murió a la edad de 52 años, después de una breve enfermedad. Estaba en el apogeo de sus facultades conceptuales y había sido honrado por las principales academias de la época. Había sido elegido miembro de la Royal Society de Londres, la Academia de Berlín, la Academia de San Petersburgo y las Academias de Bolonia y Uppsala.

# El cálculo diferencial

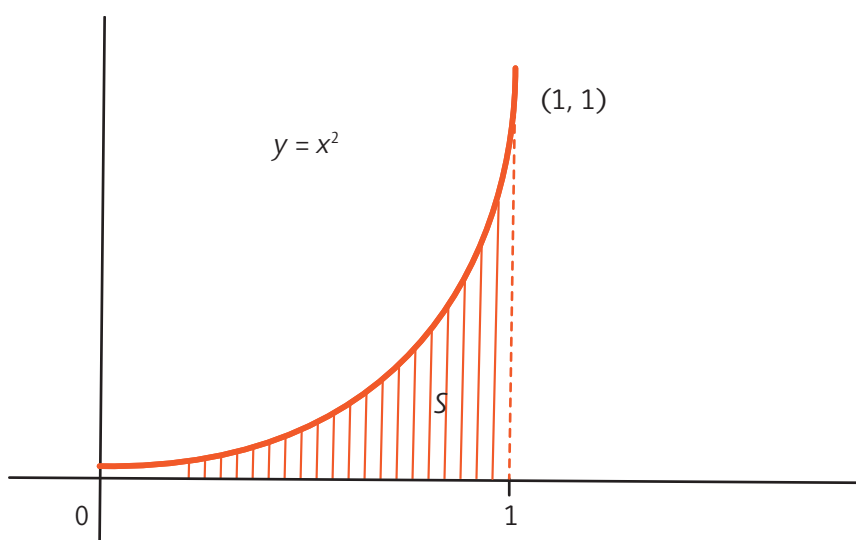


## MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA

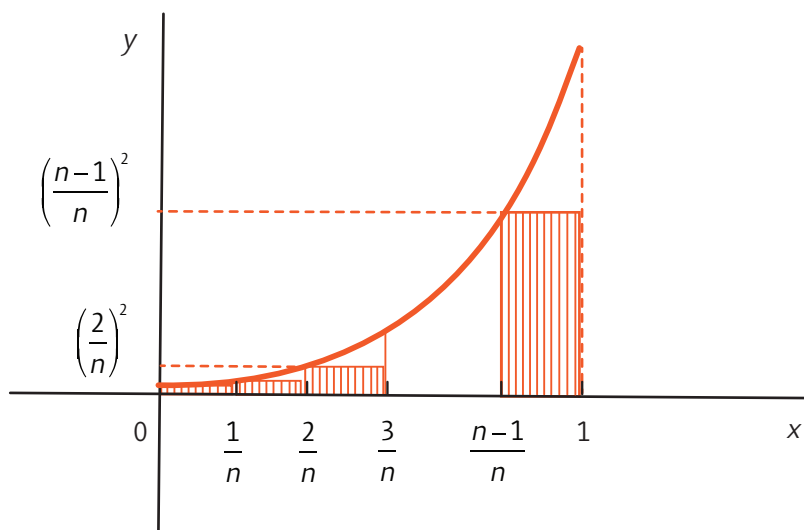
Volvamos a ver la propuesta de Miguel de Guzmán sobre este tema publicada y comentada en *Leñitas Geométricas* 9, 4ª época.

### De las sucesiones al cálculo de áreas

Calcular el área señalada en la figura siguiente es fácil si aplicamos nuestros conocimientos del cálculo integral.



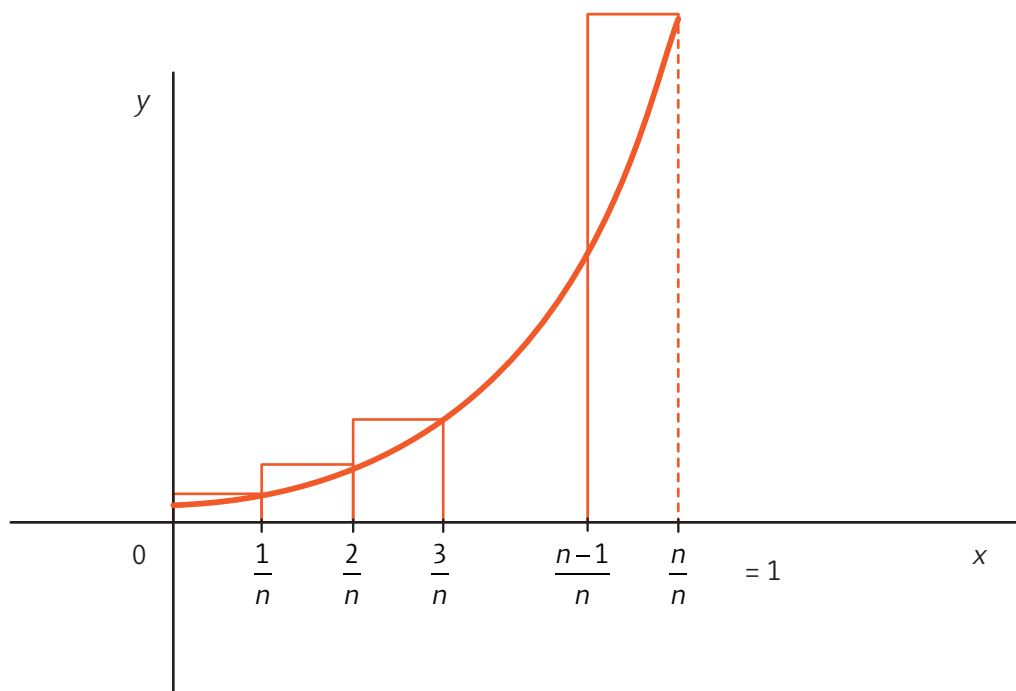
Antes de que se conociera el cálculo integral, los matemáticos procedían como se explica a continuación. Aproximaban el área  $S$  bajo la curva, de la forma en que lo observamos en las siguientes figuras. Dividían el eje  $\overline{OX}$  en  $n$  partes iguales y trazaban rectángulos de base  $\frac{1}{n}$  por encima y por debajo de la curva.





Así, en la figura de arriba, el área  $S$  es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos:

$$S > \frac{1}{n} \left( \frac{0}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^2$$



y en esta nueva figura anterior,  $S$  es menor que la suma de las áreas de los rectángulos:

$$S < \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \left( \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n} \right)^2.$$

Con esto resulta:

$$\frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] < S < \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2].$$

Y ahora, como sabemos que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + h^2 = h \frac{(h+1)(2h+1)}{6}$$

obtenemos

$$\frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) < S < \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right).$$

Pero la mejor aproximación se tendrá cuando las bases de los rectángulos sean lo más pequeñas posible (para comprobarlo tracemos rectángulos de base  $\frac{1}{10}$  y después de base  $\frac{1}{20}$ ), es decir, cuando  $n$  tiende a infinito.

Así pues, haciendo tender  $n$  a infinito, la expresión anterior

$$\frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) < S < \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right)$$

se reduce a:

$$\frac{1}{3} \leq S \leq \frac{1}{3} \rightarrow S = \frac{1}{3}.$$

### El método de Arquímedes

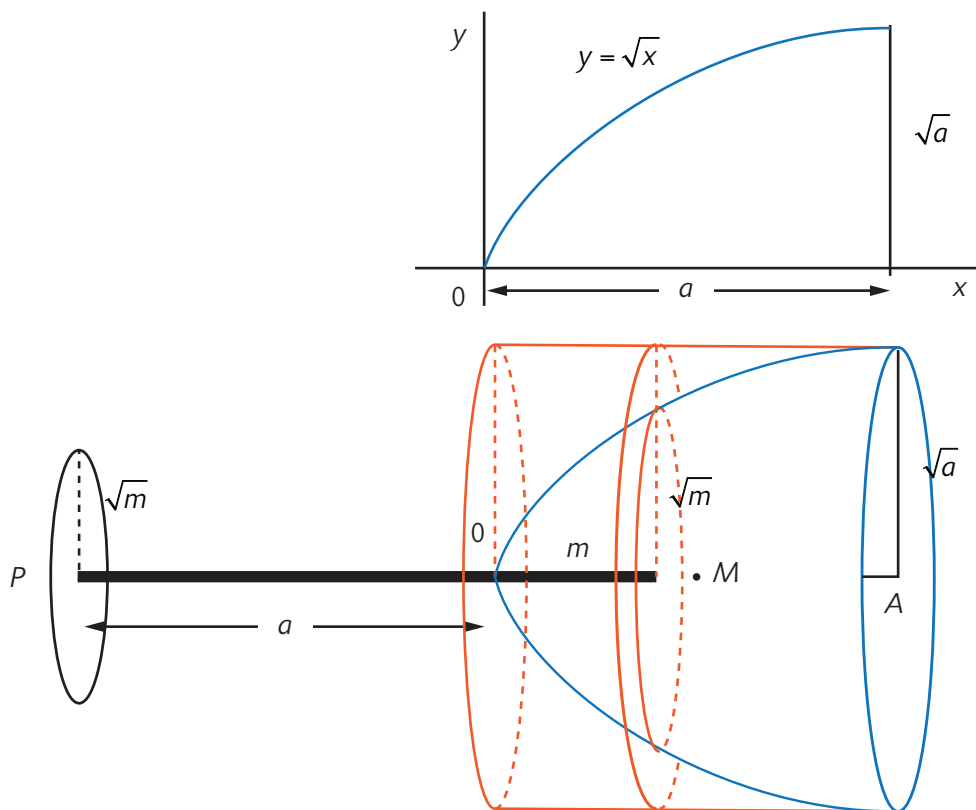
Hasta el siglo xx no se entendió bien cómo pudo Arquímedes obtener algunos de sus resultados matemáticos más llamativos.

Un palimpsesto es un pergamino en el que alguna vez hubo algo escrito, lo cual en un momento dado se borró para escribir en él otra cosa que se juzgó más interesante. En 1906 se descubrió en Constantinopla un

palimpsesto que había contenido uno de los tratados perdidos de Arquímedes, escrito por él en el siglo III a. de C. Se llamaba *Sobre el método*. Se pudo entonces recuperar esta obra maestra, en la que Arquímedes explicaba su modo de proceder para que la concreción de sus maravillosas ideas lo condujera a los resultados obtenidos.

En muchos casos, inicialmente, se valía de analogías mecánicas. Luego demostraba sus resultados con perfecto rigor matemático. Esta es la actitud sana para el matemático que investiga.

Aquí tenemos un ejemplo. ¿Cuál será el volumen de la figura que resulta al girar alrededor del eje  $Ox$  la sección de parábola señalada en la figura de abajo?



Arquímedes razonaba así, cuidando de conectar, mediante una analogía mecánica, el volumen del paraboloides –así se llama la tal figura– con el del cilindro que lo envuelve, como se indica en el dibujo. Si se corta el paraboloides a distancia  $m$  resulta un disco de radio  $\sqrt{m}$  y superficie  $\pi m$ . Este disco se coloca en un punto  $P$ , a una distancia  $a$ , a la izquierda de  $O$ . A la derecha de  $O$ , a la distancia  $m$  se considera colocado un disco de radio  $\sqrt{a}$ , el que el cilindro determina en el plano que secciona el paraboloides.

Si se supone que los centros de estos dos discos están unidos por una palanca que tiene un punto de apoyo en  $O$ , resulta que los dos discos permanecen en equilibrio pues es cierto que, si  $d$  representa la densidad, peso disco izquierda  $\times$  brazo palanca  $= (\pi m d) \times a =$  peso disco derecha  $\times$  brazo palanca  $= (\pi a d) \times m$ .

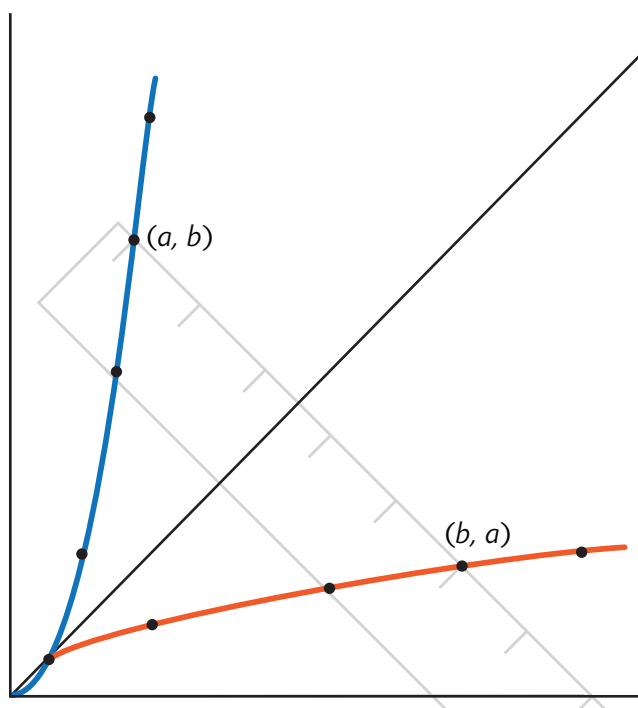
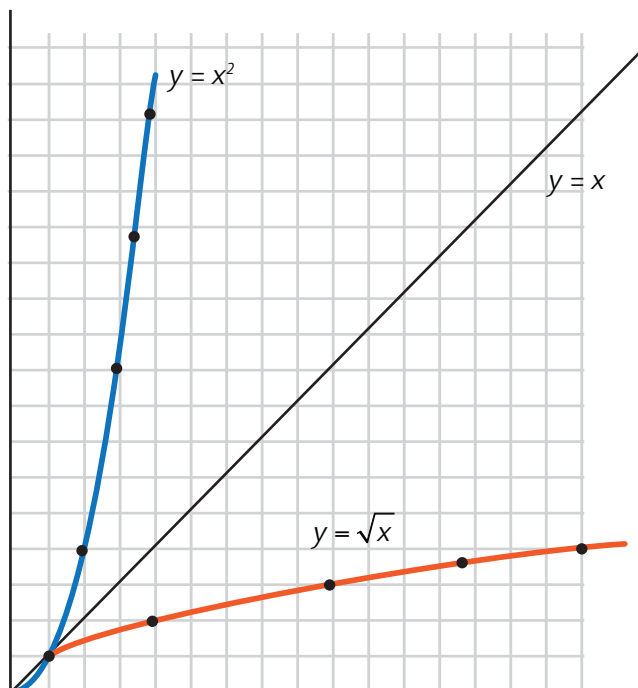
Como esto mismo sucede para cualquier sección a distancia arbitraria  $m$ , resulta que todo el paraboloides colocado en  $P$  a distancia  $a$  de  $O$  se equilibra con el cilindro total colocado tal como está en el dibujo. Como este ejerce su peso sobre el centro de gravedad del cilindro, que es el punto medio  $M$  de  $\overline{OA}$ , a distancia  $\frac{a}{2}$ , resulta que el volumen del paraboloides es la mitad del volumen del cilindro. Esto es, el volumen del paraboloides es  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

### Estudio de tres nuevas funciones para entrenamiento

¿En qué consisten las funciones inversas de las funciones seno, coseno y tangente?  
 ¿Cómo son sus derivadas?

**Función inversa de otra.** Por lo ya visto en varias de las funciones que hemos estudiado, la función inversa de  $y = x^2$ , con  $x < 0$ , es  $y = \sqrt{x}$ .





Las curvas son simétricas respecto de la recta  $y = x$ . Lo podemos comprobar valiéndonos de una regla, como se ve en el dibujo. Análogamente, se ve que las funciones exponencial y logarítmica de la misma base son inversas la una de la otra.

En general, se llama *función inversa* de  $f(x)$  a otra función que se designa por  $f^{-1}(x)$  y que cumple la siguiente condición:

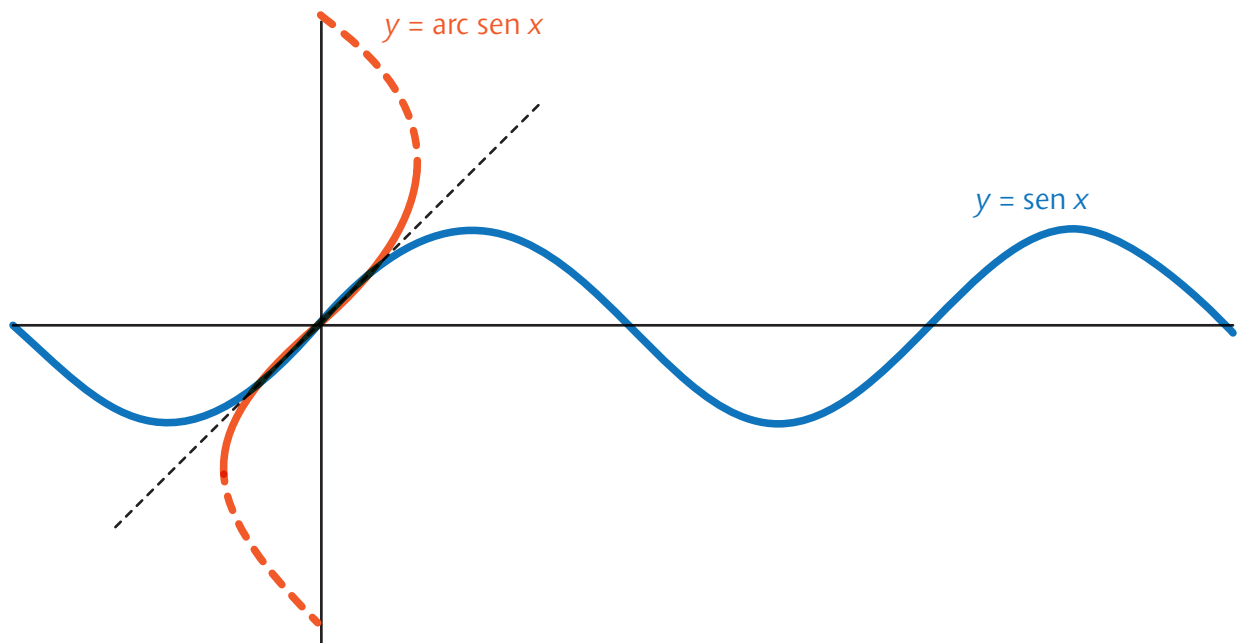
$$\text{si } f(a) = b, \text{ entonces } f^{-1}(b) = a.$$

El resultado de componer una función con su inversa es la función identidad  $I$ , que cumple  $I(x) = x$ :

$$f(f^{-1}(x)) = x; \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

### **La función inversa de la función seno**

La función inversa de  $\sin x$  se designa por  $\arcsin x$  (se lee "arco seno de equis"). Su gráfica se obtiene a partir de la del seno mediante simetría respecto a la recta  $y = x$ .



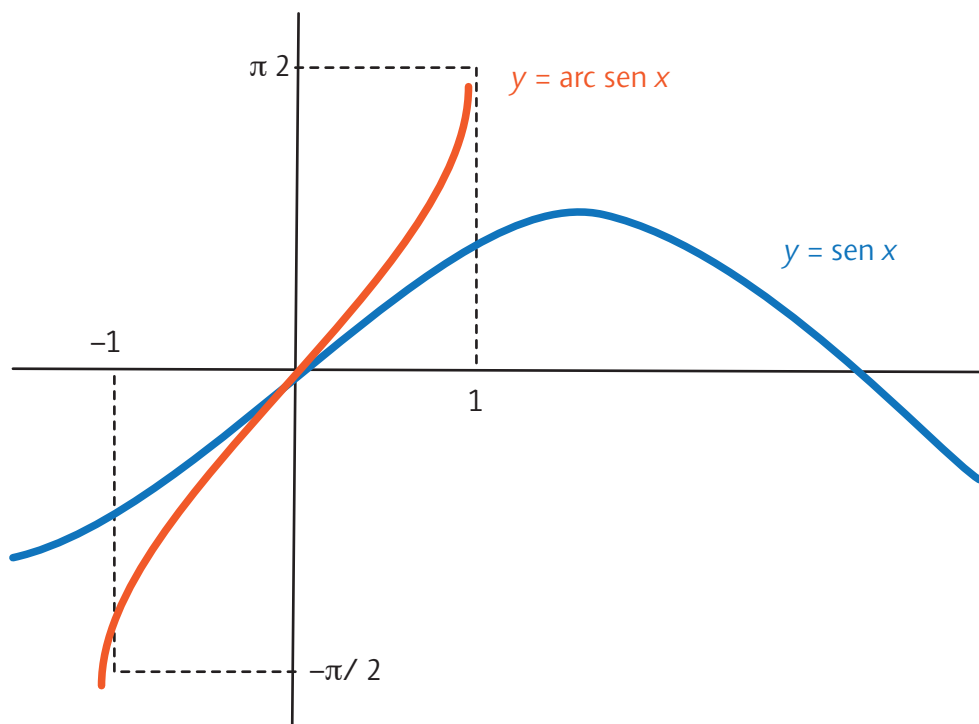
En principio, es la gráfica que aparece en anaranjado en la figura; pero ocurre que esta línea no puede representar a una función, pues para un mismo valor de  $x$  hay muchas posibles imágenes. (Efectivamente, hay muchos arcos para los que el seno toma, por ejemplo, el valor  $0,5$ :  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots$ ).

Para que sea una función, hemos de quedarnos con un trozo de gráfica que sea unívoca, es decir que a cada valor de  $x$  le corresponda un único valor de  $y$ . Cualquiera de los infinitos tramos podría servir, pero se acostumbra a seleccionar el que aparece dibujado en trazo continuo. (Son los valores con que trabaja la calculadora).

Por tanto, en adelante, diremos que la función  $\text{arc sen } x$  está definida así:

$$[-1, 1] \xrightarrow{\text{arc sen}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{arc sen } a = b \Leftrightarrow \text{sen } b = a$$



Observemos que se trata de una función creciente.

Calculemos su derivada; es decir, calculemos la derivada de  $\phi(x) = \text{arc sen } x$ . Tomamos la función inversa (la función seno) en los dos miembros:

$$\text{sen } \phi(x) = \text{sen}(\text{arc sen } x) \rightarrow \text{sen } \phi(x) = x.$$

Ahora, derivamos:

$$\text{sen } \phi(x) \cdot \phi'(x) = 1.$$

Despejamos  $\phi'(x)$ :

$$\phi'(x) = \frac{1}{\text{cos } \phi(x)} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Puesto que

$$\text{sen } \phi(x) = x \cdot \text{cos } \phi(x) = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 \phi(x)} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

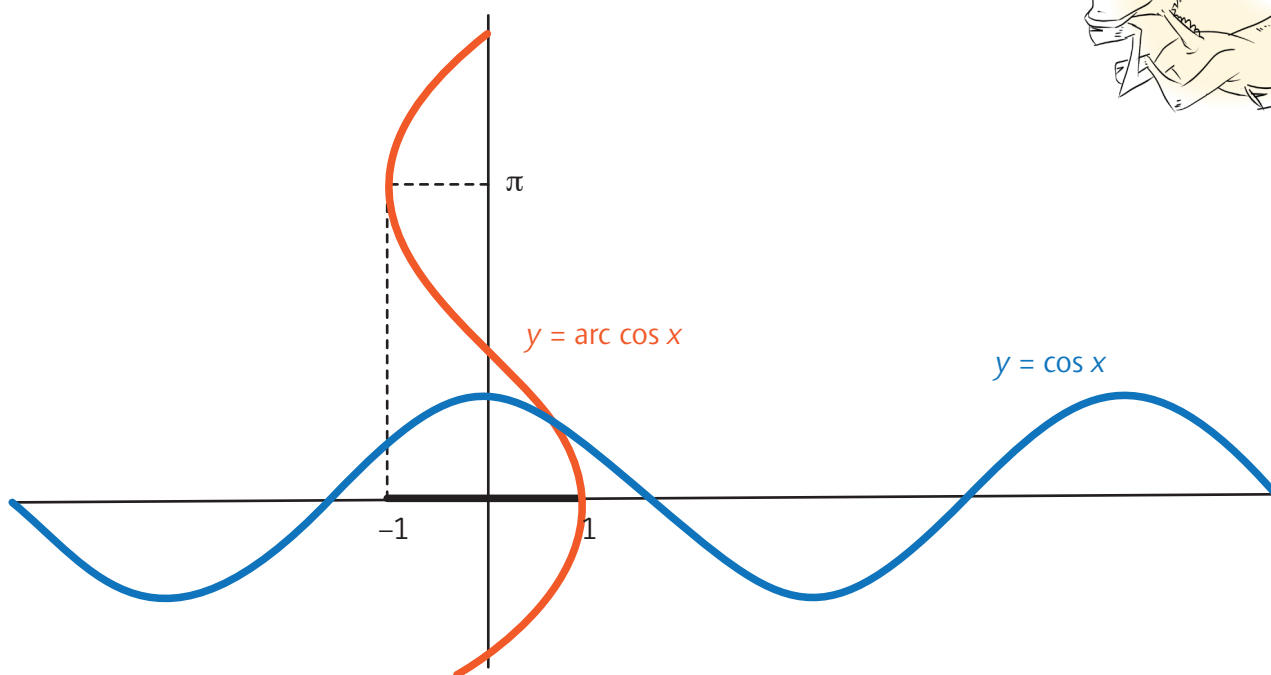
Aparece el doble signo porque la función inversa del seno tiene muchas ondulaciones: unas crecientes (derivada positiva) y otras decrecientes (derivada negativa). Pero como, finalmente, escogimos un tramo creciente como función arc sen  $x$ , su derivada será:

$$D(\text{arc sen } x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

### La función inversa de la función coseno

Análogamente a como se ha hecho con arc sen, se define el arc cos (se lee "arco coseno"):

$$[-1, 1] \overline{\text{arc cos } x} [0, \pi]; \quad \text{arc cos } a = b \leftrightarrow \text{cos } b = a.$$



En este caso es una función decreciente. Por eso su derivada, que se obtiene exactamente igual que la anterior, es negativa:

$$\phi(x) = \text{arc cos } x; \quad \text{cos } \phi(x) = x; \quad -\text{sen } \phi(x) \cdot \phi'(x) = 1$$

$$\phi' = \frac{1}{\text{sen } \phi(x)} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

Puesto que

$$\text{cos } \phi(x) = x \quad \text{sen } \phi(x) = \pm\sqrt{1-\text{cos}^2 \phi(x)} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Como la derivada tiene que ser negativa, queda:

$$D(\text{arc cos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## La función inversa de la función tangente

Análogamente, la inversa de la función tangente es la arc tg (se lee "arco tangente"):

$$(-\infty, \infty) \overline{\text{arc tg}}\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \text{arc tg } a = b \Leftrightarrow \text{tg } b = a.$$

El cálculo de su derivada es:

$$\phi(x) = \text{arc tg } x, \quad \text{tg } \phi(x) = x$$

$$[1 + \text{tg}^2 \phi(x)] \cdot \phi'(x) = 1$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \phi(x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Es decir:  $D(\text{arc tg } x) = \frac{1}{1 + x^2}$ .

### Armando festivales y pasatiempos



1. Calcular:

a)  $\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;    b)  $\text{arc sen}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ ;    c)  $\text{arc cos } 0$ ;    d)  $\text{arc sen } 0$ ;    e)  $\text{arc tg } 0$ ;

f)  $\text{arc tg } 1$ ;    g)  $\text{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

**Soluciones:** a)  $45^\circ$ ,    b)  $-60^\circ$ ,    c)  $90^\circ$ ,    d)  $0^\circ$ ,    e)  $0^\circ$ ,    f)  $45^\circ$ ,    g)  $120^\circ$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a)  $y = \text{arc sen } \sqrt{x+1}$ ;    b)  $y = \text{arc sen } \frac{x+1}{x-1}$ ;    c)  $y = e^{\text{arc sen } x}$ ;    d)  $y = \ln \text{arc cos } (x-1)$ ;

e)  $y = x \cdot \text{arc cos } 3x$ ;    f)  $y = 5 \text{ arc cos } (2x-1)$ .

**Soluciones:**

a)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{-x^2-x}}$     b)  $y' = \frac{\sqrt{-x}}{(x-1)x}$     c)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{arc sen } x}$     d)  $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \text{arc cos}(x-1)}$

e)  $y' = \text{arc cos } 3x - \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$     f)  $y' = \frac{-15 \text{ arc cos}^2(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}}$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \text{arc tg } 3x^2$ ;    b)  $f(x) = \text{arc sen } x \cdot \text{arc tg } 2x$ ;    c)  $f(x) = \text{arc tg } \frac{2}{x-1}$ ;

d)  $f(x) = \text{arc tg } \ln(5x)$ ;    e)  $f(x) = \text{arc tg } \sqrt{6x^3}$ ;    f)  $f(x) = 2^{\text{arc tg } x^2}$ .

**Soluciones:**

a)  $y' = \frac{6x}{1+9x^4}$ ;    b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{arc tg } 2x + \frac{2}{1+4x^2} \text{arc sen } x$ ;    c)  $y' = \frac{-2}{x^2-2x+5}$ ;

d)  $y' = \frac{1}{x(1+\ln^2 5x)}$ ;    e)  $y' = \frac{3\sqrt{6x}}{2+12x^3}$ ;    f)  $y' = 2^{\text{arc tg } x^2} \ln 2 \frac{2x}{1+x}$ .

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto de abscisa  $x = 0$ :

a)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \text{arc sen } x$ ;    b)  $f(x) = \frac{\text{arc tg } x}{\sqrt{x+1}}$ ;    c)  $f(x) = \text{arc cos}^3 x \cdot \text{cotg}^2 x$ .

**Soluciones:**

**a)**  $f'(0) = 0$ ;   **b)**  $f'(0) = 1$ ;   **c)**  $f'(0) = \infty$ .

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función  $y = \arcsen x$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**Solución:**  $y = x$

6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función  $y = \arccos x$  en el punto de abscisa  $x = -2$ .

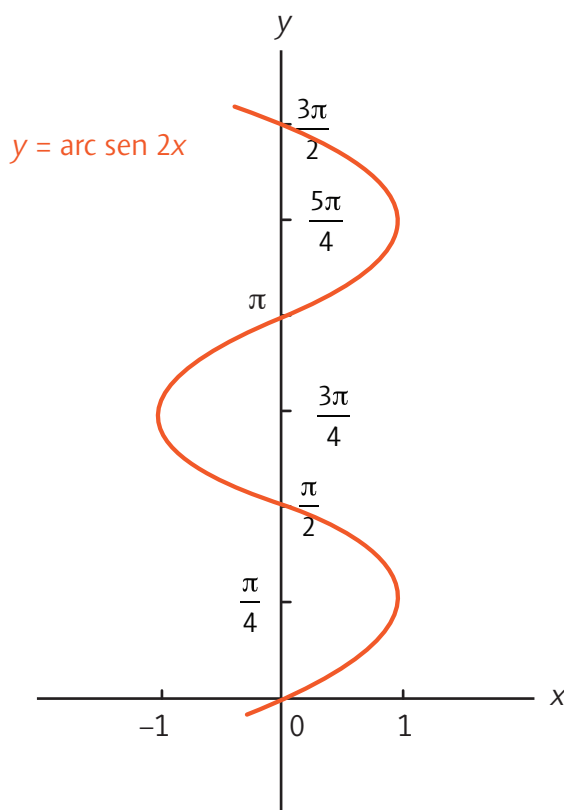
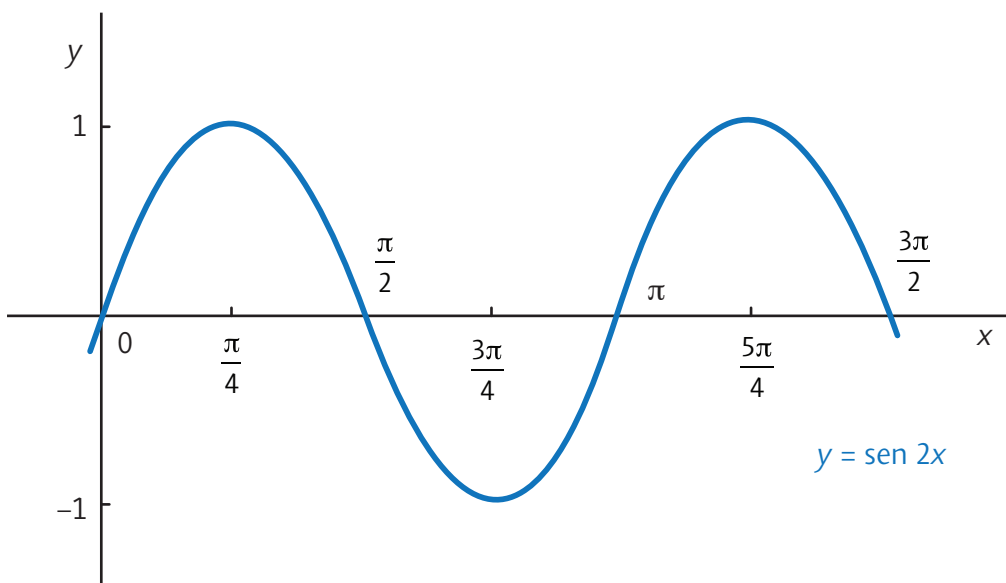
**Solución:**  $y - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - x$

7. Escribir la ecuación de la recta tangente a la función  $y = \operatorname{arctg} x$  en  $x = 1$ .

**Solución:**  $2y - \frac{\pi}{2} = x - 1$

8. Dibujar las gráficas de las funciones  $y = \operatorname{sen} 2x$  e  $y = \arcsen 2x$ .

**Soluciones:**



9. La función  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  es la función inversa de  $f(x) = x^3$ . Como sabemos,  $f'(x) = 3x^2$ , luego  $f'(2) = 12$  y  $f(2) = 8$ . ¿Cuánto vale  $g'(8)$ ?

**Solución:**  $g'(8) = \frac{1}{12}$

10. Deducir la derivada de  $g(x) = a^x$  sabiendo que su función inversa es  $f(x) = \log_a x$  y conocemos  $f'(x)$ .

**Solución:**  $g(x) = a^x$ ;  $\log_a g(x) = \log_a a^x \rightarrow \log_a g(x) = x$

$$D(\log_a g(x)) = D(x) \rightarrow \frac{1}{\ln a} = \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \rightarrow g'(x) = g(x) \ln a; \quad g'(x) = a^x \ln a.$$

11. Deducir la derivada de  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  sabiendo que su función inversa es  $f(x) = x^n$ .

**Solución:**  $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ;  $(g(x))^n = (\sqrt[n]{x})^n \rightarrow (g(x))^n = x$ ;

$$D[(g(x))^n] = D(x) \rightarrow n(g(x))^{n-1} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{n(g(x))^{n-1}}; \quad g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

12. Calcular la derivada de  $y = \sin(\arctg x)$  e  $y = e^{\arcsen x}$ .

**Solución:**  $y' = \cos(\arctg x) \frac{1}{1+x^2}$ ;  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsen x}$ .

### Teorema del punto fijo

A principios de nuestro siglo, y por obra del matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer, surgió una herramienta nueva muy válida y poderosa para el tratamiento de muchos problemas diferentes. El *teorema del punto fijo*, que así se suele llamar, se puede proponer en los términos siguientes: en una taza de café, agita su contenido sin salpicar y lo dejas reposar. Entonces, hay al menos una partícula del café que ocupa el mismo lugar que ocupaba antes de removerlo. Curioso, ¿verdad?



Pero más curioso todavía es que la formulación matemática de un hecho como este sea la clave para obtener un sin fin de consecuencias importantes en el análisis matemático moderno. Gracias a este teorema sabemos, sin más que hacer una inspección superficial, que un sistema aparentemente enrevesado como el siguiente:

$$\begin{cases} x + \sen^2 xy + \cos^3 y = 0 \\ y + \sen^3 (x^2 + y^2) + \cos^5 y = 0 \end{cases}$$

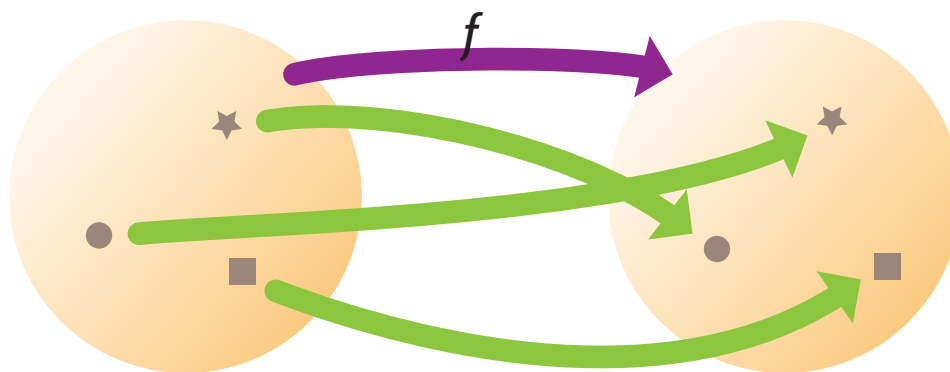
tiene al menos una solución. O que existe, con seguridad, al menos, una función  $g(x)$  que verifica las condiciones

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{1}{3} x \cos(x^2 + 1) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Estos son problemas que por otros procedimientos no parecen nada sencillos.



El teorema del punto fijo de Brouwer, en una forma sencilla, afirma que una función continua que transforma cada punto de un círculo cerrado (esto es, con su borde) en un punto del mismo círculo cerrado tiene necesariamente un punto fijo, es decir, hay un punto del círculo cuya imagen es él mismo.



El teorema es, como se dice, un teorema de existencia, es decir, asegura la existencia del punto fijo, si bien no indica ningún procedimiento efectivo para calcularlo. En muchas ocasiones esta existencia es lo mejor que se puede lograr y aunque esto pueda parecer un conocimiento inútil, no lo es.

### El paseo de la mosca

En un cuadrado de 5 x 5 se disponen 25 monedas iguales y tangentes entre sí, como indica la figura siguiente:



Una mosca se posa sobre una de ellas y tiene el capricho de hacer un recorrido por todas ellas, pasando de la moneda en que se ha posado a una moneda contigua, luego a otra que toca la última, y así sucesivamente, sin repetir monedas en su paseo. ¿Puedes configurar su itinerario?





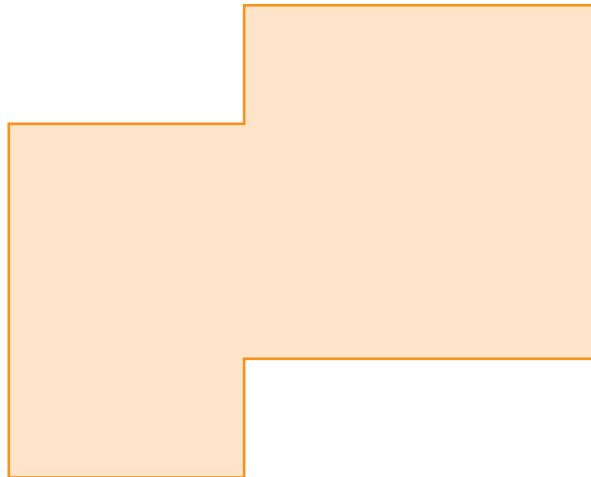
## PARA RESOLVER

con imaginación e inteligencia

### Respuesta del N° 4



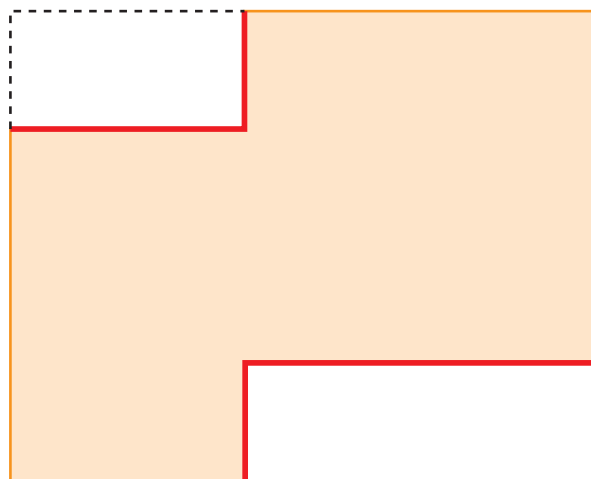
De una hoja rectangular, de 18 cm de perímetro, se recortaron dos rectángulos y se obtuvo la siguiente figura:



Hallar el perímetro de esta figura.

### Solución

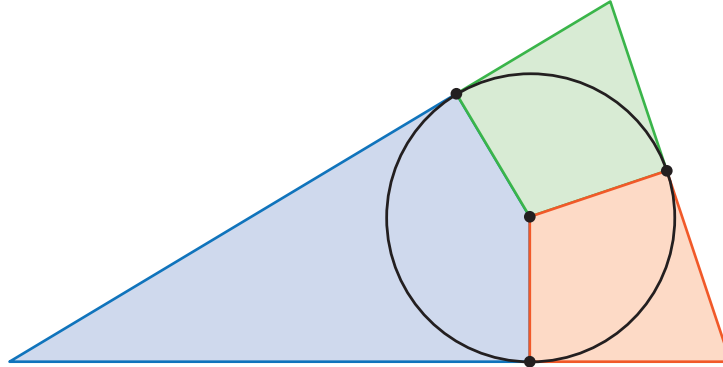
La siguiente figura muestra que las longitudes de los segmentos punteados suman el mismo valor que las longitudes de los segmentos destacados en color rojo.



En consecuencia, la figura del problema tiene el mismo perímetro que la hoja rectangular, 18 cm.



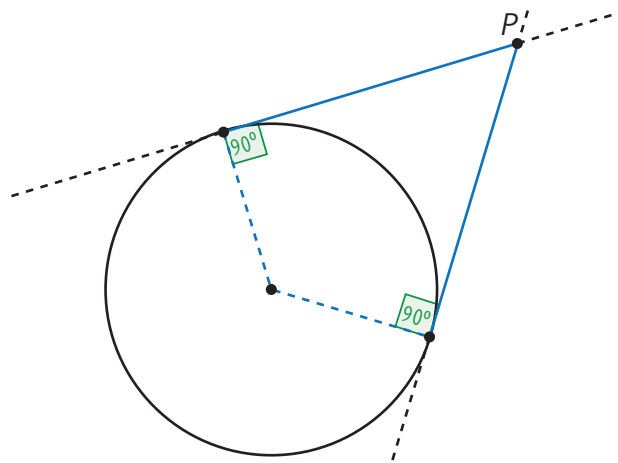
La siguiente figura muestra un triángulo con su circunferencia inscrita. Usando como vértices el incentro y los puntos de tangencia, se dibujan 3 cuadriláteros indicados con colores diferentes.



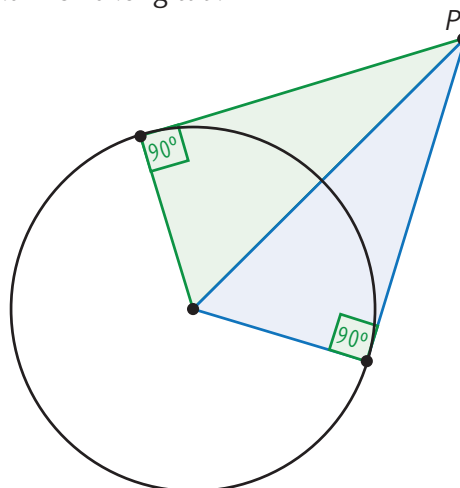
¿Qué clase de cuadriláteros son?

### Solución

Es oportuno observar que los segmentos de tangentes, trazados desde un punto exterior  $P$  a una circunferencia, tienen la misma longitud.



Usando el teorema de Pitágoras en los triángulos de la siguiente figura, se pone en evidencia que los catetos cuyo vértice es el punto  $P$  tienen la misma longitud.





Teniendo en cuenta este hecho y que los lados de cada cuadrilátero son dos radios y dos segmentos de tangentes trazados desde un mismo punto, los cuadriláteros resultan ser romboides.

*Nota:* Entendemos por romboide un cuadrilátero que tiene dos pares de lados contiguos de igual longitud.