Leñitas Geométricas*

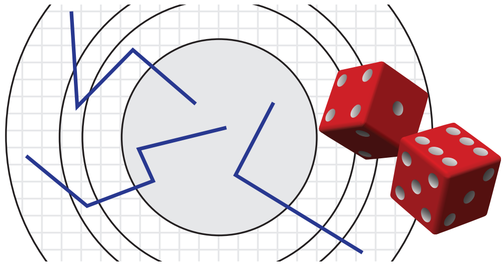
para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✈ Nº 2
23 de marzo de 2023

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

El Método Montecarlo



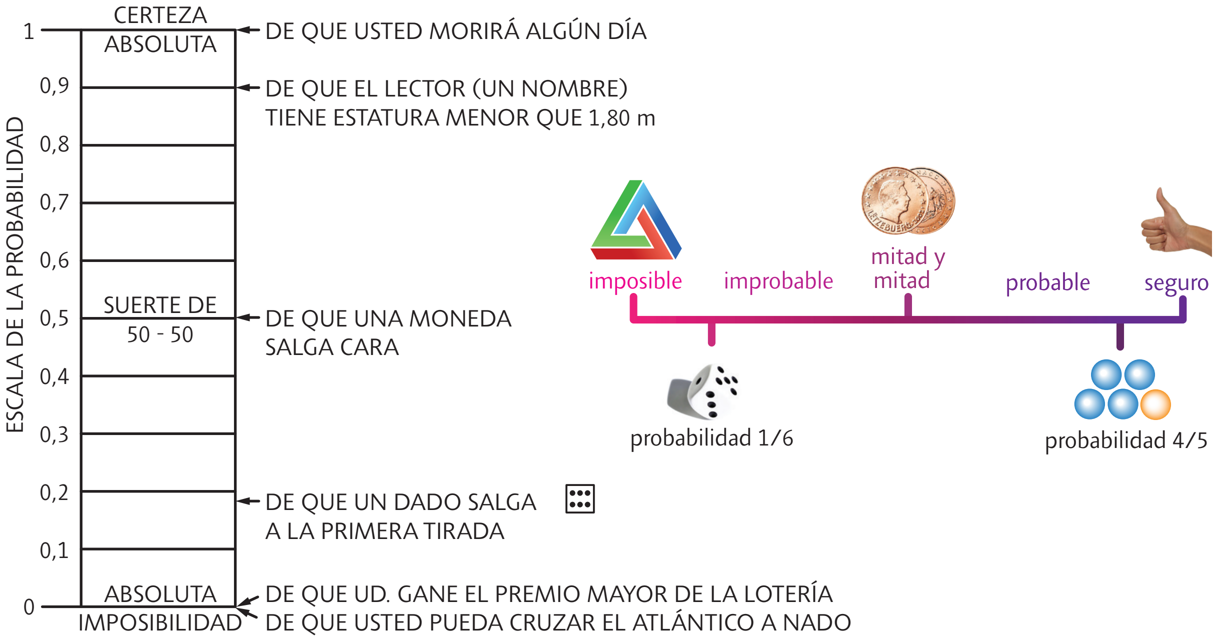
Cómo medir hechos posibles. Las leyes del azar

Existen ciertas nociones imposibles de definir adecuadamente. A tales nociones se les atribuyó como base la experiencia universal de la naturaleza. La probabilidad es una de ellas. Nos dice el diccionario que "probable" significa "verosímil". Ulteriores referencias dan la no muy útil información de que "verosímil" significa "probable". No siempre resulta fácil notar un círculo vicioso en nuestras definiciones. Podríamos haber dado un paso más en nuestro círculo introduciendo la palabra "azar"; pero, si se juzga desde los enérgicos argumentos de los filósofos, parece que nunca la extensión del vocabulario o la inventiva en la definición eliminan todas las dificultades que trae consigo esta noción, perfectamente común, de *probabilidad*.

En esta sección trataremos de lograr alguna idea de aquello que el estadístico tiene en mente cuando habla de probabilidad. Sus ideas son, en el fondo, las del sentido común, pero un poco más cuidadosamente ordenadas, de modo que pueda hacer planteamientos numéricos acerca de sus problemas, en vez de vagos comentarios generales. Siempre es ventajoso poder medir las cosas con una escala en vez de llamarlas simplemente "grandes" o "pequeñas". Y finalmente, como afirma Samuel Butler: "Escuché decir a gente de larga experiencia que los tontos usan apuestas como argumentos".

La escala de la probabilidad. Medimos la probabilidad con una escala graduada desde cero en un extremo hasta uno en el otro. (Al leer lo que sigue hará bien el lector en tener siempre a la vista la figura siguiente).

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.



El extremo superior de la escala, graduado con la unidad o uno, representa la certeza absoluta. Cualquier proposición acerca de la cual no exista absolutamente ninguna duda tendrá su lugar en este punto de la escala. Por ejemplo: la probabilidad de que yo muera algún día es igual a uno, ya que es absolutamente seguro que moriré. El matemático escribiría aquí $p = 1$, indicando con p la probabilidad.

El extremo inferior de la escala, marcado cero (0), representa la "imposibilidad absoluta". Por ejemplo: la probabilidad de que yo tenga éxito en un intento de cruzar el Atlántico a nado es cero, ya que el fracaso sería absolutamente seguro. El estadístico escribiría aquí $p = 0$.

Si todas las cuestiones de la vida fueran tan definidas como esta, los estadísticos no tendrían trabajo y la investigación científica se vería lanzada a una velocidad intolerable y perdería gran parte de su interés. La vida y la naturaleza pueden ser bastante simples para el Todopoderoso que las creó y las mantiene andando, pero ante la mente humana se presenta una corriente interminable de problemas a los cuales no puede darse una respuesta concluyente del tipo $p = 1$ o $p = 0$.

El médico sabe que la penicilina resulta excelente para una enfermedad particular, pero no puede garantizar absolutamente que uno se curará por hacer uso de ella. A lo sumo puede estar muy seguro. Podrá decir que para todos los propósitos prácticos está dispuesto a poner $p = 1$ por su restablecimiento.

Pero esto es una aproximación. Nos hemos evadido ya del reino de la certeza absoluta. De hecho, supondremos $p = 0{,}999$. Lo que el médico dice entonces es que: "Podríamos poner sin error apreciable $p = 1$".

En la figura anterior mostramos la clase de posición ocupada en la escala de la probabilidad para varios sucesos cotidianos. Se observa que no hay mayor certeza que $p = 1$ ni nada de menor probabilidad que $p = 0$.

Hasta aquí, entonces, hemos establecido nuestra escala, en la cual está representada la probabilidad de los sucesos. ¿Cómo llegamos a una medida efectiva de la probabilidad de cada uno de ellos en la vida real? Existen dos caminos principales y los consideraremos sucesivamente.

Probabilidades *a priori*. Estas son probabilidades cuyas magnitudes nos sentimos seguros de poder establecer por la consideración de la naturaleza misma del suceso. Por ejemplo: la probabilidad de que, al tirar una moneda, esta salga cara puede adivinarse fácil y sensatamente como $p=\frac{1}{2}$.

Intuitivamente, admitimos que la probabilidad de obtener cara se encuentra exactamente en el punto medio de la escala de la figura anterior. Podríamos considerar esto desde otro punto de vista del sentido común. Hay dos resultados posibles de la tirada; cara o cruz, y ambos son igualmente probables. Entonces es absolutamente cierto que la moneda mostrará cara o cruz, es decir, para cara o cruz $p = 1$. La probabilidad total $p = 1$ puede repartirse igualmente entre los dos resultados posibles, dando $p = \frac{1}{2}$ para cara, y $p = \frac{1}{2}$ para cruz.

Del mismo modo hay seis resultados igualmente posibles si tiramos un dado sin deformaciones, pues tendrá que ocurrir necesariamente alguno de esos resultados igualmente probables. La probabilidad de obtener alguno de los números es $p = 1$. Si dividimos esta probabilidad total entre las seis posibilidades, decimos que existe una probabilidad de $p = \frac{1}{6}$ para cada uno de los resultados posibles. (Desechamos en todos los casos la objeción poco seria de que la moneda caiga de canto o el dado quede en equilibrio sobre uno de sus vértices).

Probabilidad empírica. El problema de las probabilidades en los juegos de cartas y dados puede atacarse desde otro punto de vista. Supongamos que hemos fabricado un dado, lo tiramos 600 veces. Debemos tener la esperanza de que cada cara se presente, como caso óptimo, 100 veces. ¿Qué queremos significar con "esperanza"? No esperamos, en realidad, algo así. De hecho, debiera sorprendernos la perfecta "coincidencia" entre una prueba empírica y nuestra "esperanza".

Lo que esperamos en realidad es que cada cara se muestre aproximadamente 100 veces; no demasiado alejada, por cierto, o sospecharíamos una tendencia, ni demasiado exactamente como para suponer prestidigitación.

Esto nos sugiere otro camino para medir la probabilidad de un suceso: contar el número de veces que el suceso se presenta en cierto número de pruebas. Aceptemos que una serie muy larga dará una indicación más exacta de la probabilidad que una serie corta. Nuestra experiencia de las cosas nos hace pensar que, mientras que un número pequeño de pruebas es fácilmente desordenado por el "azar", una larga serie de ellas resulta protegida por las misteriosas leyes del mismo "azar". Expresaremos la probabilidad empírica de un suceso como:

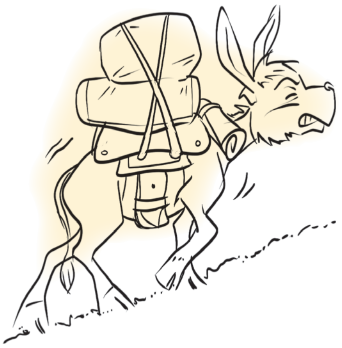
$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número total de aparición del suceso}}{\text{Número total de pruebas}}.$$

Así, por ejemplo, si un cirujano realiza cierta operación en 200 personas y mueren 16 de ellas, podría tomar como probabilidad de muerte $p=\frac{16}{200}=0{,}08.$ Este método empírico de encontrar las probabilidades como el cociente entre el número de apariciones y el número total de pruebas es el que debe ser usado en muchos campos de investigación.

Habiendo visto cómo pueden medirse las probabilidades, consideraremos ahora algunas de las leyes de la probabilidad, de modo que podamos analizar situaciones más complejas.

Ley de adición. Consideremos la frase "Cara, gano yo; cruz, pierde usted". Esta es la ilustración más simple posible de la ley de adición. Para calcular mi posibilidad total de ganar, tengo que sumar, de acuerdo con esta ley, las probabilidades de cada uno de los diversos modos en que ganaría.

En primer lugar ganaré si sale cara, y esto tiene $p=\frac{1}{2}$. En segundo, ganaré si sale cruz, y esto dará asimismo $p=\frac{1}{2}$. Al sumar las dos probabilidades vemos que la probabilidad total de mi ganancia es $p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Es decir, es absolutamente seguro que ganaré.



La probabilidad de que un suceso aparezca de un modo entre varios posibles se calcula como suma de las probabilidades de su aparición en los diferentes modos posibles.

En el caso en cuestión se supone que la aparición del suceso de un modo excluye la posibilidad de que ocurra en alguno de los otros modos posibles.

Como ejemplo sencillo, supongamos que 10 ingleses, 8 irlandeses, 2 escoceses y 5 galeses solicitan un empleo para el cual será designado uno solo de ellos. En total hay 25 aspirantes. Supongamos que la junta de calificación no se decide sobre los méritos de estos por falta de acuerdo entre sus miembros y entonces resuelve hacer un sorteo. La probabilidad de que el empleo lo obtenga un inglés será, evidentemente, $\frac{10}{25}$; para un escocés, $\frac{2}{25}$; un galés, $\frac{5}{25}$, y un irlandés, $\frac{8}{25}$. Luego, la ley de adición nos da los siguientes resultados:

Probabilidad de un celta $=\frac{2}{25}+\frac{5}{25}+\frac{8}{25}=\frac{15}{25}=0{,}6.$

Probabilidad de un nativo de Gran Bretaña $=\frac{10}{25}+\frac{2}{25}+\frac{5}{25}=\frac{17}{25}=0{,}68.$

Probabilidad de un no nativo de Gran Bretaña $=\frac{8}{25}=0{,}32.$

Otros ejemplos sencillos se encontrarán más adelante para volver sobre el tema de la suma.

Ley de multiplicación. Probaremos ahora, con no poca satisfacción para el bello sexo, que cada mujer es una mujer en un billón. Esperamos que el masculino encuentre alivio para su conciencia en esta prueba científica de la vieja lisonja. "La estadística muestra, mi querida, que eres una en un billón".

Resulta obvio que cuantos más exigentes somos en nuestras pretensiones, menos probable es satisfacerlas. Consideremos el caso de un hombre que exige la concurrencia simultánea de muchas virtudes de distinta naturaleza en su futura esposa. Supongamos que insiste en una nariz griega, cabello rubio platinado, ojos de colores distintos, uno azul y otro castaño, y, finalmente, un conocimiento de estadística de primer orden.

¿Cuál es la probabilidad de que la primera mujer que encuentre en la calle le sugiera ideas matrimoniales? Para contestar la pregunta debemos conocer las probabilidades de las diferentes exigencias. Supondremos que son las siguientes:

Probabilidad de mujer con nariz griega: 0,01

Probabilidad de mujer con cabello rubio platinado: 0,01

Probabilidad de mujer con ojos desiguales: 0,001

Probabilidad de mujer con conocimiento de estadística de primer orden: 0,00001.

Para calcular la probabilidad de que todos estos atributos deseables se encuentren en una persona, usamos la ley de multiplicación. Si multiplicamos entre sí las diversas probabilidades, obtenemos como resultado que la probabilidad de que la primera mujer que encuentre, o que cualquier otra mujer considerada al azar, llene estos requerimientos es p = 0,000 000 000 001 o, precisamente, una en un billón. La conclusión es que cada individuo es único si se lo compara cuidadosamente punto por punto con sus semejantes.

Las diferentes aplicaciones de las leyes de adición y multiplicación de probabilidades pueden ser recordadas en términos de apuestas en las carreras de caballos. Si apuesto a dos caballos en la misma carrera, la probabilidad de mi ganancia es la suma de las probabilidades de ganar de cada uno de los caballos. Si hago una "apuesta de acumulación", es decir, apuesto a un caballo en la primera carrera y ordeno que mis ganancias, si las hubiere, sean apostadas a un caballo de la segunda carrera, entonces mi probabilidad de ganar la apuesta de acumulación es el producto de las probabilidades de que cada uno de mis caballos elegidos gane su respectiva carrera.

Hemos considerado aquí el caso de la ocurrencia simultánea de sucesos. La ley de multiplicación se usa también cuando consideramos la probabilidad de la ocurrencia de dos o más hechos en sucesión, aun cuando los sucesivos casos sean dependientes. Consideremos el siguiente ejemplo: una bolsa contiene ocho bolas de billar, de las cuales cinco son rojas y tres blancas. Si una persona saca dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una bola de cada color?

El problema se resuelve como sigue: la primera bola elegida será roja o blanca, y tenemos:

$$\text{Probabilidad de que la primera bola sea roja } = \frac{5}{8}.$$

Si esto ocurre entonces habría cuatro bolas rojas y tres blancas en la bolsa para la segunda extracción.

En consecuencia,

$$\text{Probabilidad de elegir una blanca después de roja es } = \frac{3}{7}.$$

La ley de multiplicación nos dice que

$$\text{Probabilidad de elegir una blanca después de bola roja } = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}.$$

Del mismo modo, la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca es $\frac{3}{8}$.

Esto dejará dos bolas blancas en la bolsa para la segunda extracción.

Luego, la probabilidad de elegir una bola roja después de haber elegido una blanca será, por la ley de multiplicación, $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$.

Ahora, la persona acertará en la obtención de una bola de cada color en cualquiera de los dos casos. Si aplicamos la ley de adición encontramos que su probabilidad de acertar será

$$\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} = 0{,}535.$$

Las leyes de adición y multiplicación son fundamentales en estadística. Son sencillas, pero suficientes para llevarnos lejos si hacemos un buen uso de ellas. Las hallaremos en su plena eficacia en las próximas *Leñitas Geométricas*.

Lo que hasta aquí hemos discutido se conoce como la *teoría directa de las probabilidades*. Esencialmente, todos los problemas con que se tropieza en esta rama de la materia se resuelven contando el número de formas en que pueden ocurrir los acontecimientos. Por ejemplo: si nos preguntamos cuál es la probabilidad de que, al arrojar tres monedas, salgan todas cara, se pueden ordenar todos los resultados posibles en un cuadro, como sigue:

Resultado	1ª moneda	2ª moneda	3ª moneda
3 caras	H	H	H
2 caras	H	H	T
	H	T	H
	T	H	H
2 cruces	T	T	H
	T	H	T
	H	H	T
3 cruces	T	T	T

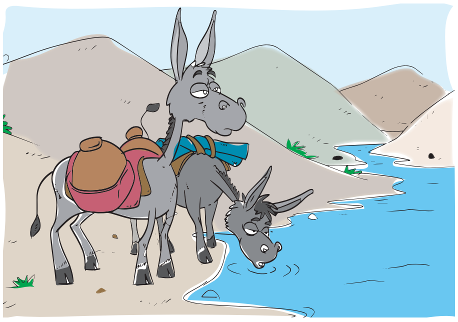
En el cuadro, H representa cara y T representa cruz. Si suponemos todos los resultados posibles como igualmente verosímiles, entonces, de los ocho resultados posibles, solo uno es favorable. De aquí que la probabilidad de que las tres monedas salgan cara es $p = \frac{1}{8}$.

De igual manera, la probabilidad de que todas salgan cruz es $p = \frac{1}{8}$. En consecuencia, por la ley de adición, la probabilidad de tres caras o tres cruces será $p = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

Matemática de los juegos (de azar y de estrategia con azar)

Una aventura a la historia de los juegos y la matemática

La fascinación por los juegos de azar, así como la especulación sobre los resultados de determinados experimentos aleatorios (lanzamiento de un dado, reparto de cartas, giro de una ruleta, etc.) han sido y son un lugar común en todas las sociedades.

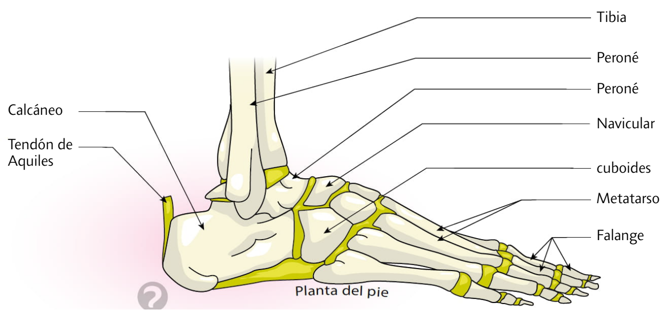


Es tentador imaginar el día a día del hombre prehistórico como una sucesión de apuestas contra la Naturaleza, con la supervivencia en juego. Ya con la Naturaleza bastante domesticada y con una vida predecible y rutinaria, el hombre actual encuentra en los juegos de azar un desahogo a tanto determinismo. Este placer que al hombre actual le proporciona el juego no hace sino rememorar las fuertes emociones pretéritas.

Lo anterior representa un escenario ciertamente plausible de los orígenes del juego (y de hecho para los orígenes del arte, de la poesía, de la política, de los deportes y de la guerra). Aunque no hay evidencias arqueológicas para sustentar la teoría de que el juego es un instinto primario en el hombre, no es menos cierto que los juegos de azar surgieron en una etapa muy temprana en la historia de la humanidad, y desde entonces esta afición no ha hecho sino crecer, a pesar de las restricciones legales y religiosas, de la condena social e, incluso, a pesar de las ventajas que se concede la banca.

En numerosas excavaciones arqueológicas asirias y sumerias se ha hallado un lejano antepasado de nuestro dado: el astrágalo (hueso que se encuentra por encima del talón) del cordero, del ciervo o de animales de parecido tamaño. Ya en tiempos de los babilonios y egipcios (alrededor del 3600 a. C.) hay evidencias de astrágalos, pulidos y con inscripciones, que eran usados junto con pequeños guijarros coloreados (utilizados para marcar y contar), así como diversos tableros para juegos de mesa. El astrágalo, cuando cae, puede hacerlo en cuatro posiciones distintas, esto hace de él un instrumento natural para los juegos de azar.

El hueso astrágalo u *os talus*, llamado también *taba* y *chita*, se encuentra en el tobillo. Es un hueso corto que forma, junto con el calcáneo, la parte proximal del tarso de los mamíferos, incluidos los seres humanos. Une la pierna con el pie mediante las articulaciones con el peroné y la tibia.



En el pie, forma una articulación con el calcáneo y el navicular, y en algunos mamíferos también con el cuboides.

Puesto que la probabilidad de cada una de las cuatro posiciones no es igual y, además, que cada astrágalo tiene sus propias características, un estudio general de su comportamiento estaría condenado al fracaso. Esto ha sido citado por algunos autores (y descartado por otros) como la causa de que en la antigüedad no surgiese, incluso en una formulación muy primitiva, una teoría sobre la probabilidad.

El astrágalo inició el camino que nos lleva al dado actual, pero no sin pasar antes por una numerosa progenie de dados poliédricos (regulares e irregulares) y otros artefactos parecidos, entre los que se cuentan diversas formas de dados cargados y trucados. En tiempos del nacimiento de Cristo, el hombre ya se encontraba bien pertrechado de artefactos generadores de azar, de tableros de juego y de la suficiente voluntad e imaginación como para crear un número prácticamente infinito de nuevos juegos.

El concepto de *cuenta* y *enumeración* estaba firmemente establecido, pero no así el de *número*, al menos tal como lo conocemos hoy en día. Toda la parafernalia organizada alrededor de los juegos de azar fue creada con el propósito de dar satisfacción y placer a los hombres. Azar, la diosa ciega, destino, fortuna, llámese como se quiera, el hecho es que es una parte aceptada de la vida (ver la tabla siguiente).

Orígenes de algunos juegos y objetos relacionados con ellos

Juego	Origen	Lugar
Astrágalo	alrededor 3600 a. C.	Oriente Medio
Dado	alrededor 2000 a. C.	Egipto y otros lugares
Naipes	siglo x	China
	siglo xiv	Europa Occidental
Ruleta francesa	sobre 1800	Francia
Póker	sobre 1800	Louisiana (EE.UU.)
Backgammon	ancestros, 3000 a. C.	Oriente Medio
	Moderno 1743	Inglaterra
	dado múltiplo 1925	
Craps (juego de dados)	principios del siglo xx	EE.UU., derivado de un juego inglés (Hazard)
Chuck-a-Luck (juego de dados	principios de siglo xx	juego de feria; derivado del Hazard
Bingo y Keno	1880-1900	En las ferias de Inglaterra
Bridge	Whist siglo xvi	Inglaterra
	Subasta 1900	Inglaterra
	de contrato 1915-1929	EE.UU.
Loterías	siglo i	Imperio Romano
	Edad Media	Italia
Seguros de vida	1583	Inglaterra
Apuestas de caballos	siglo xvi	Inglaterra
Ajedrez	¿A.C.?	¿?
	siglo vii	India
Damas	siglo xii	Francia
Go	Sobre el 1000 d.C.	China
Teoría de Juegos	1928	Von Neumann, Alemania
	1944	Von Neumann y Morgenstern, EE.UU.

Los naipes aparecieron en Europa sobre el siglo x de nuestra era, y su evolución no deja de ser pintoresca. Especialmente interesante es el origen de los cuatro palos y la magnífica sucesión de personajes históricos que han prestado su imagen a sotas, reinas y reyes. Habiendo hablado ya de los orígenes de los dados y de los naipes –dos artículos de primera necesidad en el juego actual–, resumimos en la tabla de arriba algunos datos sobre otros conocidos objetos utilizados en los juegos de azar, junto con alguno de estos juegos.

Puesto que no estamos interesados solamente en los diversos aspectos de los juegos de azar y de las apuestas, sino además en el estudio matemático de situaciones prácticas y teóricas derivadas del juego, también incluimos en esta sección información sobre juegos de habilidad pura (donde el azar no influye para nada) y sobre la teoría de juegos.

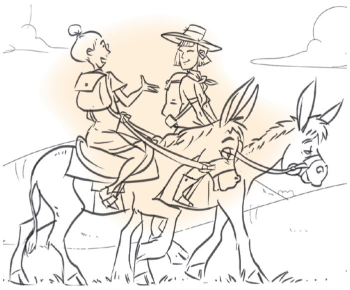
Con el perfeccionamiento de los artefactos generadores de azar y con el nacimiento de la teoría de probabilidades para analizarlos, el juego adquirió un nuevo estatus en el siglo xvii. De hecho, muchos de los más brillantes científicos y filósofos de la época se ocuparon de las cuestiones, tanto prácticas como teóricas, planteadas por el juego. Girolamo Cardano escribió *El libro de los juegos de azar* alrededor de 1520, aunque no fue publicado hasta 1663. Blaise Pascal y Pierre Fermat mantuvieron en 1654 su famosa correspondencia sobre temas relacionados con el juego y la probabilidad. En 1658 Pascal propuso su famosa apuesta que puede verse como una aproximación, en el contexto de la teoría de juegos, a la creencia en Dios. El concepto de esperanza fue introducido por Christiaan Huygens en 1657 en el primer texto sobre probabilidad, *Calculating in Games of Chance*. Durante todo este tiempo Gottfried Wilhelm Leibniz hizo notables contribuciones filosóficas a la fundación de la teoría de la probabilidad. El notable desarrollo de esta teoría en la segunda mitad del siglo xvii alcanzó su clímax con Jakob Bernoulli y la publicación de su libro *Ars Conjectandi* (escrito al principio de la última década del siglo xvii y publicado en 1713), brillante precursor de la moderna teoría de juegos y de las complejidades filosóficas que esta encierra. Se podría suponer que toda esta atención del mundo académico sobre el juego lo despojaría de su aura de misterio e irracionalidad, pero la naturaleza de la bestia no debe ser subestimada. Fortunas enteras siguieron pasando de unas manos a otras y las apuestas siguieron depositándose alrededor de juegos de todo tipo, justos o injustos, mientras la burocracia siguió con su particular celo a la hora de reprimir las apuestas del demonio.

La situación hoy se ha desarrollado de una forma bastante predecible. La gente juega una cada vez más amplia variedad de juegos, la mayor parte de cuyas estrategias óptimas han sido analizadas, bien con lápiz y papel, bien con la ayuda de computadoras para conseguir un grado de precisión mayor. El juego sigue controlado o, con diversos matices, ilegalizado en la mayoría de los países, y continúa siendo muy mal visto por casi todas las religiones. No obstante, fastuosas y lucrativas mecas del juego se han levantado en Nevada, Montecarlo, Atlantic City y, en forma creciente, en muchos otros lugares alrededor del mundo. Los Estados, que por una parte coartan el juego privado a sus ciudadanos, por otra patrocinan una mareante variedad de loterías y obtienen pingües beneficios de las ganancias de las carreras de caballos. En todas las fases de estos juegos organizados, las posibilidades están manifiestamente contra el jugador. Sin embargo, las masas siguen jugando sin preocuparse, compulsivamente, con pericia o torpemente, es igual. A nivel local florecen los clubes de *backgammon* y bridge donde, en vez de dinero, se ponen en juego grados de maestría o simplemente el orgullo. Grupos parroquiales organizan sesiones matutinas de bingo y Las Vegas nocturnas (más que nada por decoro), que tienen un considerable éxito. El número de partidas privadas de póker, de dados y el de corredores de apuestas ilegales no ha cesado de crecer. Las siempre elusivas cifras del fraude organizado en Estados Unidos nos hablan de una facturación de unos diez mil millones de dólares al año.

En resumen, el fenómeno del juego es ubicuo, no reconoce fronteras geográficas, sociales o intelectuales. Su misterio y encanto son una mezcla de superstición, excitación, esperanza, escapismo, codicia, presunción y fascinación matemática. El juego es una parte fundamental en algunas vidas y un elemento secundario pero importante en muchas otras. Es en algunos casos una actividad destructiva y potencialmente adictiva, mientras que para otros es una fuente de diversión y placer. El juego, que en su forma más inocente es una actividad infantil, puede llegar a alcanzar los extremos de la más alta racionalidad e irracionalidad y es, cada vez más, un gran y floreciente negocio.

El juego y las apuestas, con todas sus fascinantes, diversas y a veces paradójicas cualidades, están aquí para quedarse.

Cuentos con cuentas. Los juegos: realidad y ficción



Los jugadores pueden ser divididos en tres clases distintas, aunque no necesariamente disjuntas. El jugador ocasional suele jugar con apuestas pequeñas, de esta forma las pérdidas, de producirse, nunca son muy grandes. Aunque espera ganar, sabe que no siempre será así y en cualquier caso tiene claro el sentido lúdico del acto de jugar; y a pesar de que las pérdidas puedan traer remordimientos y sentimientos de culpa, estos pasan rápido y en ningún caso llegan a obsesionarlo. El jugador ocasional en general no es consciente de todas las sutilezas estratégicas y probabilísticas que se esconden tras un determinado juego, e incluso puede llegar a desconocer alguna de sus reglas; sin embargo, sabe perfectamente cuánto tiempo y dinero se puede permitir perder y es capaz de retirarse antes de traspasar los límites.

El jugador compulsivo solo encuentra la felicidad cuando juega. El vértigo producido por el fuerte contraste entre la alegría exultante de ganar y la desesperación de la derrota es alimentado por la creencia de que va a ser bendecido por una racha de buena suerte o por el descubrimiento de un nuevo método para apostar que "sin duda" funcionará. En consecuencia, las apuestas son cada vez mayores y el retirarse a tiempo –se vaya ganando o perdiendo– supone un acto de suprema voluntad o una obligada necesidad financiera.

Son proverbiales en estos jugadores tanto la habilidad para racionalizar y violar sus propias promesas como la creatividad mostrada para crear excusas que justifiquen la siguiente apuesta. Es evidente el paralelo que esta situación guarda con el alcoholismo, por lo que no es de extrañar que en 1947 se fundara en California la Asociación Internacional de Jugadores Anónimos.

¿Qué poderosas fuerzas conducen al jugador compulsivo a seguir esta conducta autodestructiva? Una respuesta a esta pregunta, si es que existe alguna, nos llevaría muy lejos de los límites de nuestro propósito. Indiquemos, sin embargo, que las investigaciones llevadas a cabo en Psicología durante las dos décadas pasadas nos proporcionan algunas respuestas.

El jugador profesional se puede comportar a veces como un jugador ocasional y a veces como un jugador compulsivo; en cualquier caso, se caracteriza por jugar bien y por llevar una buena vida (si no fuese así cambiaría de profesión). No estamos hablando aquí de los dueños de una casa de apuestas o de un casino, tampoco de los miembros numerarios de la mafia y gente por el estilo, para todos estos, como para los banqueros, el trabajo no es un juego sino algo bastante más "seguro".

El jugador profesional puede tener muy poca base matemática, pero tiene una rara habilidad para desentrañar los secretos de los juegos y de las personas. Su actividad profesional consiste en participar en partidas privadas de póker o bridge, en proporcionar información sobre carreras de caballos y en realizar apuestas en juegos y acontecimientos sobre los que tiene cierto control. En ciertas ocasiones se puede permitir apostar en el Keno, en la ruleta, jugar a los dados o en las máquinas tragamonedas, pero esto solo lo hace por placer y para alimentar la faceta no profesional de su instinto de jugador. De hecho, es consciente de que nadie que apueste en juegos de casino obtiene beneficios en forma regular (una posible excepción a lo anterior, tal como veremos en su momento).

Las anteriores descripciones pecan sin duda de ser demasiado estereotipadas. En realidad, el jugador ocasional puede tener el instinto del jugador profesional y la pasión del jugador compulsivo. De todas maneras, lo característico del jugador ocasional es que juega en forma esporádica, siempre bajo control y sin arriesgar una parte importante de sus ahorros.

El jugador compulsivo puede llevar una vida aparentemente normal y tener un empleo estable. La compulsión puede manifestarse a intervalos irregulares de tiempo; pero cuando lo hace, el jugador puede perder el control y gran parte de su dinero.

En lo que sigue añadiremos "carne" a nuestros estereotipos describiendo dos personajes provenientes de la historia y de la literatura.

Uno de los personajes históricos más relevantes, aunque aún no muy reconocidos, es el de Girolamo Cardano. Nacido en Italia en 1501, su vida –incluso basándonos en las crónicas más conservadoras– fue impresionante por su plenitud, sus vicisitudes y polémicas, pero por encima de todo, por su profundidad intelectual y talento.

De ser un brillante estudiante de Medicina, Cardano pasó a convertirse en el más estimado y solicitado médico de Europa. Fue uno de los más brillantes científicos de su tiempo y publicó muchos de sus trabajos.

Su libro sobre juegos está considerado como el primer paso importante en la teoría de la probabilidad. Además, Cardano fue un personaje central de la famosa controversia que se originó en torno a la resolución de determinada clase de ecuaciones algebraicas.

Su *Autobiografía*, sin duda exagerada pero brutalmente franca y analítica, fue la primera en su género y actualmente todavía es leída y estudiada por los estudiantes de literatura. En general Cardano nos dejó 131 trabajos publicados, a los que hay que añadir 111 libros manuscritos (Cardano declaró haber quemado otros 160).

En contraste con su deslumbrante producción científica, Cardano vivió con su familia en una casa muy humilde de Milán, creándose feroces enemigos (y muy leales amigos) a lo largo de su vida, ocupado en constantes discusiones sobre medicina, ciencia y matemática, viendo a su hijo mayor morir ejecutado por asesinato y al más joven preso y desterrado por robo. Era aficionado a la astrología y a la confección de horóscopos de la realeza y también de Jesucristo. Parcialmente, como consecuencia de esta afición, fue condenado por herejía y encarcelado a la edad de 69 años. Durante toda su vida Cardano jugó y apostó incesantemente. Una crónica más detallada de su tormentosa vida puede encontrase en el libro de O. Ore, *Cardano: The Gambling Scholar* (Editorial Dover), que también incluye una traducción al inglés del libro de Cardano, *El libro de los juegos de azar*.

Cardano parece que jugó y escribió sobre casi todos los juegos de su tiempo. Fue un excelente ajedrecista. En el ajedrez por aquel entonces se cruzaban apuestas y era frecuente ofrecer ventajas al oponente para nivelar las posibilidades. Cardano también jugó al *backgammon* y a otros juegos con dados, junto con diversos juegos de naipes, entre los que se encontraba el primero, un antecesor del póker.

Sus observaciones morales sobre el juego son a la vez perspicaces y graciosas, principalmente *El libro de los juegos de azar*, por la incapacidad de Cardano de seguir sus propios consejos. Así, en una sección titulada "Quién debería jugar y cuándo", se puede leer: "Si alguien es reconocido por su sabiduría o si ha sido honrado con magistratura, honor civil o sacerdocio, no obtendrá ningún bien con el juego". En una sección posterior: "Su oponente deberá poseer una adecuada posición social; se deberá jugar esporádicamente y durante poco tiempo, en lugares apropiados, con apuestas pequeñas y solo en ocasiones señaladas o banquetes".

Desde luego no había nada "apropiado" en la forma de jugar de Cardano. Jugaba constantemente, con apuestas grandes y sin importarle la condición de sus compañeros. Leamos sino un fragmento de su autobiografía: "Desde mi juventud me he entregado sin medida a los juegos de mesa; gracias a ellos conocí a Francesco Sforza, Duque de Milán, y a muchos más entre la nobleza. Pero a lo largo de todos estos años de dedicación al juego, cerca de cuarenta, no es fácil decir cuántas de mis posesiones habré perdido sin compensación. Los dados me han tratado aún peor; instruí a mis hijos en su uso y estos abrieron la puerta de mi casa a los jugadores. Para todo esto no tengo sino débiles excusas: mi pobre cuna y el hecho de no ser torpe en el juego".

Y afirma en un capítulo sobre el juego y los dados: "Quizás no pueda ser juzgado digno de alabanza, pero cualquiera que sea el elogio, nada es comparado con la culpa que me he ganado por mi desmedida devoción por los juegos y los dados. Durante muchos años (más de cuarenta con el ajedrez y veinticinco jugando y apostando) no es que haya jugado de vez en cuando sino, y me avergüenza decirlo, que lo he hecho diariamente. De este modo he perdido mi estima, mis posesiones y mi tiempo. No tengo defensa posible, excepto si alguien desea interceder por mí. Se debería decir que más que gustarme el juego aborrezco las circunstancias que me han abocado a él: mentiras, injusticia y pobreza, la insolencia de algunos, mi vida confusa, la resignación, mi constitución enfermiza y una inmerecida pereza, esto último provocado por los demás. Una prueba de esto que digo la tendrán en el hecho de que, tan pronto como me fue permitido llevar una vida digna, dejé el juego. No sentía ninguna pasión por el juego, ni por el lujo, solo desprecio por la situación que me condujo a buscar su refugio".

En este patético pasaje, la pasión vehemente que a veces el juego despierta es mostrada de tal forma que no podemos sino constatar lo poco que han cambiado las cosas en los últimos cuatrocientos años.

Cardano es un personaje que presenta muchas facetas, pero es la de jugador la que se manifiesta por encima de todas, y uno, sin dejar de sentir una enorme gratitud por todo lo que hizo, se pregunta cómo encontró tiempo y fuerzas para todo ello. Sea lo que fuese lo que el juego le indujo a hacer, Cardano nos ha legado el retrato de un hombre brillante y vehemente, además de un impagable primer tratado sobre la matemática de los juegos y las apuestas.

Una descripción más detallada y documentada se puede observar en la vida y los escritos de Fiódor Dostoievski (1821-1881). No hay duda de que la vida del gran autor ruso rivaliza con la de Cardano en turbulencia y cambios de fortuna, pero nos centraremos en los episodios sobre el juego de la ruleta vivido y escrito por Dostoievski. Se sintió muy atraído por la ruleta en agosto de 1863 en Wiesbaden, donde escribió: "Al principio gané 10.000 francos, los llevé a casa y los guardé en una cartera. Me propuse abandonar Wiesbaden al día siguiente sin volver a las mesas de juego; pero no lo pude resistir y perdí la mitad de mis ganancias".

En una carta a su cuñada pidiéndole que su mujer le enviara algo del dinero que había ganado, escribe sobre su experiencia con la ruleta: "Por favor, no pienses que me siento satisfecho por jactarme cuando digo que conozco el secreto de cómo ganar y no perder. Realmente, conozco el secreto, es absurdo y terriblemente sencillo, consiste en no perder la cabeza en ningún momento, cualquiera que sea la situación del juego, y no ponerse nervioso. Eso es todo, y hace que perder sea simplemente imposible y se gane con seguridad. Pero esta no es la cuestión; la cuestión es si, conociendo el secreto, un hombre puede usarlo y si está preparado para ello. Un hombre puede ser tan sabio como Salomón y tener un carácter de hierro y dejarse llevar... Por lo tanto, benditos los que no juegan y ven la ruleta con desprecio, y como si fuese la mayor de las estupideces".

Para Dostoievski, la falta de respeto por la esperanza constante en cualquier tipo de apuesta, junto con la creencia en mantener la cabeza serena y no perder el control, son las claves para ganar. Ya podemos observar los rasgos de un hombre con un método, obsesionado por el deseo de jugar. Una semana después de enviar la carta citada anteriormente, Dostoievski escribió a su madre desde Baden-Baden para pedirle la devolución de algunas de sus ganancias anteriores: "Querida Misha, en Wiesbaden inventé un método, lo usé en el juego, e inmediatamente gané 10.000 francos. La mañana siguiente me puse nervioso, abandoné el método y perdí rápidamente. Por la noche volví al método, siguiéndolo estrictamente, sin dificultad, recuperé 3.000 francos rápidamente. Dime, ¿cómo puedo no ser tentado?, ¿cómo dejar de creer que la suerte estará de mi lado solo con seguir mi método? Necesito el dinero, para mí, para usted, para mi mujer y para escribir mi novela. Aquí diez mil se ganan fácilmente. Sí, fui con la idea de ayudaros a todos y salvarme del desastre. Creí en mi método otra vez. Además, cuando llegué a Baden-Baden fui al casino y gané 600 francos en un cuarto de hora. Esto me incitó a seguir. De pronto empecé a perder, no pude mantener fría mi cabeza y lo perdí todo... Tomé el último dinero que me quedaba y volví a jugar; con cuatro napoleones gané treinta y cinco en un cuarto de hora. Esta racha de suerte me tentó; aposté los treinta y cinco y los perdí. Tras pagar a la casera nos quedamos con seis napoleones de oro para el viaje. En Génova empeñé mi reloj [...]".

Y así siguió, de ruleta en ruleta a través de toda Europa, siempre con dinero y siempre necesitado de más fondos (peticiones de más dinero, empeño de relojes y cuentas de hotel impagadas), hasta 1871 cuando Dostoievski, por alguna razón desconocida, abandona la ruleta. No es sorprendente que el estado mental y los acontecimientos que caracterizaron estas primeras experiencias aparecieran en la bella novela corta de Dostoievski, *El jugador*: claro perfil de un jugador compulsivo. Merece la pena apuntar que el escritor de esta novela fue un jugador que se apostó los derechos de todos sus escritos pasados y futuros. Efectivamente, como resultado de una serie de problemas familiares y financieros, y después de varios aplazamientos, se encontró el 4 de octubre de 1865 con la fecha improrrogable del 1 de noviembre para presentar a su acreedor un trabajo de al menos 160 páginas. Con la apuesta citada anteriormente como pena en caso de fracasar, Dostoievski, dictando a una taquígrafa contratada *ex profeso* (más tarde se convertiría en su segunda esposa), terminó *El jugador* el 31 de octubre.

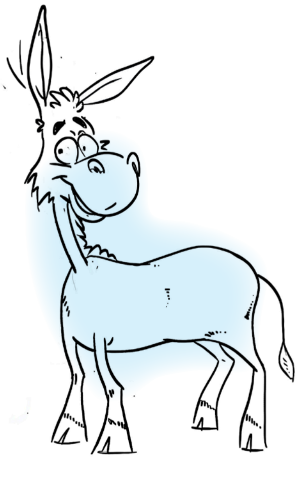
Aunque a menudo es tentador considerar caracterizaciones ficticias como autobiográficas, parece existir una amplia justificación en el caso del narrador de *El jugador* y su personaje principal, Alexis. Alexis viaja al extranjero contratado como tutor para la familia de “el General”. Convive con la familia de “el General” mientras pasan sus vacaciones en Roulettenburg, fingiendo tener un alto y exquisito nivel de vida, con la mente puesta en el muy codiciado capital del testamento de la rica y enferma “Grandmama”, y en los rumores sobre su muerte. Habiéndose encariñado con la hija del General, Polina, de manera apasionada y servil, ella le pide que juegue a la ruleta.

Como Dostoievski, Alexis se inicia en el juego de la ruleta y pronto tiene un refuerzo positivo, abandonando la mesa de juego como un ganador aturdido, aunque excitado. Ya podemos ver en él varios síntomas de juego compulsivo: la certeza fatalista de que el juego moldeará su destino, la pérdida de control, las sensaciones de caer en picado y volar altísimo. Pero Alexis no es realmente consciente de la profundidad de su compulsión hasta la llegada de Grandmama, que, a pesar de su enfermedad, ha venido a Roulettenburg como respuesta a los telegramas de “el General”. En ella podemos ver el retrato de una más que pintoresca víctima estimulada y seducida por la idea de jugar. (Nos recuerda historias en Las Vegas, de ancianos de 75 años o mujeres embarazadas de 8 meses y medio jugando en las máquinas tragamonedas o en la ruleta 18 horas en un día).

Grandmama observa la ruleta y se encapricha de la apuesta 35 a 1 al cero. Tras unas sesiones frenéticas de apuestas crecientes, el cero salió ganador, convirtiendo a la Grandmama en una triunfante ganadora. Alexis estaba inmerso en otros sentimientos: “Yo también era jugador. Lo sentí en ese mismo instante. Me temblaban los brazos y las piernas, me martilleaba la cabeza. Se trataba, ni qué decir tiene, de un caso frecuente: en unas 10 jugadas el cero salió al menos tres veces; pero no había nada particularmente sorprendente en ello. Dos días antes, vi salir el cero tres veces; en esa ocasión uno de los jugadores, que anotaba con entusiasmo los resultados en un trozo de papel, subrayó en voz alta que previo al día anterior nunca había salido una sola vez en veinticuatro horas”.

Como puede haber intuido el lector, las grandes ganancias de su primera incursión (¿habría escapado si no hubiese salido el cero?) arrastraron a la Grandmama a jugarse su fortuna en los dos días siguientes. Alexis, tras su primer día de pérdidas, se niega a ser parte de la ruina de la Grandmama y por su cuenta se impone abordar las mesas de juego en un intento por recobrar el honor y la tranquilidad de Polina. Solo una hora antes de que las mesas cerrasen se lanza sobre ellas, poseído por la necesidad de ganancias rápidas y substanciosas.

Sí, algunas veces el pensamiento más salvaje, la idea más imposible, aparentemente, adquiere tal firmeza en la mente que a la larga es tomada por algo plausible... Más que eso: si la idea coincide con un deseo fuerte y vehemente, puede aceptarse como algo predestinado, inevitable, fatal, ¡algo que no puede no existir o suceder! Quizás existe una razón para ello, alguna combinación de presentimientos, extraordinaria fuerza de voluntad, intoxicación de la imaginación o cualquier otra cosa. “No lo sé: pero en esa noche (que no olvidaré mientras viva) algo milagroso me ocurrió. Aunque es posible matemáticamente, aun así, recuerdo como algo milagroso lo que me sucedió ese día. ¿Y por qué?, ¿por qué esa seguridad arraigó tan fuerte y profundamente en mí, y por tanto tiempo? Solía, ciertamente, pensar en ello, repito, no como un suceso más que puede suceder o no, ¡sino como algo imposible de que no sucediese!”.



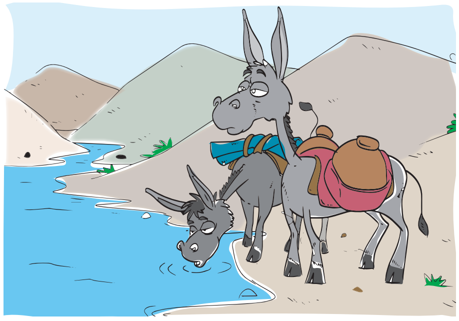
Alexis sabe, al menos describiéndolo retrospectivamente, que había sido especialmente elegido por el destino para esta experiencia que se le presentaba. En una espiral de apuestas gana una fortuna de 250.000 francos. El dinero ya no tiene sentido para Alexis, pero la experiencia de ganar nunca le abandonará. El lector es consciente de que es el acto de jugar, la crucial siguiente vuelta de la ruleta, la que guía la vida de Alexis. La historia termina con Alexis, que había pasado algún tiempo en prisión por deudas, de sirviente, en un conmovedor soliloquio en el que sopesa la decisión de entregarse a Polina (que ahora es rica y le ama) en Suiza o tomar sus escasos ahorros y jugar de nuevo.

El jugador es mucho más que una narración sobre el juego y los jugadores, aunque solo nos hemos centrado en este aspecto brillante y revelador del libro. Esperamos que haya proporcionado un mayor sentido de las dimensiones psicológicas y emocionales del fenómeno del juego. Con estos aspectos “románticos” en mente, examinaremos después alguno de los aspectos más prácticos y racionales del juego.

FUNCIONES IMPORTANTES

Una aventura a la trigonometría y la técnica de medición de los griegos

La trigonometría primitiva



La trigonometría, al igual que cualquier otra rama de la matemática, no fue el resultado de la labor de un solo hombre ni de una única nación. Ya los antiguos egipcios y babilonios conocían y habían utilizado propiedades o teoremas relativos a las razones entre los lados de triángulos semejantes, sin formularlos de una manera explícita, naturalmente. Dado que no nos encontramos con ningún indicio del concepto de medida de ángulos en el mundo prehelénico, tales estudios y consideraciones podrían quizá llamarse "trilaterometría", o medida de los polígonos de tres lados (o triláteros), mejor que "trigonometría", o medida de las distintas partes de un triángulo.

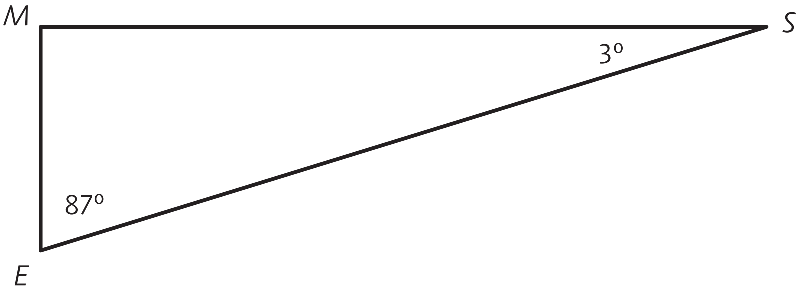
Con los griegos nos encontramos por primera vez con un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Las propiedades de las cuerdas, tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos de la época de Hipócrates, y es posible que Eudoxo haya usado razones y este tipo de medidas de ángulos para determinar el tamaño de la Tierra y las distancias relativas del Sol y de la Luna.

En las obras de Euclides no aparece la trigonometría, en el sentido estricto del término, pero sí hay teoremas equivalentes a leyes o fórmulas trigonométricas concretas. Las proposiciones II.12 y II.13 de los *Elementos*, por ejemplo, expresan el teorema del coseno para ángulos obtusos y agudos respectivamente, en un lenguaje geométrico más bien que trigonométrico, y se demuestran por un método análogo al utilizado por Euclides en conexión con el teorema de Pitágoras. Por otro lado, los teoremas relativos a longitudes de cuerdas son esencialmente aplicaciones del moderno teorema de los senos.

Ya hemos visto también que el teorema de Arquímedes sobre la cuerda rota puede traducirse fácilmente al lenguaje trigonométrico, dando lugar a lo análogo de las fórmulas para los senos de sumas y diferencias de ángulos. Y los astrónomos de la Época Alejandrina, por su parte, especialmente Eratóstenes de Cirene (ca. 276-ca. 194 a. C.) y Aristarco de Samas (ca. 310-ca. 230 a. C.), se veían manejando problemas que apuntaban de una manera cada vez más urgente a la necesidad de establecer sistemáticamente las relaciones entre los ángulos y las cuerdas.

Aristarco de Samos, según nos cuentan Arquímedes y Plutarco, propuso un sistema heliocéntrico para los cuerpos celestes, anticipándose así a Copérnico en más de un milenio y medio, pero todo lo que pudiera haber escrito sobre este sistema se ha perdido. En cambio, sí nos ha llegado un tratado de Aristarco, escrito probablemente antes de elaborar su teoría heliocéntrica (en torno al 260 a. C.), titulado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna*, en el que se supone un universo geocéntrico. En esta obra Aristarco hace la observación de que cuando la Luna está exactamente medio llena, el ángulo entre la visual dirigida al centro del Sol y la visual dirigida al centro de la Luna es menor que un ángulo recto en un treintavo de cuadrante. (La introducción sistemática de los 360° como medida de un círculo completo vino un poco más tarde).

En el lenguaje trigonométrico actual esto viene a significar que la razón entre la distancia de la Luna a la Tierra y la distancia del Sol a la Tierra, es decir, la razón de $\overline{ME}$ a $\overline{SE}$, es igual a sen 3º.



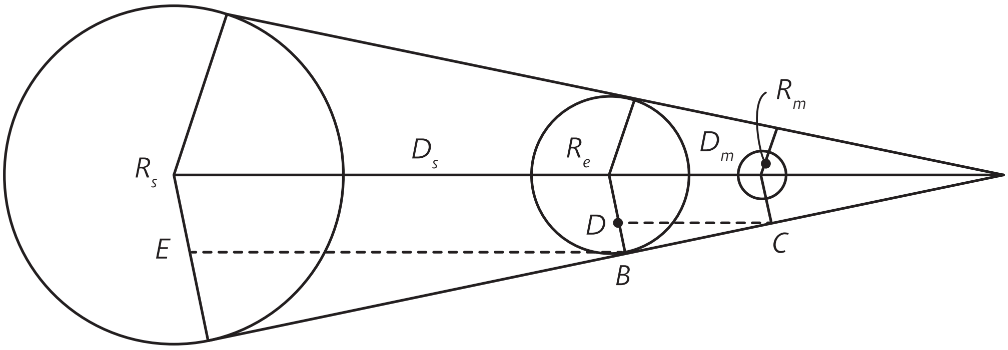
Como aún no se habían desarrollado las tablas trigonométricas. Aristarco tuvo que recurrir a un teorema geométrico bien conocido en su época y que hoy expresaríamos por medio de la cadena de desiguales trigonométricas

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ para } 0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$$

De estas condiciones obtuvo Aristarco la conclusión de que $\frac{1}{20} < \operatorname{sen} 3^\circ < \frac{1}{18}$, y afirmó en consecuencia que el Sol está más de 18 veces, pero menos de 20 veces, más alejado de la Tierra que la Luna.

Este valor está muy lejos de aproximarse al verdadero, que es algo menor de 400 veces, pero es un poco mejor que los valores 9 y 12 que Arquímedes atribuye a Eudoxo y a Fidias, padre de Arquímedes. Además, hay que decir que el método utilizado por Aristarco es teóricamente impecable, estando viciado el resultado solamente por los errores de observación al medir el ángulo MES, puesto que el valor dado de 87° debía ser en realidad de unos 89° 50’.

Una vez determinadas las distancias relativas del Sol y de la Luna, dedujo que sus tamaños tendrían que estar en la misma razón. Esto se sigue fácilmente del hecho de que el Sol y la Luna tienen muy aproximadamente el mismo tamaño aparente, es decir, se ven bajo el mismo ángulo aproximadamente para un observador desde la Tierra. En el tratado en cuestión se da este ángulo como de 2º, pero Arquímedes atribuye por su parte a Aristarco el valor mucho mejor de $\frac{1}{2}$°. A partir de esta razón puede ya Aristarco determinar una aproximación para los tamaños del Sol y de la Luna comparados con el de la Tierra. Aristarco sabía, por observación de los eclipses lunares, que la anchura del cono de sombra proyectado por la Tierra, a la distancia en que lo atraviesa la Luna, es de unas dos veces la anchura de la Luna.



Entonces, si R_s, R_e y R_m son los radios del Sol, la Tierra y la Luna respectivamente, y si D_s y D_m son las distancias del Sol y la Luna a la Tierra, entonces, por la semejanza de los triángulos *BCD* y *ABE* (véase la figura de arriba) tenemos la proposición

$$\frac{R_e - 2R_m}{R_s - R_e} = \frac{D_m}{D_s}$$

y si sustituimos en esta ecuación D_s y R_s por los valores aproximados 19 D_m y 19 R_m, obtenemos

$$\frac{R_e - 2R_m}{19R_m - R_e} = \frac{1}{19}$$

o bien $R_m = \frac{20}{57}R_e$. Aquí hemos simplificado considerablemente los cálculos desarrollados efectivamente por Aristarco; en realidad sus razonamientos son mucho más precisos y cuidadosos, lo cual permite llegar a la conclusión de que

$$\frac{108}{43} < \frac{R_e}{R_m} < \frac{60}{19} \ y \ \frac{19}{3} < \frac{R_s}{R_e} < \frac{43}{6}.$$

Hiparco de Nicea. Durante unos dos siglos y medio, de Hipócrates a Eratóstenes, los matemáticos griegos se habían dedicado a estudiar relaciones entre rectas y circunferencias, y habían aplicado estas relaciones a una gran variedad de problemas astronómicos, pero de todo ello no había resultado nada que pudiera llamarse una trigonometría más o menos sistemática. Entonces, probablemente durante la segunda mitad del siglo II a. C., todo parece indicar que fue compuesta la primera tabla trigonométrica por obra del astrónomo Hiparco de Nicea (190 a. C.-120 a. C.), que se ganó así a pulso el derecho a ser reconocido como "el padre de la trigonometría". Aristarco ya había observado que en una circunferencia dada la razón del arco a su cuerda disminuye según el ángulo decrece de 180° a 0°, tendiendo hacia el límite 1.

Parece, sin embargo, que hasta que Hiparco emprendió la tarea, nadie se había preocupado por tabular los valores correspondientes de arcos y cuerdas para una serie completa de ángulos. No obstante, se ha llegado a afirmar que Apolonio se habría anticipado a Hiparco a este respecto, y que la única contribución de este último a la trigonometría consistiría simplemente en el cálculo de un conjunto de cuerdas mejor que el que habían utilizado sus predecesores.

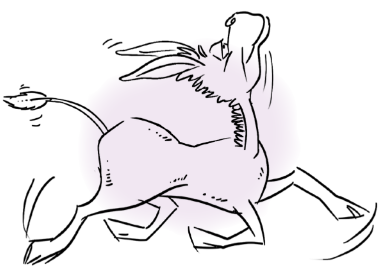
Evidentemente Hiparco construyó sus tablas para usarlas en sus teorías astronómicas, sobre cuyos orígenes bien poco se sabe. La figura de Hiparco es una figura de transición entre la astronomía babilónica y la obra de Ptolomeo. La astronomía pasaba por un periodo de desarrollo floreciente en la Mesopotamia en la época en que Berossos, casi el único astrónomo babilónico conocido por su nombre propio, se trasladó a la isla de Cos hacia el 270 a. C., y es muy probable que por esta época se transmitieran a Grecia los conocimientos astronómicos del Medio Oriente.

Las contribuciones principales que se atribuyen a Hiparco en el campo de la astronomía fueron la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos por los babilonios, la de redactar un catálogo de estrellas, la de mejorar el cálculo de algunas constantes astronómicas importantes, tales como la duración del mes y del año, el tamaño de la Luna y el ángulo de oblicuidad de la eclíptica, y, por último, el descubrimiento del fenómeno de la precesión de los equinoccios. A menudo se ha supuesto que Hiparco fue en gran medida el responsable de la construcción de sistemas planetarios geométricos, pero esto no es seguro, ya que no está nada claro hasta qué punto Apolonio pudo haber aplicado métodos trigonométricos a la astronomía un poco antes que Hiparco.

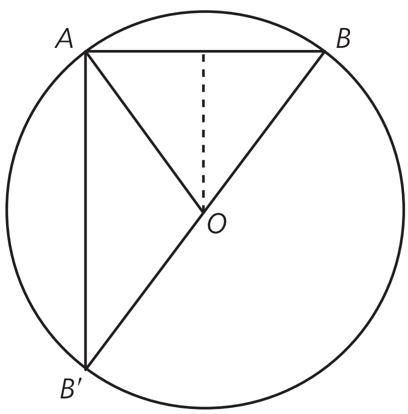
No sabemos con exactitud cuándo comenzó a usarse de un modo sistemático en la matemática la división del círculo completo en 360°, pero todo parece indicar que se debe principalmente a Hiparco, en conexión con el cálculo de su tabla de cuerdas. Es posible también que la tomase directamente de Hypsicles, que ya antes había dividido el día en 360 partes, subdivisión que pudo haber venido sugerida a su vez por la astronomía babilónica.

Tampoco sabemos exactamente cómo construyó Hiparco su famosa tabla, ya que sus obras se han perdido (exceptuando un comentario sobre un poema astronómico popular por Arato). Es probable que sus métodos fueran análogos a los de Ptolomeo, que vamos a estudiar más adelante, puesto que Teón de Alejandría, al comenzar la tabla de cuerdas de Ptolomeo, nos informa de paso de que Hiparco ya había escrito antes un tratado en doce libros sobre las cuerdas en un círculo.

Menelao de Alejandría. Teón menciona también otro tratado en seis libros, debido a Menelao de Alejandría (100 a. C.), que trataba de cuerdas en un círculo. Los comentaristas griegos tardíos y árabes mencionan otras obras matemáticas y astronómicas de Menelao, entre las que se encuentran unos *Elementos de geometría*, pero la única que ha sobrevivido, y eso solo en su versión árabe, es su *Esférica*. En el *Libro I* de este tratado establece Menelao las bases para un estudio de los triángulos esféricos análogo al que hace Euclides en su *Libro I* para los triángulos planos. Se incluye aquí un teorema que no tiene análogo en Euclides, el que dice que dos triángulos esféricos son congruentes si tienen sus ángulos iguales dos a dos (Menelao no distingue entre triángulos esféricos congruentes y simétricos), y se demuestra también que para todo triángulo esférico ABC se tiene $A + B + C > 180º$.



El segundo libro de la *Esférica* trata de los empleos de la geometría esférica en los fenómenos astronómicos y tiene poco interés matemático. El *Libro III* y último contiene el famoso *teorema de Menelao*, formando parte de lo que esencialmente es trigonometría esférica en la forma típica griega, es decir, como una geometría o trigonometría de las cuerdas en un círculo.

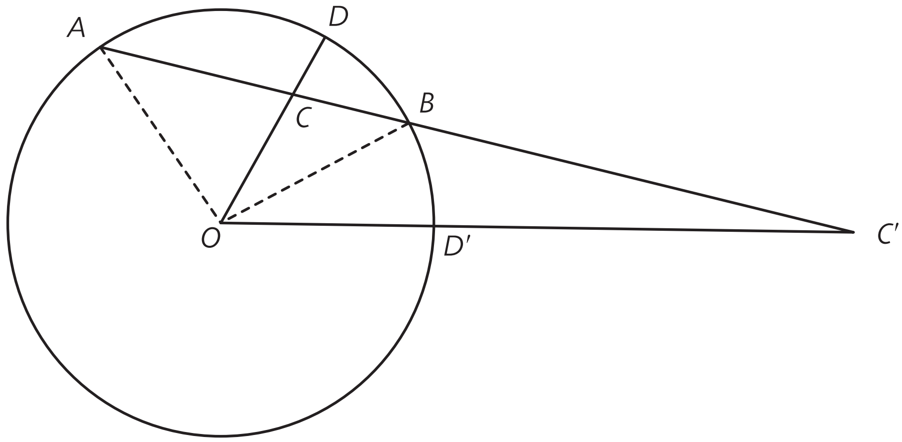


.

En el círculo de la figura nosotros diríamos que la cuerda $\overline{AB}$ es el doble del seno de la mitad del ángulo $\widehat{AOB}$ (multiplicado por el radio del círculo). En cambio Menelao y sus sucesores griegos se referían a AB simplemente como la cuerda correspondiente al arco $\overset{\frown}{AB}$.

Si BOB' es un diámetro del círculo, entonces la cuerda $\overline{AB'}$ es el doble del coseno de la mitad del ángulo $\widehat{AOB}$ (multiplicado por el radio del círculo). Por lo tanto, los teoremas de Tales y de Pitágoras, que conducen a la ecuación $\overline{AB}^2 + \overline{AB'}^2 = 4r^2$, son equivalentes a la identidad trigonométrica moderna $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Menelao, y probablemente también Hiparco antes que él, conocía otros tipos de identidades, de dos de las cuales hizo uso como lemas previos para demostrar su teorema sobre transversales. El primero de estos dos lemas lo podemos formular en terminología moderna de la manera siguiente: **si una cuerda $\overline{AB}$ en un círculo de centro O (ver la figura), la cortamos por un radio $\overline{OD}$ en un punto C, entonces se tiene que:**

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\operatorname{sen} AD}{\operatorname{sen} DB}.$$

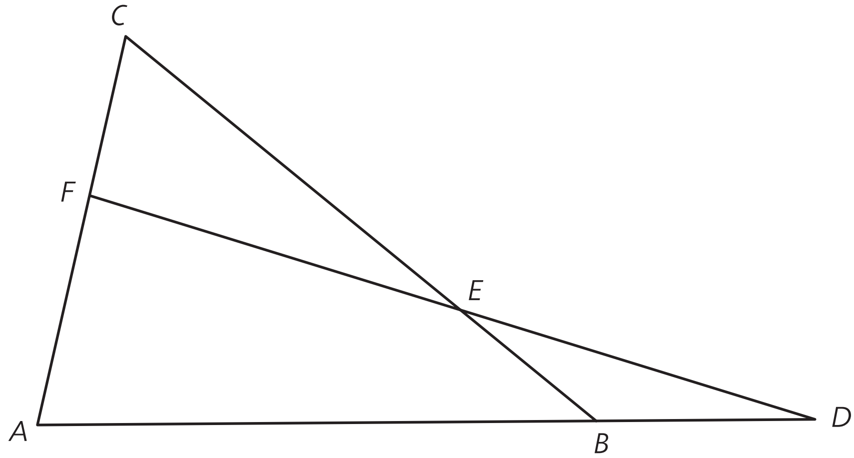


El segundo lema es análogo: **si la prolongación de la cuerda $\overline{AB}$ corta a la prolongación del radio $\overline{OD'}$ en C', entonces**

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = \frac{\operatorname{sen} AD'}{\operatorname{sen} BD'}.$$

Menelao admite estos dos lemas sin demostración, probablemente porque se los podría encontrar en obras anteriores, por ejemplo, posiblemente en los doce libros de Hiparco sobre cuerdas. Podemos probar fácilmente estos dos lemas trazando los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, las perpendiculares desde A y desde B a $\overline{OD}$ y utilizando semejanza de triángulos.

Es probable que Euclides conociera ya el teorema de Menelao para el caso de triángulos planos y quizá incluso lo incorpore en su obra perdida *Porismas*. Este teorema para el caso plano afirma que si cortamos los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, de un triángulo ABC por una recta transversal en los puntos D, E y F respectivamente, entonces se verifica que $\overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CF} = \overline{BD} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AF}$.



En otras palabras, una recta cualquiera corta a los lados de un triángulo de tal manera que el producto de tres segmentos no adyacentes es igual al producto de los otros tres, como puede demostrarse fácilmente por métodos de geometría elemental o aplicando relaciones trigonométricas sencillas.

Menelao daba por descontado que sus contemporáneos ya conocían este teorema, y se dedicó a generalizarlo a triángulos esféricos en una forma que equivale a la formulación moderna

$$\operatorname{sen} \widehat{AD} \cdot \operatorname{sen} \widehat{BE} \cdot \operatorname{sen} \widehat{CF} = \operatorname{sen} \widehat{BD} \cdot \operatorname{sen} \widehat{CE} \cdot \operatorname{sen} \widehat{AF}.$$

Si utilizamos segmentos orientados en lugar de absolutos, entonces los dos productos en cuestión son iguales en valor absoluto, pero tienen distinto signo.

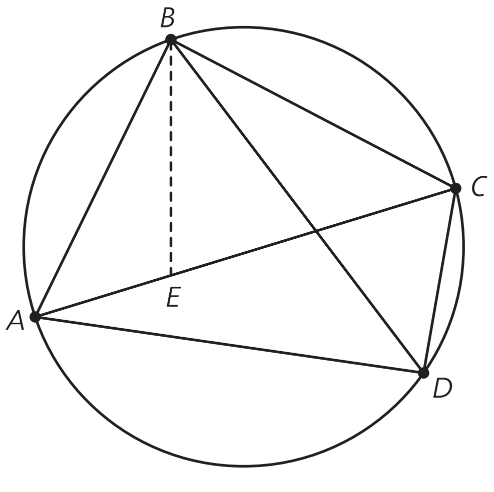
El *Almagesto* de Ptolomeo. El teorema de Menelao jugó un papel fundamental en la trigonometría esférica y en astronomía; no obstante, la obra geométrica más significativa y que tuvo una mayor influencia con mucha diferencia sobre las demás de toda la antigüedad fue la *Sintaxis matemática*, una obra en trece libros escrita por Ptolomeo de Alejandría medio siglo más o menos después de Menelao.

Esta famosa "síntesis matemática" fue distinguida de otro grupo de tratados astronómicos escritos por diferentes autores (incluido Aristarco) con el nombre de la colección "mayor" al referirse a la de Ptolomeo y la de colección "menor" para referirse a la de Aristarco y otros. De las frecuentes referencias a la primera de ellas como *megiste*, surgió más tarde en Arabia la costumbre de llamar al libro de Ptolomeo *Almagesto* ("el más grande"), y desde entonces la obra se ha conocido por este nombre.

De la vida de su autor tenemos tan poca información como sobre la del autor de los *Elementos*; no sabemos ni cuándo ni donde nacieron ni Euclides ni Ptolomeo. Sí sabemos que Ptolomeo hizo observaciones astronómicas en Alejandría desde el 127 al 151 y por lo tanto podemos suponer que nació a finales de siglo I. Suidas, un escritor que vivió en el siglo X, nos informa que Ptolomeo vivía aún durante el reinado de Marco Aurelio, que fue emperador desde el año 161 al 180.

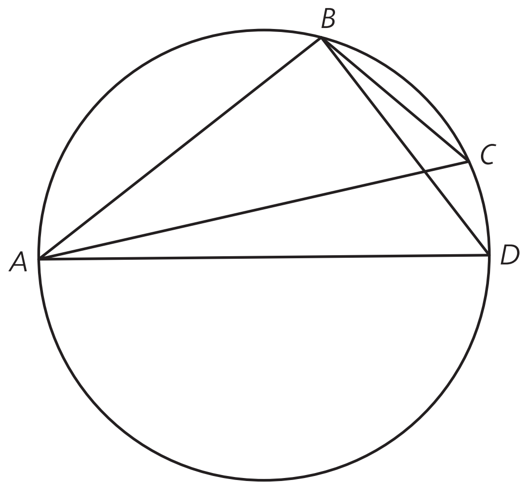
Se supone que el *Almagesto* de Ptolomeo debe mucho, por lo que se refiere a los métodos utilizados, a *Las cuerdas de un círculo*, de Hiparco, pero la magnitud de esta deuda no puede establecerse con seguridad. Está claro que Ptolomeo debió usar en su astronomía el catálogo de las estrellas que dejo Hiparco, pero no podemos determinar si las tablas trigonométricas de Ptolomeo, fueron extraídas en gran parte de las de su ilustre predecesor o no, ni, en caso afirmativo, en qué medida.

Afortunadamente, en cualquier caso, el *Almagesto* de Ptolomeo ha resistido los estragos del tiempo; por lo tanto, disponemos no solo de sus tablas trigonométricas, sino también de una explicación de los métodos utilizados en su construcción.



En el cálculo de las cuerdas por Ptolomeo desempeñó un papel central una proposición geométrica que se conoce todavía como *teorema de Ptolomeo*: **si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia (ver figura de arriba), entonces $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$, es decir, la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero concíclico convexo es igual al producto de las dos diagonales.**

La demostración de este teorema puede hacerse fácilmente trazando el segmento $\overline{BE}$ tal que el ángulo $\widehat{ABE}$ sea igual al ángulo $\widehat{DBC}$ y observando que el triángulo ABE es semejante entonces al BCD. Un caso particular de este teorema de Ptolomeo había aparecido ya incluido en los *Datos* de Euclides (Proposición 93) en la forma siguiente: **si ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia y $\overline{BD}$ es la cuerda bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$, entonces $\dfrac{(AB+BC)}{BD}=\dfrac{AC}{AD}$.**



Otro caso especial del teorema general de Ptolomeo, y mucho más útil, es aquel en el que un lado, digamos $\overline{AD}$, es un diámetro del círculo (ver figura de arriba). Entonces, si $\overline{AD} = 2r$, tenemos

$$2r \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Llamando al arco $\widehat{BD} = 2\alpha$ y al arco $\widehat{CD} = 2\beta$, entonces

$$\overline{BC} = 2r \cdot \text{sen } (\alpha - \beta),\ \overline{AB} = 2r \cdot \text{sen } (90^\circ - \alpha), \overline{BD} = 2r \cdot \text{sen } \alpha, \overline{CD} = 2r \cdot \text{sen } \beta, \overline{AC} = 2r \cdot \text{sen } (90^\circ - \beta).$$

Por lo tanto, el teorema de Ptolomeo conduce en este caso al resultado

$$\text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen } \beta.$$

Un razonamiento análogo nos lleva a la fórmula

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$$

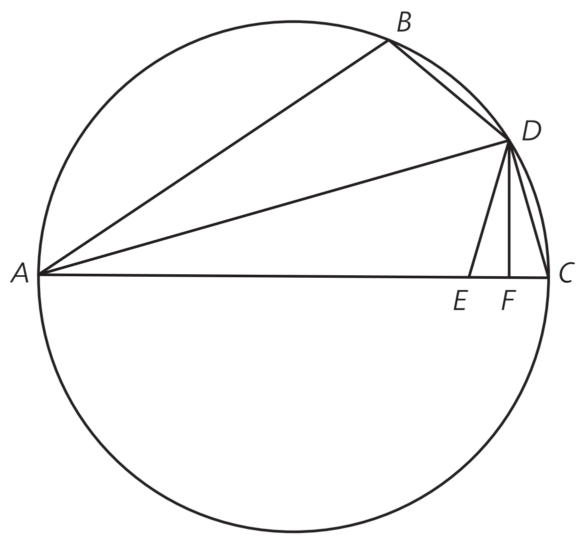
y al par

$$\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta.$$

y por lo tanto a estas cuatro fórmulas de sumas y diferencias de ángulos o arcos se las conoce frecuentemente aún hoy como *fórmulas de Ptolomeo*.

La fórmula que nos da el seno de una diferencia o, más exactamente, la cuerda de una diferencia de dos arcos, fue la que Ptolomeo encontró más útil para construir sus tablas. Otra fórmula que también utilizó de una manera sistemática es la equivalente a la fórmula moderna del seno del ángulo mitad.

Dada la cuerda de un cierto arco en un círculo, Ptolomeo calcula la cuerda correspondiente a la mitad del arco de la manera siguiente: sea D el punto medio del arco $\widehat{BC}$ en una circunferencia de diámetro $\overline{AC} = 2r$ (ver la figura siguiente), sea $\overline{AB} = \overline{AE}$ y sea $\overline{DF}$ la mediatriz de $\overline{EC}$.



Entonces es fácil demostrar que $\overline{FC} = \frac{1}{2}(2r - AB)$; por otra parte, se sabe de la geometría elemental que $\overline{DC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{FC}$, de donde se obtiene que $\overline{DC}^2 = r(2r - AB)$. Si tomamos el arco $\widehat{BC} = 2\alpha$ entonces $\widehat{DC} = 2r \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ y $\widehat{AB} = 2r \cdot \cos \alpha$, y obtenemos como consecuencia nuestra bien conocida fórmula moderna

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

En otras palabras, si se conoce la cuerda de un arco dado, entonces podemos calcular la cuerda del arco mitad. Ahora Ptolomeo se encontraba ya bien equipado para abordar la construcción de una tabla de cuerdas tan precisa como se pudiera desear, disponiendo de las equivalentes a nuestras cuatro fórmulas fundamentales.

Materiales para presentar en el aula

Origen de la trigonometría

Como síntesis de Una aventura a la trigonometría y la técnica de medición de los griegos, diremos que la astronomía de los matemáticos griegos antiguos (Pitágoras y sus primeros seguidores), en los siglos VI, V y IV a. C., consistió fundamentalmente en descripciones y especulaciones aventuradas sobre los astros.

Más adelante, sin embargo, se fue poniendo de manifiesto que era necesario hacer de la astronomía una ciencia más exacta, fundada en mediciones y en una matemática apropiada, que permitiera predecir con precisión los eclipses y los movimientos de los astros, para hacer los calendarios más exactos y la navegación más segura. Así nació la trigonometría con Hiparco, un griego del siglo II a. C.

Los tres matemáticos griegos a quienes más debe la astronomía antigua fueron Hiparco, del siglo II a. C., Menelao, del siglo I d. C. y, sobre todo, Ptolomeo, del siglo II d. C., con quien la astronomía alcanza una de sus cumbres.

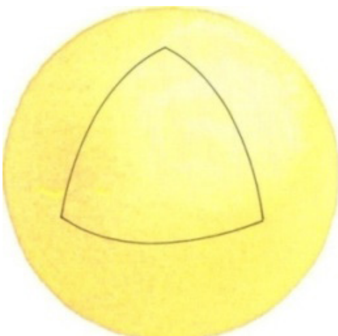
Ptolomeo escribió un tratado que llamó *Syntaxis mathematica*, es decir Colección matemática, que los matemáticos árabes apreciaron tanto que se referían a ella como *La gran colección (Al magesto*), en griego, *Megale syntaxis*.

Una gran parte de los teoremas de nuestra actual trigonometría eran perfectamente conocidos y utilizados con destreza por Ptolomeo.

Desarrollo

La trigonometría se ocupa, principalmente, de estudiar la relación entre lados y ángulos de un triángulo, y surgió de las necesidades de la astronomía, la cartografía (construcción de mapas), la artillería, entre otras disciplinas.

La trigonometría, que necesitó para su desarrollo de elementos de aritmética (para la configuración de tablas), álgebra (para establecer fórmulas que relacionan ángulos y lados en un triángulo) y geometría, tuvo un florecimiento mucho más tardío que la geometría.



Es curioso que la trigonometría esférica, es decir, la que estudia los triángulos curvos de lados curvilíneos que, similares a los de la ilustración, se forman sobre la superficie de la esfera, se desarrollara antes que la trigonometría plana, que hoy nos parece mucho más elemental.

Esto se debió al interés práctico más cercano a la esfera, para cálculos astronómicos y de navegación. Indios y árabes se dedicaron de manera primordial al estudio de este aspecto y lo llevaron a cabo con notable éxito, de forma sistemática, hacia mediados del siglo XIII.

Los protagonistas en Europa

La obra de los árabes llegó a Europa Occidental a través de España. Entre los personajes importantes de este proceso, se encuentra Jabir de Sevilla, quien en el siglo XI obtuvo importantes resultados sobre triángulos esféricos.

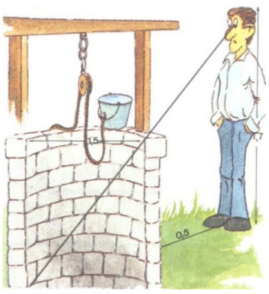
El astrónomo prusiano Johann Müller (Regiomontano), en el siglo XV, fue el primer europeo en sistematizar los conocimientos trigonométricos. Más adelante, con el desarrollo de la aritmética y el álgebra, su obra fue notablemente simplificada.

El teorema del coseno para la resolución de triángulos planos fue introducido por Francisco Vieta en el siglo XVI. Los logaritmos de John Napier (o Neper) contribuyeron a hacer más fáciles los cálculos de la trigonometría a comienzos del siglo XVII. Se puede considerar que la trigonometría alcanzó su punto culminante con la aparición de las *series de Fourier*, a principios del siglo XIX, con las que esta materia se une estrechamente al análisis, proporcionando un instrumento sin precedentes para la exploración de las vibraciones y los movimientos periódicos que por todas partes aparecen en la naturaleza.

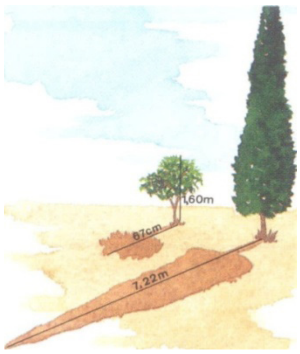
En la vida cotidiana (y sobre todo en la antigüedad, en que no se contaba con los eficaces instrumentos de medida con que se cuenta actualmente), surge con frecuencia la necesidad de efectuar algunas medidas que supondrían un penoso trabajo si hubiera que realizarlas sobre el terreno. Con ayuda de la trigonometría y recogiendo un par de datos, podremos efectuar mediciones espectaculares y con una aproximación asombrosa.

He aquí algunos problemas llamativos que resuelve la trigonometría.

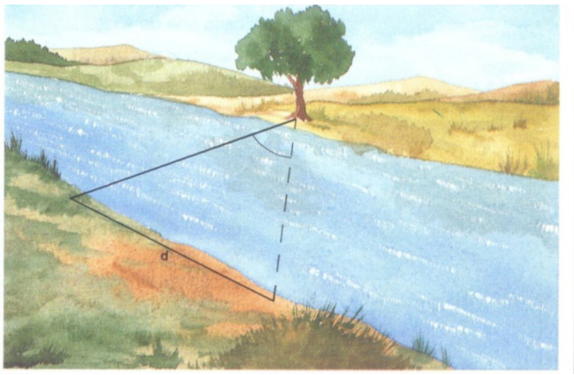
1. La torre Eiffel mide, aproximadamente, 300 m de altura y pesa 8 000 000 kg. Si construimos una torre Eiffel a escala, utilizando exactamente el mismo material del original, y pesa 1 kg, ¿cuánto medirá?
2. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 metros y alejándonos 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, vemos que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



3. Un enorme árbol arroja una sombra de 7,22 m. En ese mismo momento, un pino joven de 1,60 m arroja una sombra de 67 cm. ¿Cuál es la altura del árbol grande?



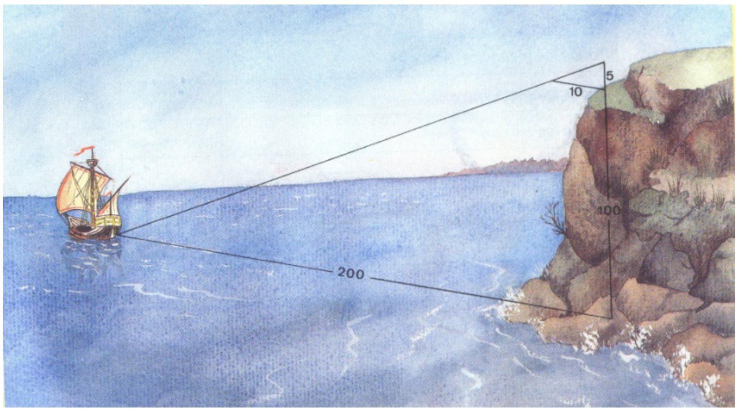
4. Cómo medir la anchura de un río. Lo podemos hacer con solo situarnos en una orilla y frente a algún objeto de la orilla opuesta que nos sirva de referencia. Nos movemos a lo largo de la orilla y medimos la distancia *d* que hemos recorrido y el ángulo que forma la recta que pasa por nuestra posición actual y el objeto de referencia, y la recta que pasa por la posición inicial y el mismo objeto. Con esos datos y lo que nos aportará la trigonometría podremos resolver el problema.



El tiro con catapulta

Tales de Mileto aprendió de los egipcios a medir la altura de un árbol en forma similar a como lo hemos aprendido más arriba. No hace falta subir a su copa y echar una cinta métrica desde arriba para medir la longitud de su sombra en el momento en que la altura de una estaca vertical clavada en el suelo es igual a la longitud de su sombra. O, de otra manera: basta medir la longitud *s* de la sombra del árbol cuando la longitud de una estaca vertical es, por ejemplo, 4 veces la longitud de su sombra. La altura del árbol es, entonces, 4*s*.

Un problema interesante con que Tales se encontró al volver a su ciudad de Mileto, en la costa griega, consistía en averiguar la distancia a la que se encontraba un barco enemigo anclado frente a su costa. Si sabía la distancia, lograría adivinar mejor con qué catapulta (la de largo, mediano o corto alcance) podría darle una buena pedrada.



Tales debió acordarse de los egipcios y pensó que el problema era muy parecido al de calcular la distancia desde la copa de un árbol al suelo (para el que poseía una receta); era una distancia inaccesible lo que había que medir, pero ahora desde un punto del mar a la costa.

"Si hubiera un sol debajo del agua que ofreciera una sombra... ¡Fantasías! Pero, ¿qué falta me hace el Sol –pensó–. La línea de luz desde el barco a mi ojo también es una línea recta. Y puedo valerme del acantilado, que sé que mide 100 codos de altura sobre el mar".

Tales se situó en la comisa del acantilado y miró al barco. Sacó una vara por la comisa hasta que su punta coincidió en la visual con el barco. Midió la vara (10 codos), midió la altura de sus ojos sobre la vara (5 codos) y se dijo: "¡Eureka! La distancia es de 200 codos. Con mi catapulta de alcance medio... ¡Diana!".

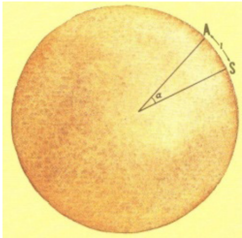
Eratóstenes de Cirene

Eratóstenes fue un matemático, astrónomo y geógrafo de origen cirenaico. Concibió por primera vez la geografía como una disciplina sistemática, desarrollando una terminología que todavía se usa en la actualidad. Es conocido principalmente por ser la primera persona en calcular el diámetro y la circunferencia de la Tierra, lo hizo al comparar las altitudes del Sol del mediodía en dos lugares separados por una distancia norte-sur.

Su cálculo fue notablemente preciso. También fue el primero en calcular la inclinación del eje de la Tierra (nuevamente con notable precisión). Además, pudo haber estimado la distancia desde la Tierra hasta el Sol e ideó intercalar cada cuatro años un día adicional en los calendarios, produciendo el año bisiesto. Creó el primer mapamundi, incorporando paralelos y meridianos basados en el conocimiento geográfico disponible de su época.

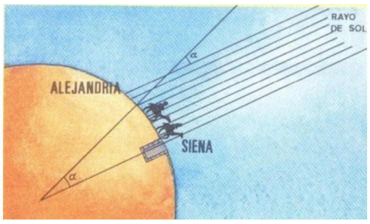
El principal motivo de su celebridad es sin duda la determinación del tamaño de la Tierra. Para ello inventó y empleó un método trigonométrico, además de las nociones de latitud y longitud, al parecer ya introducidas por Dicearco, por lo que bien merece el título de padre de la geodesia.

Por referencias obtenidas de un papiro de su biblioteca, sabía que en Siena (hoy Asuán, Egipto) el día del solsticio de verano los objetos verticales no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos; esto significaba que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico de Cáncer, y su latitud era igual a la de la eclíptica que ya conocía.



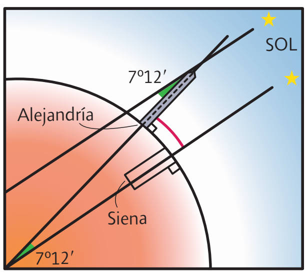
Eratóstenes, suponiendo que Siena y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan 3°) y que el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía, demostrando que el cenit de la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7° 12′ del de Alejandría. Según Cleomedes, Eratóstenes se sirvió del gnomon (un protocuadrante solar) para el cálculo de dicha cantidad.

Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia Biblioteca de Alejandría, fijándola en 5 000 estadios, de donde dedujo que la circunferencia de la Tierra era de 250 000 estadios, resultado que posteriormente elevó hasta 252 000 estadios, de modo que a cada grado correspondieran 700 estadios. Aún hay quien afirma que Eratóstenes, para calcular la distancia entre las dos ciudades, se valió de un regimiento de soldados que diera pasos de tamaño uniforme y los contara.



Admitiendo que Eratóstenes usase el estadio ático-italiano de 184,8 m, que era el que solían utilizar los griegos de Alejandría en aquella época, el error cometido sería de 6 192 kilómetros (un 15 %). Sin embargo, hay quien defiende que empleó el estadio egipcio (300 codos de 52,4 cm), en cuyo caso la circunferencia polar calculada hubiera sido de 39 614 km, frente a los 40 008 km considerados en la actualidad, es decir, un error de menos del 1 %.

Ahora bien, es imposible que Eratóstenes diera con la medida exacta de la circunferencia de la Tierra debido a errores en los supuestos que calculó. Tuvo que haber tenido un margen de error considerable y por lo tanto no pudo haber usado el estadio egipcio: supuso que la Tierra es perfectamente esférica, lo que no es cierto. Un grado de latitud no representa exactamente la misma distancia en todas las latitudes, sino que varía ligeramente de 110,57 km en el Ecuador hasta 111,7 km en los polos. Por eso no podemos suponer que 7° entre Alejandría y Siena representen la misma distancia que 7° en cualquier otro lugar a lo largo de todo el meridiano.



Supuso que Siena y Alejandría se encontraban situadas sobre un mismo meridiano, lo cual no es así, ya que hay una diferencia de 3° de longitud entre ambas ciudades.

La distancia real entre Alejandría y Siena (hoy Asuán) no es de 924 km (5 000 estadios ático-italiano de 184,8 m por estadio), sino de 843 km (distancia aérea y entre los centros de las dos ciudades), lo que representa una diferencia de 81 km.

Realmente Siena no está ubicada exactamente sobre el paralelo del trópico de Cáncer (los puntos donde los rayos del sol caen verticalmente a la tierra en el solsticio de verano). En realidad, se encuentra situada a 72 km (desde el centro de la ciudad). Pero debido a que las variaciones del eje de la Tierra fluctúan entre 22,1 y 24,5° en un período de 41 000 años, hace 2 000 años se encontraba a 41 km.

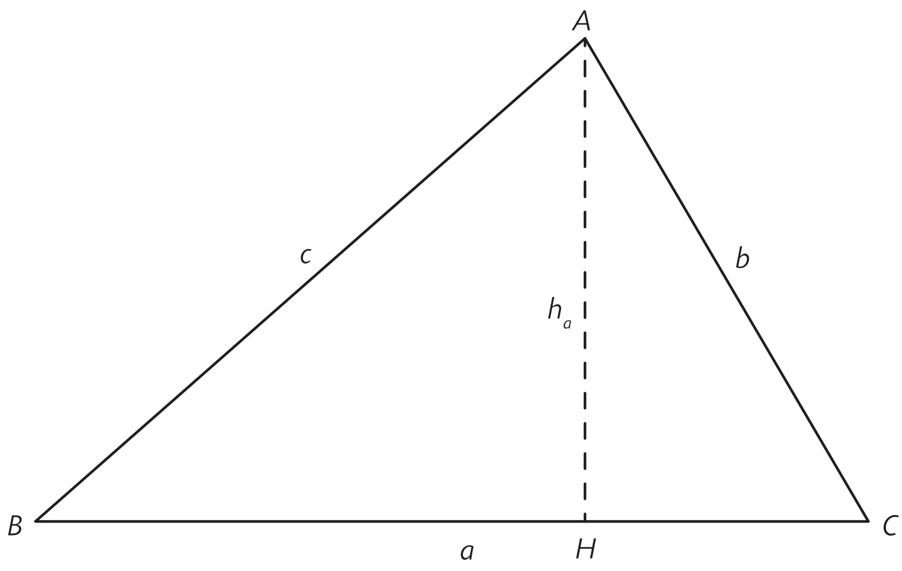
La medida de la sombra que se proyectó sobre la vara de Eratóstenes hace 2 200 años debió ser de 7,5° o 1/48 parte de una circunferencia y no 7,2° o 1/50 parte. Puesto que en aquella época no existía el cálculo trigonométrico, para calcular el ángulo de la sombra Eratóstenes pudo haberse valido de un compás, para medir directamente dicho ángulo, lo que no permite una medida tan precisa.

Si se rehace el cálculo de Eratóstenes con la distancia y medida angular exacta desde Alejandría hasta el lugar geográfico situado justo en la intersección del meridiano que pasa por Alejandría con el paralelo del trópico de Cáncer, se obtiene un valor de 40 074 km para la circunferencia terrestre. Eso representa solamente 66 km o un 0,16 % de error de la circunferencia real de la Tierra medida por satélites avanzados, que es de 40 008 km, lo que demuestra la validez de su razonamiento. Esta ligera diferencia se debe a que la distancia entre Alejandría y la línea del trópico de Cáncer es 1/46 parte de una circunferencia, pero la Tierra no es una esfera perfecta.

Posidonio rehízo el cálculo de Eratóstenes 150 años más tarde y obtuvo una circunferencia sensiblemente menor. Este valor fue adoptado por Ptolomeo y fue en el que probablemente se basó Cristóbal Colón para justificar la viabilidad del viaje a las Indias por occidente. Con las mediciones de Eratóstenes, el viaje no se habría llegado a realizar, al menos en aquella época y con aquellos medios, aceptando solo las certezas científicas. Los doctores consultados en Salamanca, a petición real, se basaron en ellos para determinar que el objetivo principal –llegar a China y Japón– era imposible dada la distancia. Finalmente, la empresa fue aprobada por la reina –sobre la base de testimonios y cartas de mareas que obraban en poder de los socios de Colón y que mencionaban tierras a corta distancia al oeste de Azores–, debido a las ventajas estratégicas y comerciales que preveía el proyecto y a objetivos secundarios, como la condición de Colón de obtener prebendas y porcentajes sobre las tierras que descubriera en el camino.

El trabajo de Eratóstenes es considerado por algunos el primer intento científico de medir las dimensiones de nuestro planeta, ya que se hicieron otros cálculos y se perfeccionaron siglos después por estudiosos tales como el califa Al-Mamun y Jean François Fernel.

Teorema del seno y del coseno



En un triángulo ABC cualquiera se traza la altura h correspondiente al vértice A; como el ángulo AHB es recto, resulta

$$h_a = c \cdot \text{sen } B$$

Comó el ángulo AHC también es recto resulta, asimismo,

$$h_a = b \cdot \text{sen } C$$

Por tanto, en todo triángulo (no importa que sea acutángulo u obtusángulo) se verifica

$$c \cdot \text{sen } B = b \cdot \text{sen } C$$

Del mismo modo si se traza la altura h_b, resulta también:

$$a \cdot \text{sen } C = c \cdot \text{sen } A$$

Con estas dos expresiones obtenemos la fórmula de los senos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

También, observando el triángulo AHC y por el teorema de Pitágoras, podemos escribir:

$$b^2 = h_a^2 + \overline{HC}^2 = h_a^2 + \left(a - \overline{HB}\right)^2 = \left(h_a^2 + \overline{HC}^2\right) + a^2 - 2a\overline{HB} = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

Así, resulta:

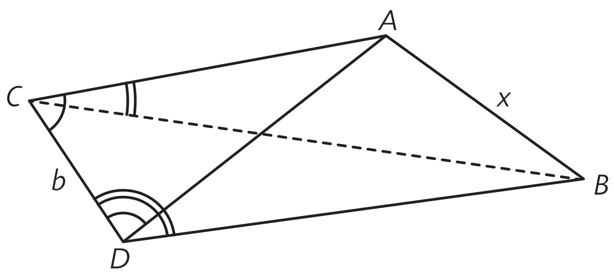
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

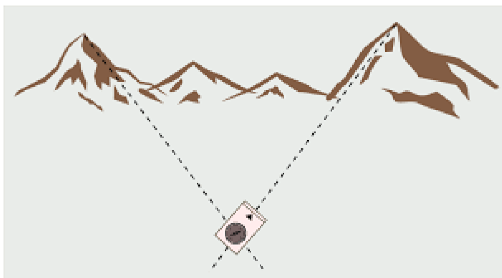
que es la fórmula del coseno (válida también, aunque un ángulo sea obtuso). Estas dos son las fórmulas o los teoremas fundamentales para obtener los lados y ángulos de un triángulo del que se dan tres elementos, por ejemplo, dos lados y un ángulo, tres lados, dos ángulos y un lado, etcétera.

Método de triangulación para medir distancias

A fin de realizar con precisión mapas o planos topográficos para la construcción de carreteras, túneles, diques, puentes, etc., se utiliza, con preferencia, el método de las triangulaciones. Este método se basa en el hecho de que, si en un triángulo se conocen un lado y dos de sus ángulos, o dos lados y uno de los ángulos, entonces, como hemos visto, por el teorema del coseno o el de los senos, se pueden calcular fácilmente los restantes elementos del triángulo.

Así si se quiere calcular la distancia entre dos puntos A y B, por ejemplo los picos inaccesibles de dos montañas, se puede proceder como sigue:





En el valle se señalan dos puntos C y D, cuya distancia se pueda medir fácilmente con cinta métrica u otro método cómodo. Desde C se midieron los ángulos ACD y ACB. Desde D se miden también los ángulos ADC y BDC. Ahora, como en el triángulo ADC se conocen b, ACD y ADC, se calcula la distancia AC. También como en el BCD se conocen b, BCD y BDC se calcula la distancia BC. Finalmente, como en el triángulo ABC tenemos calculados BC y AC y hemos medido el ángulo ACB, se puede calcular x.

El método de triangulación fue utilizado por los egipcios, griegos y otros pueblos de la antigüedad, pero midiendo los ángulos en forma muy rudimentaria.

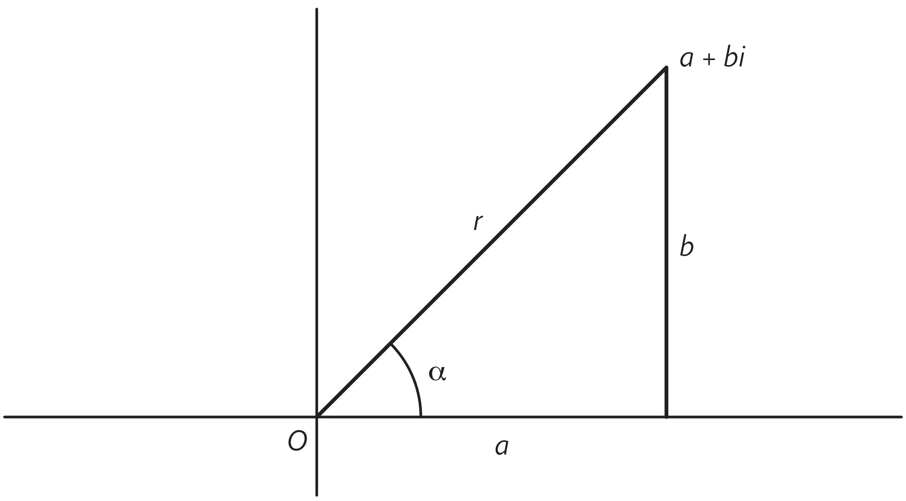
El túnel de Samos

Una de las construcciones más notables de los griegos antiguos fue el túnel de Samos, en el que, sin dudas, emplearon la triangulación. Samos es la isla griega en que nació Pitágoras, situada en la zona más oriental del Mediterráneo.

El túnel fue realizado en el siglo VI a. C. para llevar agua desde las fuentes del monte Castro a la ciudad, situada a la otra ladera del monte; tenía unos 2 m de diámetro, casi 1 km de longitud y se excavó partiendo simultáneamente de los dos extremos, lo que suponía una planificación tecnológica sorprendente. Aunque hubo un pequeño fallo de precisión y tuvieron que lograr la unión de los dos túneles con una pequeña curva, la construcción del túnel supuso una verdadera hazaña.

La trigonometría y los números complejos. Módulo y argumento

Los cálculos con números complejos, como sabemos, se simplifican muchísimo, gracias a la trigonometría. Si llamamos r a la distancia desde O al punto que representa el complejo $a + bi$ y α al ángulo que r forma con la parte positiva del eje real, analizando el gráfico vemos que



$$\left\{\begin{array}{l} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{array}\right\} \text{ y también } \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\}.$$

Así se obtiene que $a + bi = r \cdot (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.

A r lo llamamos el *módulo del complejo* $a + bi$ y a α su *argumento*. Como sabemos, el complejo queda perfectamente determinado por su módulo y su argumento.

Un resultado importante. Euler descubrió que se verifica la curiosa relación

$$\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha = e^{\alpha i}$$

y así resulta que $a + bi = re^{\alpha i}$.

Con esto, multiplicar los dos complejos

$$a_1 + b_1 i = r_1 e^{\alpha_1 i} \quad \text{y} \quad a_2 + b_2 i = r_2 e^{\alpha_2 i},$$

resulta muy fácil ahora:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = r_1 r_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)i}.$$

Resulta que el producto es un número complejo de módulo $r_1 \cdot r_2$ y argumento $\alpha_1 + \alpha_2$. Es decir: se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Si en la relación de Euler

$$\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha = e^{\alpha i}$$

consideramos $\alpha = \pi$, resulta $\cos \pi = -1$ y $\text{sen } \pi = 0$; así:

$$e^{\pi i} = -1 \qquad \text{¡Qué interesante! ¿No?}$$

Observemos de qué modo tan sencillo están relacionados los cuatro números e, π, i y 1, tan fundamentales en toda la matemática.

El cálculo diferencial

La integral. ¿Cuál es la idea?

Un heladero ambulante tiene una lista de las ganancias de cada día del mes de enero:

Día	Recaudación
1	2 753
2	3 845
3	2 650
4	3 935
....	......
31	3 750

Pero le resultaba más interesante ver cómo se iban acumulando sus ganancias y para ello, según pasaban los días, fue haciendo otra lista, la de sus ganancias hasta el día; a esta la llamó *recaudación acumulada*.

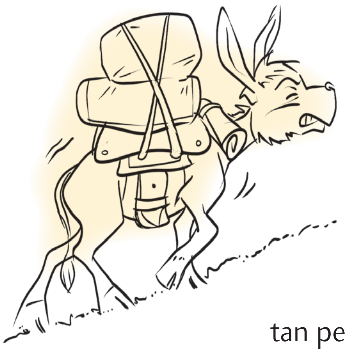
Dia	Recaudación acumulada
1	2 753
2	6 598
3	9 248
4	13 183
.....	......
30	90 293
31	94 023

Primero hemos formado la función de las ganancias por cada día. Después, la de las ganancias acumuladas hasta cada día.

Pues bien, la integral de una función, desde un punto de vista intuitivo, no es más que esto: la acumulación de los valores de la función hasta un punto determinado; en este ejemplo, hasta cada día del mes. Hemos formado una nueva función, que es la integral de la primera.

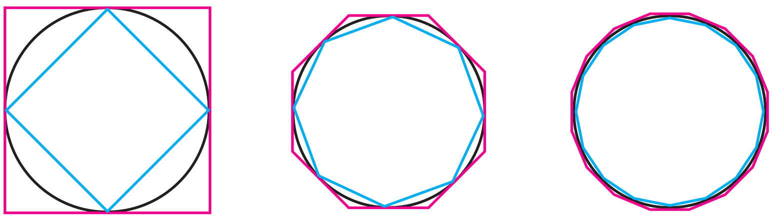
Cuando la función, como en este caso, es una sucesión, es fácil ver qué quiere decir eso de acumular valores. Cuando la función es como $y = x$, $y = x^3$ no hacemos exactamente como en este caso; pero, como veremos en próximos temas, es algo bastante natural. Pensémoslo un poco antes de empezar, para ver qué ocurre.

¿Cómo evolucionó la idea con el tiempo?



Los griegos, en el siglo III a. C., hicieron los primeros esbozos del cálculo integral. Incluso, se puede decir con toda justicia que su fundamentación del cálculo de áreas y volúmenes no fue superada en rigor matemático hasta bien entrado el siglo XIX.

Su interés se centró sobre todo en el cálculo de áreas y volúmenes de las figuras y los cuerpos geométricos que más manejaban, por ejemplo, del círculo y de la esfera, conos, etc. Para calcular el área del círculo usaron una sucesión de polígonos regulares inscritos cuyas áreas ya conocían (por ejemplo, cuadrado, octógono...) y otra de los mismos polígonos regulares circunscritos, logrando así una aproximación tan perfecta como deseaban del área buscada.



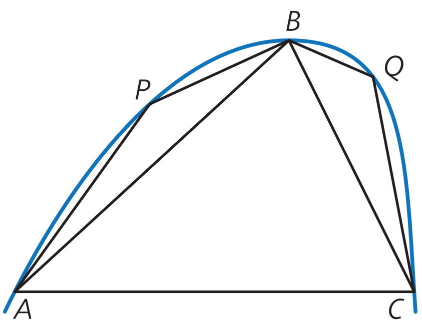
Como vemos en la ilustración, cuantos más lados tienen los polígonos, mayor es la aproximación de su área a la del círculo.

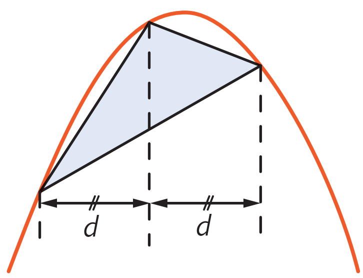
Se ha dicho con razón que lo que a los griegos les faltó, en particular a Apolonio de Perga –un gran genio en geometría–, no fue riqueza de ideas y de métodos, sino abundancia de problemas generales que hubieran podido estimular el desarrollo de estos métodos en otras direcciones distintas. Los griegos tenían una estima extraordinaria por las curvas más simples, como la circunferencia, la elipse, la parábola, y dedicaron a su estudio casi todas sus energías.

Pero el gran avance del cálculo integral tuvo lugar en el siglo XVII, cuando se observó que la derivada de la función que expresa el área entre una curva $y = f(x)$ y el eje $\overline{OX}$ vale precisamente $f(x)$. Esto se suele llamar el *teorema fundamental del cálculo*. Esta idea proporcionaba un método muy general para hallar tal área y, con él, un sinfín de aplicaciones a muchos campos de la ciencia. **La integración se adelantó en mucho a la derivación.**

Aunque hoy día se suele presentar el estudio de la derivada antes que el de la integral de una función, lo cierto es que la integral es anterior a la derivada en más de 18 siglos. Arquímedes, en el siglo III a. C. calculó el área limitada por un segmento de parábola mediante un procedimiento muy ingenioso parecido a los utilizados posteriormente en el cálculo integral.

El libro *Sobre las espirales* fue muy admirado, pero poco leído, ya que se lo consideró generalmente como la más difícil de todas las obras de Arquímedes. De los tratados que se refieren principalmente al método de exhaución (es decir, esencialmente al cálculo integral), el más popular fue *La cuadratura de la parábola*. En el momento en que Arquímedes escribía, las secciones cónicas se conocían desde hacía casi un siglo; sin embargo, no se había hecho ningún progreso en lo que se refiere al cálculo de áreas relacionadas con ellas.

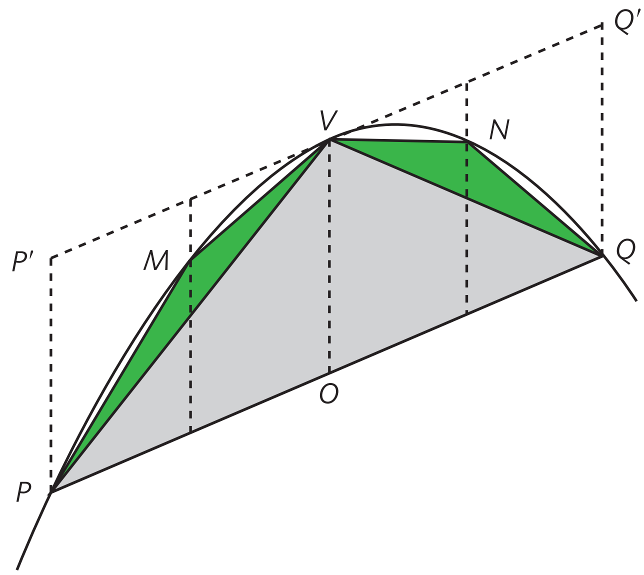




Se necesitó el genio del más grande matemático de la antigüedad para cuadrar una sección cónica concreta, un segmento de parábola, lo que consigue en la proposición 17 de la obra dedicada a dicha cuadratura. La demostración por el método estándar de exhaución es larga y complicada, pero el hecho es que Arquímedes demostró rigurosamente que el área K de un segmento parabólico $APBQC$ de la figura de arriba a la izquierda es igual a 4/3 del área de un triángulo que tenga la misma base y la misma altura. En las siguientes siete proposiciones, que son las últimas del libro, Arquímedes da una segunda demostración diferente del mismo teorema.

Demuestra en primer lugar que el área del triángulo inscrito ABC, con base AC, es igual a cuatro veces la suma de los correspondientes triángulos inscritos con bases cada uno en los segmentos AB y BC. Continuando el proceso que sugiere esta relación, parece claro que el área K del segmento parabólico ABC vendrá dada por la suma de la serie infinita $T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\ldots+\frac{T}{4^n}+\ldots,$ que es $\frac{4}{3}T$.

Demostración



Sea K el área del segmento parabólico PQ y S el área de PVQ.

Supongamos que $K>\frac{3}{4}S$; es decir, que $K-\frac{3}{4}S>0$.

El área del triángulo PVQ inscrito en un segmento parabólico es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento parabólico.

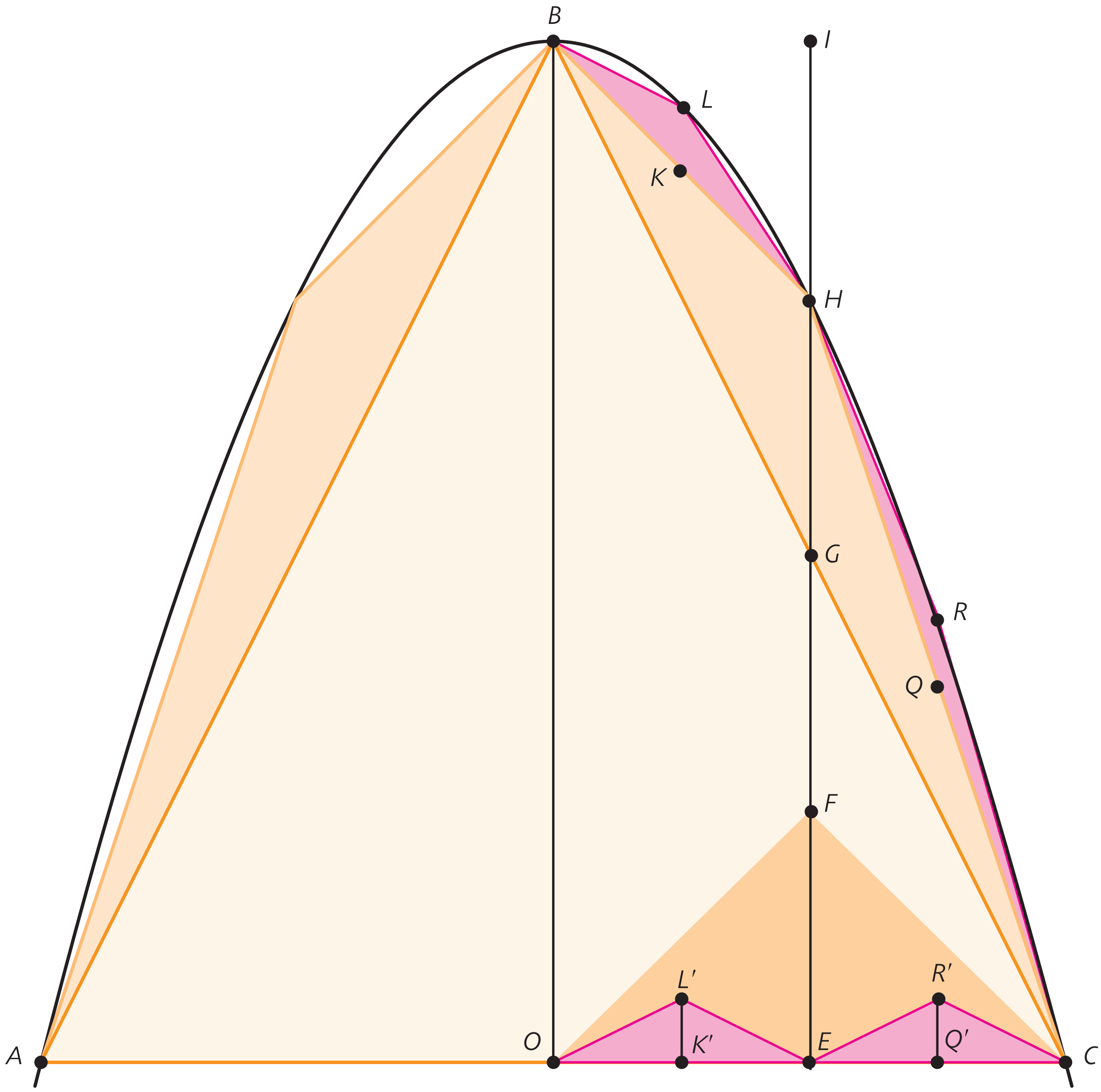
Por tanto, se sigue que el área del triánulo inscrito es mayor que la mitad del área de dicho segmento, aplicando el principio de convergencia de Eudoxo.

Arquímedes no habla, desde luego, de la suma de la serie infinita, puesto que los procesos infinitos no se aceptaban en su época, sino que por una doble *reductio ad absurdum* demuestra que K no puede ser ni mayor ni menor que $\frac{4}{3}T$. Arquímedes, dicho sea de paso, al igual que sus predecesores, no utilizó el nombre de "parábola", sino el de "ortotoma" o "sección de un cono rectángulo".

En el preámbulo a la *Cuadratura de la parábola* nos encontramos con la hipótesis o lema que se suele conocer hoy como el *axioma de Arquímedes*: "Que el exceso por el cual la mayor de dos áreas desiguales supera a la menor, añadido a sí mismo la cantidad de veces que sea necesario, puede llegar a exceder cualquier área dada".

Este axioma viene a excluir de una manera efectiva los indivisibles o infinitésimos constantes que tanto habían sido discutidos en la época de Platón. Se trata esencialmente de lo mismo que el axioma de exhaución; al respecto, Arquímedes admite francamente que:

"Los geómetras anteriores también han utilizado este lema, ya que demostraron, usando precisamente este mismo lema, que los círculos están entre sí en la razón duplicada de sus diámetros, y que las esferas están entre sí en la razón triplicada de sus diámetros, así como que toda pirámide es un tercio del prisma que tiene su misma base y altura igual, y también demostraron que todo cono es un tercio del cilindro que tiene la misma base y la misma altura que el cono, suponiendo un cierto lema análogo al que hemos mencionado".

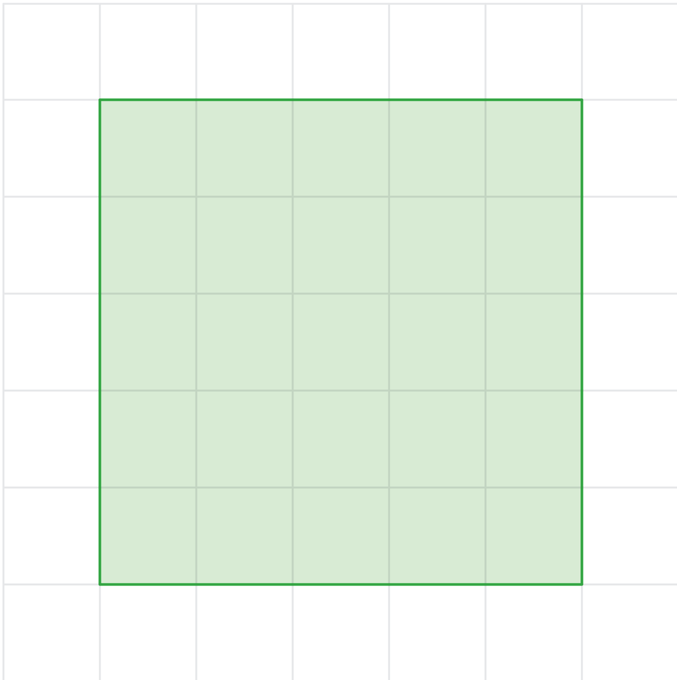


Los "geómetras anteriores" a los que hace referencia aquí Arquímedes incluirían probablemente a Eudoxo y sus sucesores.

Arquímedes resolvió, además, otros muchos problemas similares. Pero como la matemática griega fue un tanto estática, y así se conservó hasta el siglo XVII, no se elaboró bien el concepto de función y por ende no se les ocurrió ni a los griegos ni a los matemáticos posteriores pensar en la derivada.

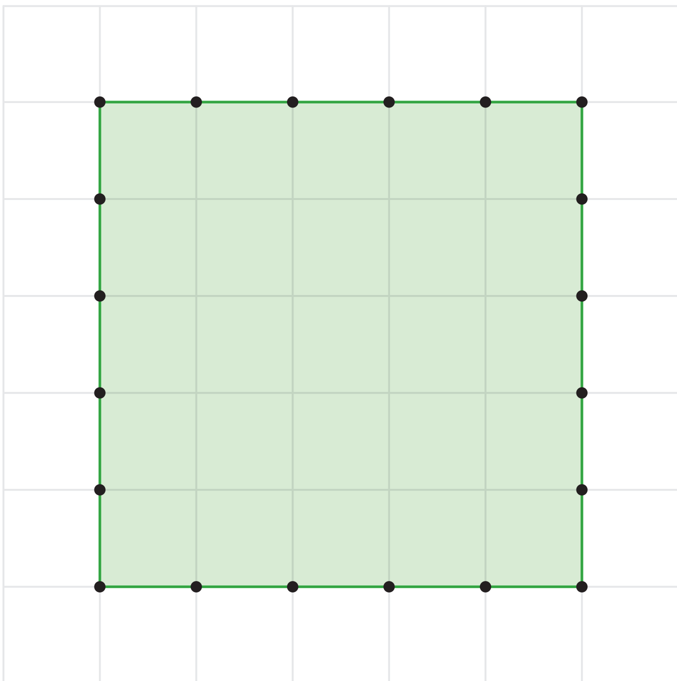
Hasta el siglo XVIII no se pusieron ambos conceptos en conexión. Entonces fue cuando Isaac Barrow, maestro de Isaac Newton en Cambridge, se dio cuenta, a su modo, de que la derivada de la función que nos da el área bajo una curva es precisamente la función misma que representa la curva. Esto, que se conoce hoy como *regla de Barrow* y también como *teorema fundamental del cálculo*, es verdaderamente una de las claves del análisis matemático moderno.

Hallar los valores posibles de las áreas de los cuadrados, con vértices en puntos de la cuadrícula, que puedan inscribirse en el cuadrado de la figura de 25 cm^2.

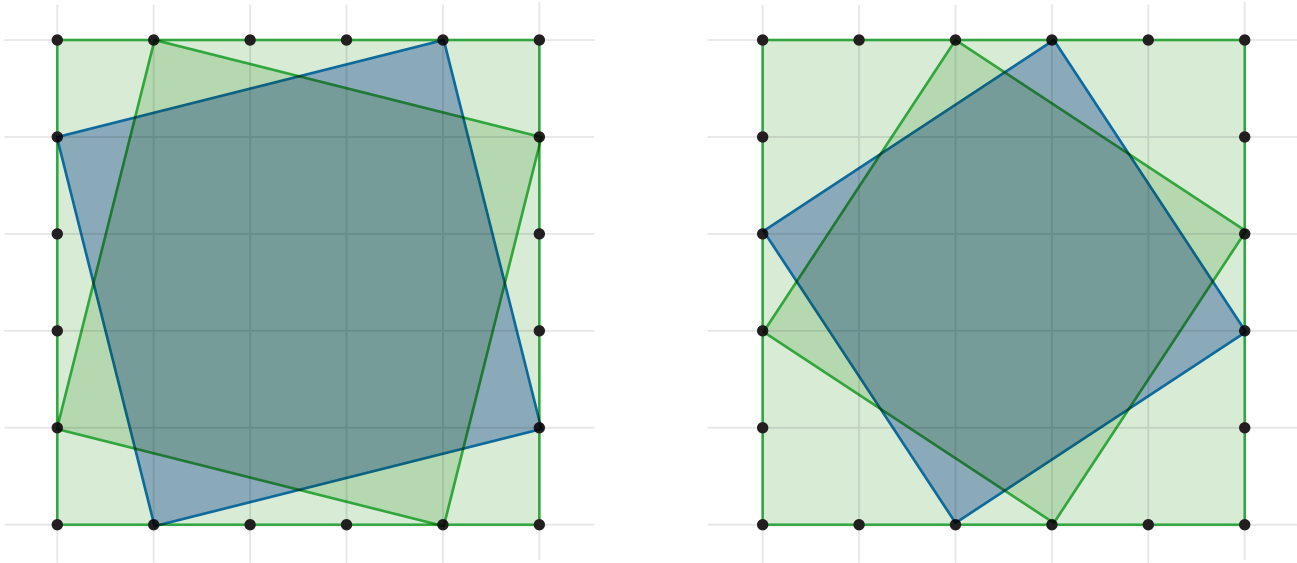


Solución

Los cuadrados que puedan inscribirse en las condiciones del problema, tendrán sus vértices en los puntos destacados en la figura a continuación:



Además del cuadrado completo, encontramos cuatro cuadrados que pueden ser inscriptos, dos de ellos de 17 cm^2 de área y otros dos de de 13 cm^2 de área, las que pueden calcularse usando la fórmula de Pick o el Teorema de Pitágoras.



Los valores posibles de las áreas son 25 cm^2, 17 cm^2 y 13 cm^2.