Leñitas Geométricas*

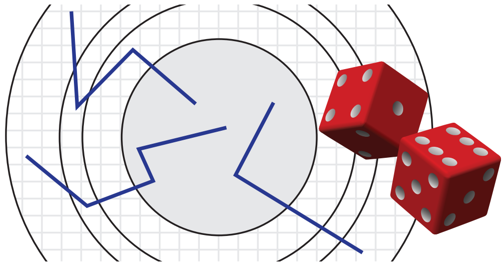
para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✈ Nº 14
21 de septiembre de 2023

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

El Método Montecarlo



Continúa de *Leñitas Geométricas* Nº 13, 5ª época, Estadística complementaria al método Montecarlo

Más sobre las principales leyes estadísticas

Generalización de la ley binomial. La ley binomial se refiere a la repetición de una experiencia en la que solamente son posibles dos eventualidades; por ejemplo, "cara o ceca", "bolilla blanca o bolilla negra" (alternativas simples). Se puede imaginar un modelo más complejo que suponga varias eventualidades.

Cuando una urna contiene bolillas de diversos colores en diferentes proporciones, existe en una extracción única una probabilidad referente a cada color. En una serie de N extracciones pueden aparecer numerosas combinaciones. Es posible calcular la probabilidad de cada una de ellas, que tiende a confundirse con la frecuencia observada cuando se repite la serie una gran cantidad de veces. Se define así una ley de distribución, llamada *ley de la alternativa generalizada*, que tiende hacia una forma límite, ley de Gauss con muchas variables, cuando el número de extracciones es muy grande.

Extracciones exhaustivas. En el esquema de la urna, que ilustra la ley de la alternativa simple o generalizada, se supone que después de cada extracción la bolilla se pone nuevamente en la urna y el contenido es

* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

cuidadosamente mezclado. De este modo, cada extracción es independiente de las que la precedieron. Se puede también suponer que la urna contiene una cantidad muy grande de bolillas y, entonces, es inútil reponer la que acaba de extraerse. La composición de la urna no se modifica sino de un modo insensible, después de cada operación. Estas extracciones se llaman *no exhaustivas*.

En una extracción exhaustiva de una urna que contiene una cantidad limitada de bolillas, el problema es diferente puesto que a cada operación la composición de la urna y, en consecuencia, la probabilidad relativa a cada color de bolilla se halla modificada. Por ejemplo, si la urna contiene 100 bolillas de las cuales 97 son blancas y 3 negras, la probabilidad de sacar dos veces seguidas una bolilla negra en una extracción no exhaustiva es:

$$\frac{3}{100}\times\frac{3}{100}=\left(\frac{3}{100}\right)=\frac{9}{10000};$$

en una extracción exhaustiva, esta no es sino:

$$\frac{3}{100}\times\frac{2}{99}\times\frac{6}{9900}.$$

En el primer caso, la probabilidad de sacar sucesivamente 4 bolillas negras es muy pequeña: exactamente

$$\left(\frac{3}{100}\right)^4$$

–un poco menos de 1 vez en 10 millones–, pero este suceso no es de ningún modo imposible. En el segundo caso, por el contrario, la probabilidad de sacar 4 bolillas negras de una urna que no contiene más que 3 es rigurosamente nula. El estudio de las extracciones exhaustivas conduce, naturalmente, a leyes más complicadas que la ley binomial.

Extracciones contagiadas. Puede imaginarse una urna en la que ciertas bolillas del mismo color, o de colores diferentes, estén pegadas unas a otras. La extracción de una de ellas implica la presentación simultánea de toda una serie de bolillas. Recíprocamente podemos suponer que, después de cada extracción, se repone en la urna no solamente la bolilla extraída, sino muchas otras del mismo color, lo cual acrecienta las posibilidades de este color en las extracciones ulteriores.

La expresión de "extracción contagiada" es explícita por sí misma y se concibe que el estudio de estos modelos pueda ser útil en la investigación sobre las leyes de propagación de las enfermedades. Asimismo, si la determinación del sexo, cuando se trata de un nacimiento simple, evoca el juego de cara o ceca, el razonamiento ya no es válido si se trata de mellizos. Estos son, con mucha mayor frecuencia, del mismo sexo; el sexo de los mellizos está ligado, del mismo modo que ciertas bolillas están unidas entre sí en una extracción contagiada.

Leyes Pearson. Las leyes Pearson pueden considerarse como una generalización de la ley de Gauss; constituyen 12 familias que toman formas diversas, a veces asimétricas y otras simétricas, algunas de las cuales no presentan otro interés que el teórico.

Transformación de la variable. Cuando la distribución de una variable no es normal, suele utilizarse una transformación funcional que torne normal esa operación. Por ejemplo, si la variable puede tomar todos los valores positivos de 0 a infinito, con una frecuencia máxima para x = 1 (curva asimétrica), la variable transformada, y = logaritmo de x, variará de menos infinito a más infinito con una frecuencia máxima para x = 0; su distribución podrá ser simétrica y acercarse a la ley de Gauss.

La función de transformación puede buscarse, ya sea por consideraciones teóricas o de manera empírica. La transformación de la variable no constituye, a menudo, sino un artificio de cálculo; para la interpretación de las conclusiones es necesario, naturalmente, volver a la variable inicial, cuya significación física es la única claramente definida.

Ley de la distribución de las medias. No se trata aquí de una forma particular de distribución sino de una ley absolutamente general que fija la manera como se distribuyen las medias de muestras, extraídas al azar, de una población dada.

Consideremos, por ejemplo, la distribución de los pesos de 1 000 cigarrillos. La dispersión está definida por la desviación típica, cuyo valor observado es de 0,06 g.. Se sabe ya (pues la distribución es gaussiana) que el 95 % de los cigarrillos –es decir, 950 entre 1 000– tiene pesos comprendidos entre el peso medio del conjunto (1,2 g), aumentado o disminuido en 2 veces la desviación típica, lo que da los límites:

$$1{,}2 - (0{,}06 \times 2) = 1{,}08 \text{ g}$$

$$1{,}2 + (0{,}06 \times 2) = 1{,}32 \text{ g}$$

Si se toma una cantidad de muestras de cigarrillos, habiéndose extraído al azar cada uno de los 4 cigarrillos de cada muestra conjunto, y se determina su peso medio (dividiendo por 4 el peso total de la muestra) se comprueba que estos pesos medios se dispersan menos que los pesos de los cigarrillos individuales.

Más exactamente, en una gran cantidad de muestras de 4 elementos, los pesos medios se hallan en la proporción de 95 %, comprendidos entre los límites:

$$1{,}2 - \left(\frac{0{,}06}{2}\right) \times 2 = 1{,}14 \text{ g}$$

y

$$1{,}2 + \left(\frac{0{,}06}{2}\right) \times 2 = 1{,}26 \text{ g.}$$

Si se toman muestras de 9 cigarrillos, los límites son:

$$1{,}2 - \left(\frac{0{,}06}{3}\right) \times 2 = 1{,}16 \text{ g}$$

y

$$1{,}2 + \left(\frac{0{,}06}{3}\right) \times 2 = 1{,}24 \text{ g.}$$

Para muestras de 100 cigarrillos, son estos:

$$1{,}2 - \left(\frac{0{,}06}{10}\right) \times 2 = 1{,}188 \text{ g}$$

y

$$1{,}2 + \left(\frac{0{,}06}{10}\right) \times 2 = 1{,}212 \text{ g.}$$

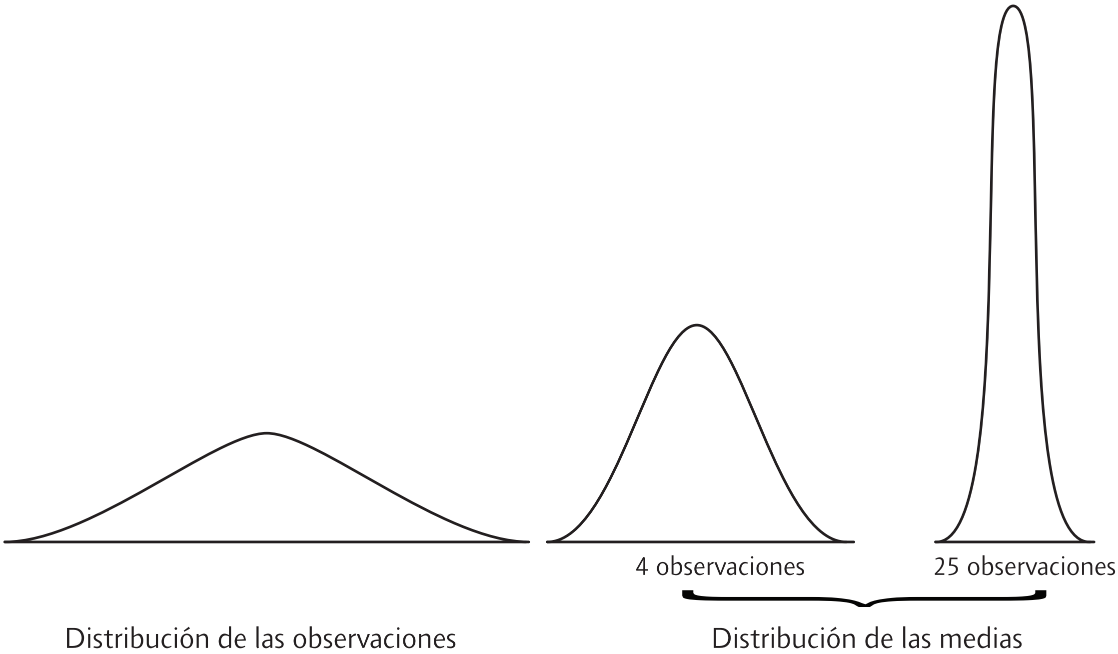
De un modo general, la variabilidad de media definida por su desviación típica disminuye inversamente a la raíz cuadrada del número n de unidades de la muestra. Se escribirá:

$$\text{desviación típica de la media } = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\text{desviación típica de una observación}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Al valor hallado por esta fórmula se lo llama propiamente *error estándar*, o *error típico*, y así lo designaremos en adelante. Esta ley es completamente general y tiene aplicación cualquiera sea la forma de distribución.

Por el contrario, la proporción de 95 % dentro de los límites distantes de 4 desviaciones típicas no se observa sino cuando la distribución es gaussiana, en cuyo caso la distribución de la media lo es también. A la distribución gaussiana se la suele llamar *distribución muestral*, en contraposición a la distribución de frecuencias, que es la de valores individuales en una muestra o en una población.

Corresponde señalar que aun cuando la distribución de las observaciones no siga exactamente la ley de Gauss, la de las medias tiende a acercársele, de un modo tanto más estrecho cuanto más numerosa sea la muestra (véase la figura siguiente).



La ley de las medias no es otra que la enunciada en la teoría de los errores, donde se demuestra que la precisión de las mediciones crece con la raíz cuadrada de su cantidad. Solamente es exacta cuando las muestras son extraídas al azar, del mismo modo que los errores experimentales tienen tendencia a compensarse y a seguir la ley de Gauss, en la medida en que conservan un carácter accidental.

Si se eligen los cigarrillos, no ya al azar sino en el orden en que se suceden a la salida de la máquina, la variabilidad de las muestras así constituidas puede ser muy diferente de aquella que permite calcular la ley de las medias.

Ley de la suma de las varianzas. Es también una ley completamente general, aplicable a cualquier forma de distribución. Cuando una variable es la suma de dos variables independientes, su varianza (cuadrado de la desviación típica) es igual a la suma de las varianzas de las dos variables. Se escribirá:

$$\sigma^2_{(x+y)} = \sigma^2_x + \sigma^2_y.$$

Por ejemplo, el peso de un cigarrillo es la suma de los pesos del tabaco (x) y del papel (y). Cada una de estas magnitudes presenta una variabilidad propia: las variaciones de los pesos del tabaco dependen de la regularidad del funcionamiento de los instrumentos de la máquina; las del papel están ligadas a la homogeneidad de la bobina utilizada.

El peso medio total registrado más arriba es 1,2 g y la desviación típica, 0,063. El peso medio del papel solamente es de alrededor de 0,040 g (40 mg) con desvíos de 10 % como máximo a un lado y otro de este peso, lo que corresponde a una desviación típica de alrededor de 0,002.

Resulta de esto que el peso medio del tabaco solo es:

$$1{,}200 \text{ g} - 0{,}040 \text{ g} = 1{,}160 \text{ g}.$$

con una desviación típica:

$$\sqrt{(0{,}063)^2 - (0{,}002)^2} \cong 0{,}063.$$

La desviación típica del peso total se confunde muy sensiblemente, en este caso particular, con la desviación típica del tabaco solo, ya que el papel de los cigarrillos interviene en proporción mínima (3 % del peso del cigarrillo).

La misma regla de la aditividad de las varianzas se aplica a la diferencia de dos variables independientes; esta propiedad se utiliza frecuentemente en los problemas de comparación de muestras.

Principios de interpretación

Población total y muestras. La asimilación de una distribución experimental a una ley estadística, donde la primera representa una aproximación o imagen más o menos grosera de la segunda, se justifica por la debida comprobación de las permanencias estadísticas.

Imaginemos que se extrae un segundo lote de 1 000 cigarrillos de la máquina ya citada, siendo las condiciones de la marcha rigurosamente iguales. La distribución, con los mismos intervalos de clasificación de los pesos individuales, estará representada por un gráfico un poco diferente del primero, pero tendrá con aquel un aire de parentesco evidente; en particular, la media y la desviación típica tendrán valores cercanos a los que han sido calculados anteriormente.

La misma comprobación podría aplicarse a todo lote de 1 000 elementos extraídos en condiciones análogas. Supongamos ahora que se juntan los distintos lotes –10, por ejemplo– en un conjunto único de 10 000. Las pequeñas irregularidades señaladas en los primeros gráficos se atenúan en el gráfico global. Por otro lado, con una gran cantidad de mediciones se puede adoptar intervalos de clasificación más pequeños; los lados superiores más pequeños de los rectángulos representativos tienden a configurar una curva continua; en el límite "cantidad infinitamente grande de mediciones e intervalos infinitamente pequeños– esta curva se hace muy regular.

La interpretación estadística postula pues generalmente que los datos observados constituyen una muestra extraída de una población infinitamente numerosa, llamada *población total* y caracterizada por la ley de distribución teórica.

El razonamiento anterior, que se refiere a una variable continua, se adapta del mismo modo a las magnitudes que no pueden tomar más que una cantidad limitada de valores. Por ejemplo, una serie de 100 jugadas de "cara o ceca" que ha dado 44 caras y 56 cecas constituye una muestra de una infinidad de jugadas, en las que las dos eventualidades poseen probabilidades rigurosamente iguales.

Constitución de las muestras. El estadístico opera normalmente con muestras que pueden, por otra parte, implicar una cantidad más o menos grande de mediciones; es importante, pues, reflexionar sobre el problema general del muestreo. Tomaremos nuevamente como ejemplo el peso de los cigarrillos y pondremos que se trata de formar muestras de 10 de estos, en una población total que comprenda 10 000 cigarrillos.

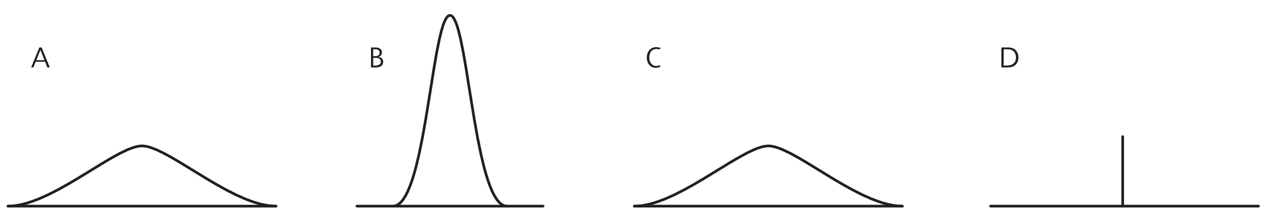
Muestreo al azar. Los 10 cigarrillos son "sacados a la suerte" en el conjunto de 10 000. Teóricamente, esta operación pude realizarse de la manera siguiente: cada cigarrillo se señala con un número de orden; los números se inscriben en 10 000 pedacitos de papel que se colocan en una bolsa y se mezclan cuidadosamente; los 10 cigarrillos por elegir están señalados por los 10 números que se sacan de la bolsa. Se concibe que una muestra constituida de tal modo presenta una imagen, aproximada sin duda, pero imparcial de la población total.

Muestreo dirigido. Puede imaginarse de varios tipos:

1. Los 10 cigarrillos se eligen de tal manera que todos tengan el mismo peso; la dispersión en el muestreo es nula y no nos da, acerca de la población total, mayores conocimientos que los que proporciona un solo cigarrillo.

2. Los 10 cigarrillos se eligen de modo que su peso medio tenga un valor determinado; así trabajará, por ejemplo, un comerciante al detalle, ansioso de satisfacer en forma equitativa su clientela. Es posible realizar esta operación de muchas maneras: se puede juntar 5 cigarrillos pesados y 5 livianos, formar una escala de 10 pesos crecientes repartidos simétricamente alrededor del peso medio general, o también compensar 9 cigarrillos livianos con un cigarrillo muy pesado.

Los esquemas que siguen ilustran la forma en que se distribuyen los pesos medios de 10 cigarrillos, elegidos con la ayuda de los métodos precedentes.



El gráfico A representa la dispersión de los pesos individuales en la población total. El gráfico B indica la dispersión de los pesos medios de 10 cigarrillos tomados al azar (error típico). En el gráfico C (todos los cigarrillos de la muestra tienen el mismo peso), la dispersión es la misma que para los cigarrillos individuales. En el gráfico D, por fin, el peso medio es invariable y su dispersión nula.

3. Entre estos casos límites se puede imaginar una cantidad infinita de muestreos dirigidos; por ejemplo, tomar los cigarrillos en su orden de salida de la máquina, o tomarlos de 2 en 2, de 3 en 3..., agruparlos según sean de orden par o impar, etcétera.

El hecho esencial que debe retenerse es que la distribución de las medias (o de cualquier otra característica) de una población de muestras está definida en la medida en que se ha precisado el modo de muestreo.

Los problemas de estimación. El muestreo "al azar" es el único que, en la mayoría de los casos, puede proporcionar las soluciones válidas para el problema que se presenta al estadístico: conociendo la muestra, representar lo más exactamente posible la población total. Si se supone que sigue la ley de Gauss, este problema se reduce a calcular, a partir de los datos, los valores probables de la media y de la desviación típica.

Estos valores, que son funciones de las observaciones, se llaman *estimaciones de las verdaderas características*, las que son siempre desconocidas; el físico mismo no conoce nunca la verdadera longitud de un objeto, sino la estimación que es dada por la media aritmética de muchas mediciones. La solución exacta de los problemas de estimación hace referencia a nociones matemáticas que no hallan lugar aquí. Nosotros solo daremos una ojeada en el caso de la ley de Gauss, que, como se sabe, es una de las más generales.

La mejor estimación de la media exacta es la media aritmética de las medidas y tiene tantas más probabilidades de estar cerca del verdadero valor cuanto mayor sea el número de observaciones (recordemos que el error típico de la media varía en razón inversa de la raíz cuadrada del número de medidas).

La estimación de la desviación típica es un poco más delicada. La primera idea consiste en adoptar, para la muestra, el método de cálculo válido para la población total: obtener los cuadrados de los desvíos de las medidas en relación con su media, dividir por el número de medidas y hallar la raíz cuadrada del resultado. De hecho, la aplicación de este método conduce a una subestimación sistemática de la desviación típica, y esto se acentúa cuánto más pequeña sea la muestra.

En efecto, la dispersión de la población total no está completamente representada por la dispersión "interior" de la muestra.

Debe distinguirse:

1. la dispersión de las medidas alrededor de su media aritmética (es más o menos diferente de la media exacta, y posee su dispersión propia);

2. la dispersión de esta media aritmética alrededor de la media exacta.

Para estimar correctamente la dispersión total, caracterizada por la desviación típica exacta σ, es necesario, pues, tener en cuenta no solamente la dispersión interior de la muestra definida por la expresión

$$\sqrt{\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{N}}$$

sino también la dispersión de las muestras de N, cuyo error típico es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Utilizando la propiedad de la suma de las varianzas, se escribirá que $\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{N}$ constituye una estimación no de σ^2 (varianza de una medida), sino de $\sigma^2-\frac{\sigma^2}{N}$ (varianza de una medida menos la varianza de la media de N medidas), es decir, de

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2.$$

En otros términos, la estimación correcta de σ^2 no es $\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{N}$ sino $\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{N-1}$, y la estimación correcta de σ es

$$\sqrt{\frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{N-1}},$$

fórmula analizada anteriormente.

Sugerencias metodológicas en distribuciones bidimensionales

Las distribuciones bidimensionales pueden, y deben, plantearse de forma muy intuitiva. La fórmula de la covarianza, primero, y la de la correlación, después, son absolutamente razonables, como lo proponemos más adelante. No creemos conveniente demostrar la expresión de la recta de regresión por el método de los mínimos cuadrados, aunque sí nos parece necesario referimos al método que se utiliza para su obtención. Llamamos *recta de regresión*, sin más, a la recta de regresión de Y sobre X pues nos parece inconveniente a este nivel entrar en detalles respecto de las dos rectas de regresión.

Si se trabaja a fondo en estadística, el alumno tendrá que realizar infinidad de cálculos. Creemos muy deseable que sepa valerse eficazmente de la calculadora, y mejor si tiene tratamiento estadístico. Por eso, a la hora de darles nombre a los parámetros hemos optado por la nomenclatura, irregular, de $\bar{x}$ para la media y σ para la desviación típica, que es la que se suele utilizar en la mayoría de las calculadoras. (En rigor, los parámetros media y desviación típica deberían ser μ y σ para poblaciones; m (o, acaso, $\bar{x}$) y s para muestras. Pero como en este nivel no ha sido necesario distinguir entre parámetros poblacionales y muestrales, no hemos creído necesario el rigor en la nomenclatura, y sí preferible la coincidencia con la terminología de las calculadoras).

Problema. ¿Te animás a calcular cuántos, aproximadamente, de los 5 000 millones de habitantes de la Tierra cumplen años el 29 de febrero, junto con su padre y su abuelo (tanto si estos viven como si no)? ¿Qué probabilidad hay de que en la Tierra haya al menos 20 casos de estos?

Resolución del problema. Cada cuatro años hay $3 \times 365 + 366 = 1461$ días. La probabilidad de que una persona nazca un 29 de febrero es, pues, $\dfrac{1}{1461}$.

La probabilidad de que, al escoger una persona al azar, esta cumpla que tanto ella como su padre y su abuelo paterno hayan nacido ese día es

$$\left(\frac{1}{1461}\right)^3 = \frac{1}{3118535181}.$$

La probabilidad de que entre 5 000 millones de personas haya K de ellas que cumplan esa triple coincidencia sigue una distribución binomial:

$$B\left(5000000000 \cdot \frac{1}{3118535181}\right).$$

Como $np = 5000000000 \cdot \dfrac{1}{3118535181} = 1{,}16,$

esto significa que es probable que en el mundo haya 1 o 2 personas que cumplan esa propiedad. Con más exactitud:

La probabilidad de que no haya nadie es $(1 - p)n = 0{,}2$.

Por tanto, la probabilidad de que haya alguien es, aproximadamente, 0,8. Esta binomial no la podemos aproximar a una normal pues np es notablemente menor que 5. Sin embargo, la cantidad pedida en el enunciado, 20 o más, es tan grande comprada con la media esperada (1,6) que podemos asegurar que la probabilidad es prácticamente nula.

Materiales para presentar en el aula

Resuelva por sentido común

Posiblemente nunca hayamos oído hablar de la correlación. O quizá sí. En cualquier caso, podremos entender y resolver lo que sigue.

- Si lanzamos una piedra hacia arriba, llegara tanto más alto cuanto más fuerte la lancemos. Y existe una fórmula que nos permite calcular, exactamente, la altura alcanzada en función de la velocidad con que se lanza. Es una relación funcional.
- Las personas, en general, pesan más cuanto más altas son. Pero no se podría dar una fórmula que permitiera obtener el peso de cualquier persona conociendo su estatura. La relación entre las variables estatura-peso es estadística. Se dice que hay una correlación entre ellas.

- También hay correlación entre la distancia a la que un jugador de baloncesto se coloca de la canasta y el número de encestes que consigue. Pero en este caso, al contrario que en el anterior, es correlación negativa: a mayor distancia menor número de encestes.

En cada uno de los siguientes casos debe decir si, entre las dos variables que se citan, hay relación funcional o relación estadística (correlación) y, en este último caso, indicar si es positiva o negativa.

- Familias: estatura media de los padres - estatura media de los hijos.
- Temperatura a la que calentamos una barra de hierro - longitud alcanzada.
- Entre los países del mundo: volumen de exportación - volumen de importación con España.
- Entre los países del mundo: índice de mortalidad infantil - número de médicos por cada 1 000 habitantes.
- Kilovatios hora (kW.h) consumidos en cada casa durante enero - costo de la factura de luz.
- Personas que viven en cada casa - costo de la factura de luz.
- Equipos de fútbol: lugar que ocupan al finalizar la liga - número de partidos perdidos.
- Equipos de fútbol: lugar que ocupan al finalizar la liga - número de partidos ganados.

Piense por su cuenta y anote en su cuaderno nuevos casos de dependencia estadística y diga en cada caso si la correlación es positiva o negativa.

Distribuciones bidimensionales

¿Cómo poner de manifiesto de forma clara la relación, más o menos fuerte, que hay entre los valores de dos variables observadas sobre los mismos individuos?

A los 12 primeros alumnos (por orden de lista) de un grupo de 4° del bachillerato les tomamos las notas de los últimos exámenes en Matemática, Física y Filosofía (cuadro siguiente).

Alumno	Mat.	Fis.	Filos.
a	2	1	2
b	3	3	5
c	4	2	7
d	4	4	8
e	5	4	5
f	6	4	3
g	6	6	4
h	7	4	6
i	7	6	7
j	8	7	5
k	10	9	5
l	10	10	9

Si observamos las notas de Matemática y Física apreciaremos una muy estrecha relación entre ellas. Tapemos ahora con el bolígrafo la columna de las notas de Física y comparemos las de Matemática con las de Filosofía: parece ser que hay una cierta relación, pero mucho menor que la anterior. ¿Se podrán medir valorar cuantitativamente estas relaciones?

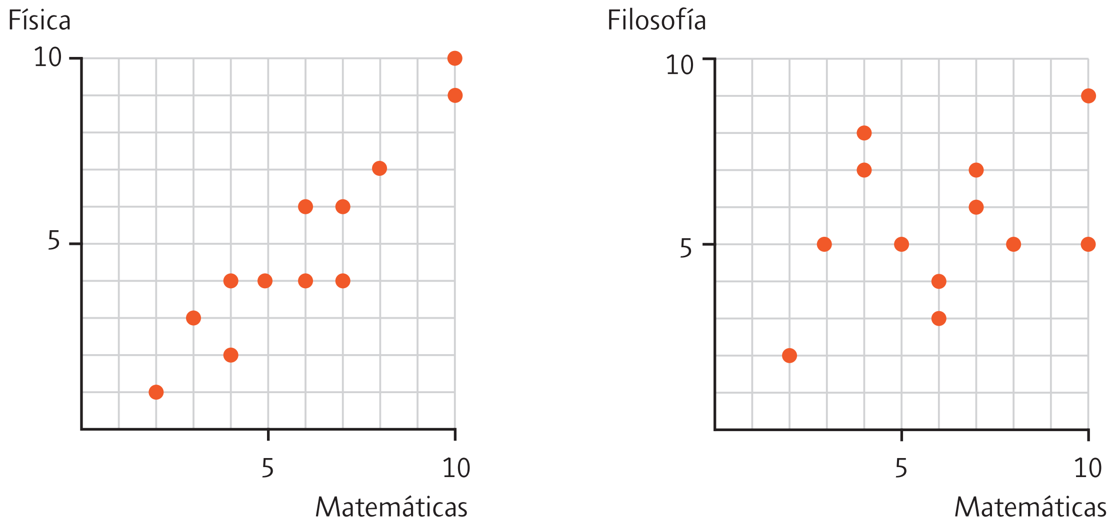
Representación gráfica

Las dos distribuciones bidimensionales anteriores.

Notas de Matemática - Notas de Física

Notas de Matemática - Notas de Filosofía

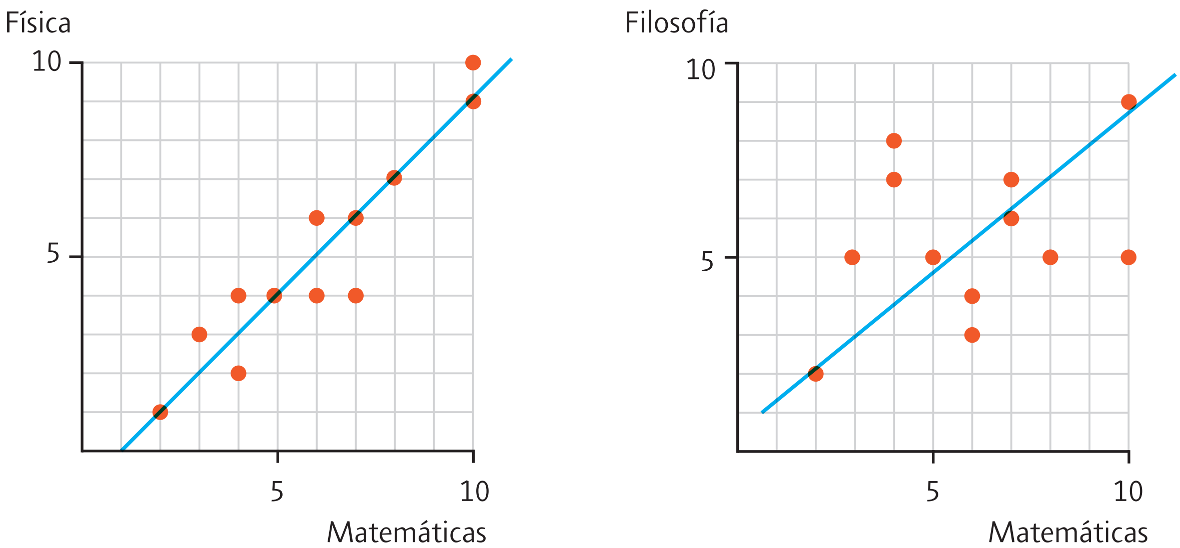
pueden representarse gráficamente del siguiente modo:



Observemos que, en ambas, a cada alumno le corresponden dos valores que se toman, respectivamente, como abscisa y ordenada de un punto. Así, cada alumno viene representado por un punto. Todos ellos forman una nube de puntos.

De este modo podemos ver que en la primera distribución (Matemática - Física) los puntos están más alineados y, por tanto, la relación entre las variables (correlación) es más fuerte. En la segunda se ve una correlación débil.

Este efecto se percibe mejor si trazamos (como se muestra abajo) una recta que se amolde a la nube de puntos, que se ajuste a ella lo mejor posible. Esta recta se llama *recta de regresión*.



Estas rectas, trazadas por el momento a ojo, deben pasar por el punto (x, y), es decir, por un punto cuya abscisa es la media de la primera variable y cuya ordenada es la media de la segunda. A este punto se le llama *centro de gravedad de la distribución*:

Media de las notas de Matemática: 6

Media de las notas de Física: 5

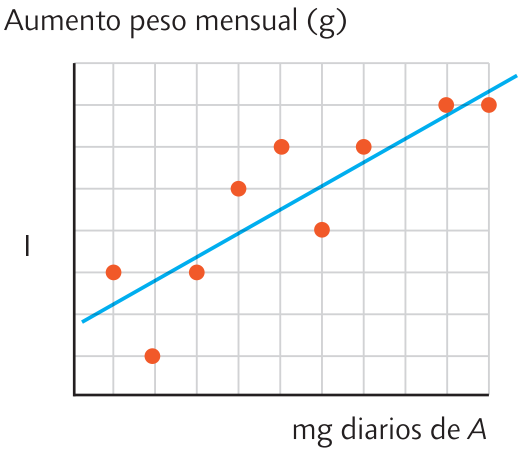
Media de las notas de Filosofía: 5,5

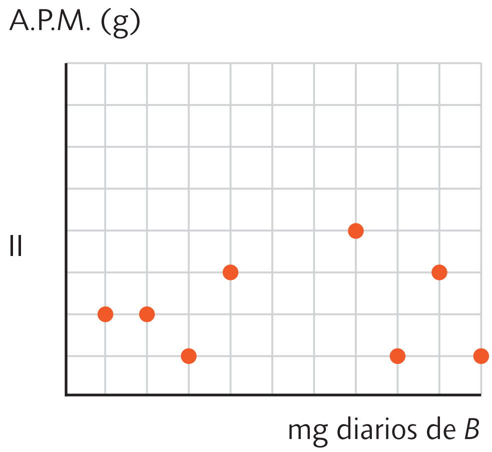
Por tanto, hemos procurado que la primera recta pase por el punto (6; 5) y la segunda, por el punto (6; 5,5).

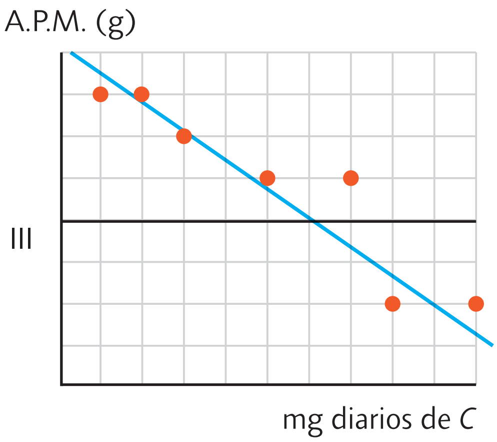
Signo de la correlación

Realizamos un experimento que consiste en suministrar a cada una de 10 ratas una dosis diaria de 1 mg, 2 mg, ..., 10 mg, respectivamente, de un cierto fármaco *A*. Y calculamos el aumento de peso de cada rata al cabo de un mes.

Realizamos otro experimento idéntico con otras 10 ratas y otro fármaco *B*. Y un tercer experimento con otras 10 ratas y otro fármaco *C*. Damos a continuación los resultados gráficamente:







A la vista de las gráficas nos inclinamos a pensar que *A* favorece el engorde de las ratas, *B* no influye y *C* es perjudicial. La correlación de la gráfica I es positiva y la de la gráfica III, negativa; de igual modo que las pendientes de las rectas de regresión correspondientes. En la gráfica II, sin embargo, la nube de puntos es amorfa y no sugiere ninguna recta: no hay correlación entre las variables (se dice que son *incorreladas*).

Definiciones

Tenemos un conjunto de n individuos. A cada uno de ellos se le toma dos medidas, es decir, se averigua qué valores toman, en ellos, dos variables x e y. Se obtiene así un conjunto de pares de valores.

$$(x_1, y_1);\ (x_2, y_2);\ (x_3, y_3);\ \dots;\ (x_i, y_i);\ \dots;\ (x_n, y_n).$$

A este conjunto se le llama *distribución bidimensional*. Si cada par de valores lo tomamos como las coordenadas de un punto, la representación de todos ellos sobre un diagrama cartesiano se llama *nube de puntos* o *diagrama de dispersión*.

Sobre la nube de puntos puede trazarse una recta que se ajuste a ellos lo mejor posible. Se llama *recta de regresión* y pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, llamado *centro de gravedad de la distribución*.

La nube de puntos nos permitirá apreciar la mayor o menor relación entre las dos variables (*correlación*) y mejor si va acompañada por la recta de regresión. La correlación será positiva o negativa según lo sea la pendiente de la recta.

¿Cómo resolver problemas de distribuciones bidimensionales?

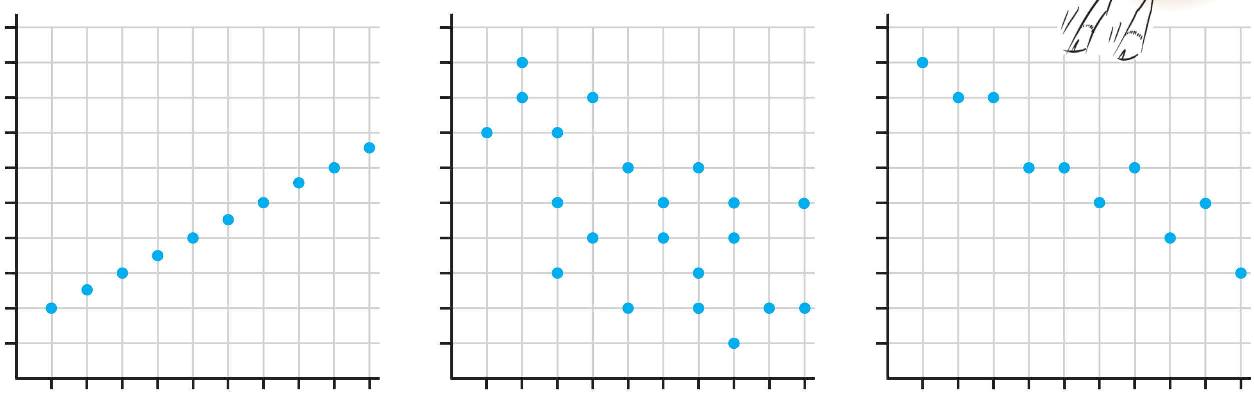
La que sigue es la tabla de clasificación del año 1987 de los equipos de fútbol correspondientes a la Segunda División B después de 41 jornadas. Solo aparecen los 15 primeros equipos de los 22 que formaban el grupo.

Clasificación	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos
1. Lérida	23	11	7
2. Tenerife	20	17	4
3. Granada	22	12	7
4. Salamanca	17	19	5
5. Burgos	18	16	7
6. Éibar	18	11	12
7. Pontevedra	18	9	14
8. Linense	18	6	17
9. Córdoba	15	11	15
10. Alcoyano	16	7	18
11. Lugo	14	11	16
12. Alcira	12	15	14
13. Orense	13	12	16
14. Gandia	12	14	15
15. At. Madrileño	10	17	14

- Represente sobre papel cuadriculado la nube de puntos correspondiente a la distribución bidimensional: Puesto en la clasificación - Partidos ganados.
- Trace a ojo la recta de regresión y diga si la correlación es positiva o negativa.
- Realice las mismas tareas para la distribución: Puesto en la clasificación - Partidos perdidos.
- Haga lo mismo para la distribución: Puesto en la clasificación - Partidos empatados.

Ejercicios de entrenamiento

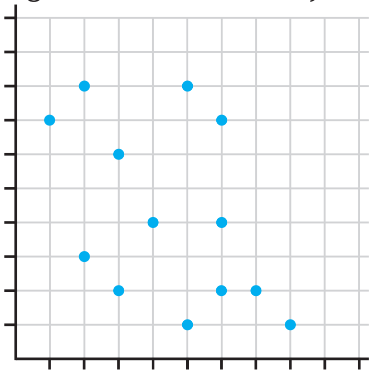
1. Las correlaciones correspondientes a las tres distribuciones graficadas abajo son, no respectivamente, –0,63; 1 y –0,94. Mírelas detenidamente y asigne a cada cual su valor.

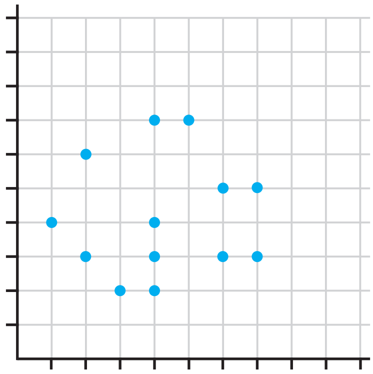


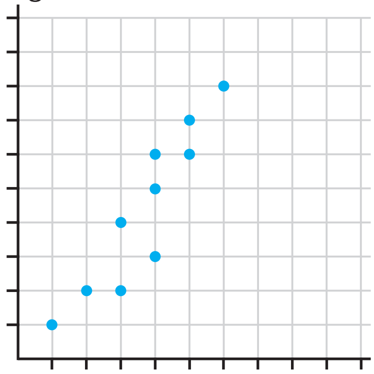
Solución:

1; –0,63 y –0,94, respectivamente.

2. Asigne los valores –0,46; 0 y 0,92 a las correlaciones de las distribuciones siguientes:







Solución:

–0,46; 0 y 0,9, respectivamente.

3. Los siguientes 15 países son los que mantienen relaciones comerciales más fuertes con España, bien por importación, bien por exportación:

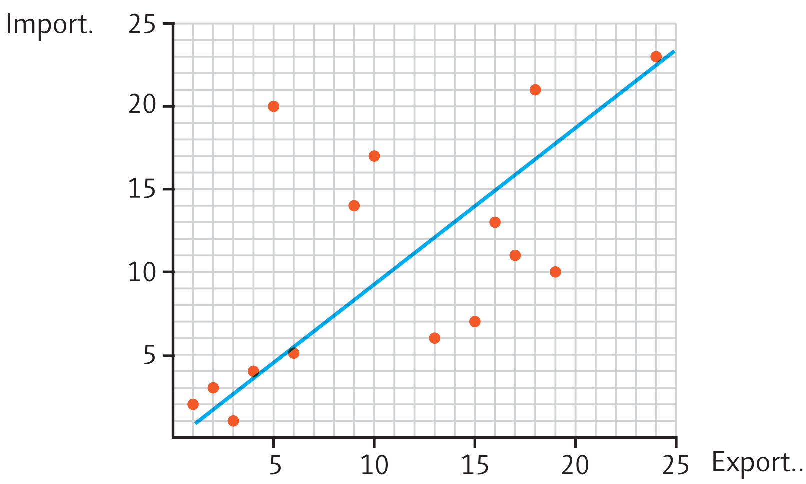
	EE.UU.	Alemania	Francia	R. Unido	México	Italia	Japón	Irán	Países Bajos	Bélgica	Suiza	Rusia	Suecia	Arabia Saudita	Venezuela
Exportan a España	1	2	3	4	5	6	9	10	13	15	16	17	18	19	24
Importan de España	2	3	1	4	20	5	14	17	6	7	13	11	21	10	23

Los números de la primera fila significan el lugar que ocupan los distintos países (*ranking* mundial) respecto de su exportación a España. Estados Unidos (EE. UU.) (1) es el país que más exporta a España. Japón (9) ocupa el noveno lugar, etc. La segunda fila expresa el lugar que ocupan por su nivel de importación de España. Francia (1) es el país que más importa de España. Arabia Saudita (19, 10) ocupa el lugar 19°, por lo que lo que le vende a España, y el lugar 10° por lo que le compra.

Represente la nube de puntos y trace la recta de regresión. ¿Qué podría decir de la correlación: positiva, negativa, grande, mediana, casi nula? ¿Cuál de los siguientes valores le parece el más adecuado para ella: –0,98; –0,7; –0,3; 0,2; 0,7; 0,99?

Solución:

El valor más adecuado a la correlación es 0,7 (véase la figura de abajo).



4. En las siguientes distribuciones bidimensionales referentes a los alumnos de su clase, estime si la correlación será positiva o negativa, muy fuerte, fuerte, débil o casi nula.

   a) Medida de un palmo - medida del pie;

   b) Horas semanales de estudio - horas semanales viendo la televisión;

   c) Horas semanales de estudio - suspensos en la última evaluación;

   d) Estatura - peso;

   e) Peso - nota en matemáticas.

   Solución:

   a) Positiva y fuerte o muy fuerte; b) Negativa y débil; c) Negativa y fuerte; d) Positiva y muy fuerte; e) Casi nula.

5. Explique, análogamente al ejercicio anterior, cómo será la correlación en las siguientes distribuciones bidimensionales:

   a) Extensión de un país en km^2 - número de habitantes;

   b) Índice de mortalidad infantil - número de médicos por 1 000 habitantes;

   c) Profundidad en el mar - presión del agua.

   Solución:

   a) Positiva y débil; b) Negativa y fuerte; c) Positiva y muy fuerte.

6. Para una muestra de 20 hombres que fallecieron de muerte natural se ha anotado el número aproximado de cigarrillos diarios que fumaba cada uno de ellos, por término medio, y la edad de fallecimiento:

Cigarrillos	0	0	0	0	0	5	5	10	10	15	15	15	15	20	20	20	20	25	30
Fallecimiento	77	61	84	72	46	77	73	48	74	55	72	49	66	47	64	52	73	46	57

   ¿Encuentra alguna relación entre las dos variables?

   Solución:

   A mayor número de cigarrillos, menor longevidad.

FUNCIONES IMPORTANTES

Una aventura histórica al análisis complejo

Los primeros descubrimientos de Gauss

Los matemáticos más importantes de la época de la Revolución francesa fueron, casi sin excepción, franceses, pero coincidiendo con los comienzos del siglo XIX Francia tuvo que compartir de nuevo los honores del liderazgo con otros países. El matemático más grande de la primera mitad del siglo XIX, y quizá de todos los tiempos, fue tan decididamente alemán que nunca viajó fuera de Alemania, ni siquiera en lo que llamaríamos de visita. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un verdadero niño prodigio, a diferencia de cualquiera de los matemáticos que hemos estudiado anteriormente.

Su padre era un obrero en Brunswick, obstinado en sus puntos de vista, que intentó evitar que su hijo recibiera una educación adecuada; pero en cambio su madre, que tampoco había recibido ningún tipo de educación, animó siempre a su hijo en sus estudios, y más tarde se mostró muy orgullosa de sus logros, hasta su muerte a la edad de 97 años. De niño, Gauss asistió a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con objeto de mantener la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta tarea, colocaran su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente, Carl colocó su pizarra sobre la mesa, diciendo: "Ya está"; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco.

Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5 050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss. Evidentemente, el muchachito de diez años había hecho el cálculo mental de sumar la progresión aritmética 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente, utilizando la fórmula $(m + 1)2$. A los quince años Gauss comenzó su enseñanza media en Brunswick, gracias a la ayuda del duque de Brunswick; y en 1795, gozando siempre de la protección del duque, entró en la Universidad de Gotinga.

Gauss estaba entonces indeciso, dudando entre hacerse filólogo o matemático, a pesar de que había inventado ya, y justificado, el método de mínimos cuadrados, una década antes de que Adrien-Marie Legendre publicara el mismo artificio. El 30 de marzo de 1796 se decidió al fin por la matemática, porque ese mismo día, cuando le faltaba aún un mes para cumplir los 19 años, hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2000 años se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados.

El crítico día de 1796 que acabamos de mencionar, Gauss consiguió construir de acuerdo con las normas euclídeas el polígono regular de 17 lados. Y ese mismo día comenzó a llevar un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos; y el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados.

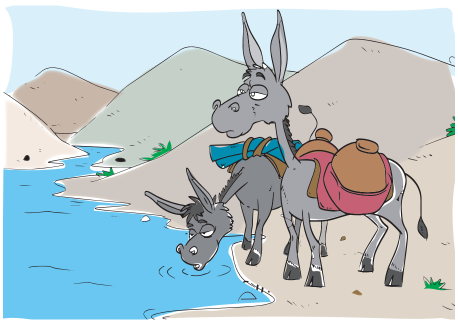
El 10 de julio de 1796 Gauss confiaba a su diario el descubrimiento de que todo entero positivo es la suma de tres números triangulares como máximo. Este diario, que solamente consta de 19 páginas, es probablemente el más precioso documento de toda la historia de la matemática, en el que están registrados brevemente 146 resultados; el último de los cuales lleva la fecha 9 de julio de 1814. Por medio de este diario es posible comprobar que Gauss fue el primero en obtener algunos hallazgos respecto de los que más tarde hubo disputas de prioridad. Asimismo, y esto es mucho más importante, permite seguirle la pista al desarrollo de su genio, dado que algunos de sus pensamientos más originales no se publicaron durante su vida.

Dicho sea de paso, su escasa disposición a publicar es únicamente comparable con la de uno de sus rivales modernos en cuanto a fama matemática, Isaac Newton. (El otro, Leonhard Euler, no se le parece en absoluto en este aspecto, como hemos visto). El diario de Gauss permaneció escondido entre los papeles de la familia hasta 1898, cuando se lo descubrió en posesión de un nieto suyo en Hamelín.

En 1901 se publicó su contenido, encargándose de ello el matemático Felix Klein, en un volumen con el que se celebraba el sesquicentenario de la Real Sociedad Científica de Gotinga y el nieto en cuestión cedió el diario para que se conservase en los archivos de Gauss, que se encuentran principalmente en Brunswick y en Gotinga.

La representación gráfica de los números complejos

El sello de Gauss llevaba escrito el lema: *pauca sed matura* ("poco pero maduro") y lo cierto es que su mente estaba tan rebosante de ideas originales que no tenía materialmente tiempo de verlas madurar a todas ellas hasta el punto de perfección en que insistía antes de publicarlas. Sin embargo, su descubrimiento decisivo del 30 de marzo de 1796 sí lo anunció públicamente en una revista literaria; siempre estuvo tan orgulloso de él que, a



imitación de Arquímedes, antiguo rival en talla matemática, expresó el deseo de que se grabara un polígono regular de 17 lados sobre su tumba.

Este deseo no se cumplió nunca porque el obtuso cantero encargado de tallar la lápida se negó en redondo, insistiendo en que la figura resultante no se distinguiría de una circunferencia, pero al menos en el monumento a Gauss en Brunswick puede verse tallado realmente el egregio polígono.

Durante breves períodos de tiempo Gauss abandonaba Gotinga para asistir a la Universidad de Helmstedt, y fue en esta última en la que recibió su doctorado en 1798. La tesis, publicada allí en 1799, lleva en latín el aplastante título siguiente: *Nueva demostración del teorema que afirma que toda función algebraica racional y entera de una variable puede resolverse en factores reales de primero o de segundo grado*.

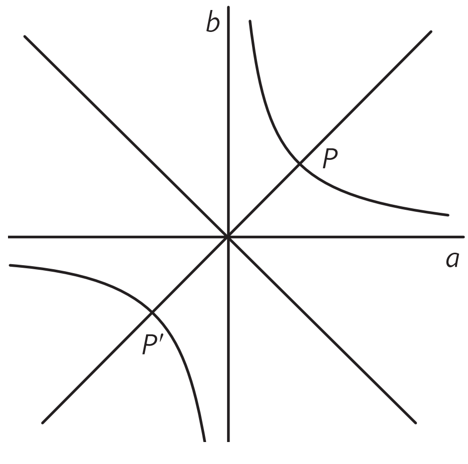
Este teorema, al que se referiría Gauss más tarde con el nombre de *teorema fundamental del álgebra*, es esencialmente la proposición conocida en Francia como *teorema de d'Alembert*, pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo algunos de Leonhard Euler y de Joseph-Louis Lagrange, eran incorrectos. La representación gráfica de los números complejos había sido descubierta ya en 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) y publicada en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798; pero lo cierto es que la obra de Wessel pasó prácticamente desapercibida, por lo que el plano de los números complejos se suele denominar hoy como *plano de Gauss*, a pesar de que este no publicó sus ideas al respecto hasta unos 30 años más tarde. Desde la época de Albert Girard era bien conocido que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta. John Wallis había llegado a sugerir incluso que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales.

Sin embargo, sorprendentemente, nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la obvia etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un número complejo $a + bi$ como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano, al cual estaría asociado dicho número complejo. El hecho de cubrir esta simple etapa hizo sentirse a los matemáticos mucho más cómodos con los números imaginarios, ya que ahora podían visualizarse en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa. Ver es creer, bien cierto es, y las viejas ideas acerca de la no existencia de los números imaginarios fueron abandonadas por casi todos los matemáticos.

El teorema fundamental del álgebra

La tesis doctoral de Gauss venía a demostrar que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. No podemos entrar aquí en los detalles de la demostración, pero una ilustración indicará por lo menos las líneas generales que seguían las ideas de Gauss.

Vamos a resolver la ecuación $z^2 - 4i = 0$ gráficamente, demostrando para ello que hay un valor complejo $z = a + bi$ que satisface la ecuación. Sustituyendo en ella z por $a + bi$ y separando las partes reales e imaginarias, nos queda que ha de ser $a^2 - b^2 = 0$ y $ab - 2 = 0$. Interpretando a y b como variables y representando estas dos ecuaciones en un mismo sistema de ejes de coordenadas, en abscisas la parte real a y en ordenadas la parte imaginaria pura b, obtenemos dos curvas: la primera consiste en el par de rectas $a + b = 0$ y $a - b = 0$, y la segunda es la hipérbola equilátera $ab = 2$.



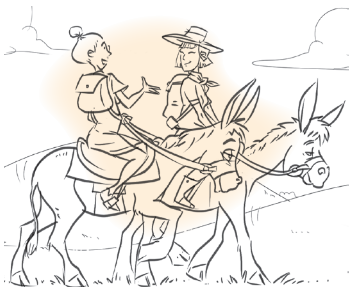
Está claro, por la representación gráfica de arriba, que las dos curvas se cortan en un punto *P* en el primer cuadrante (e, incidentalmente, en otro punto *P*′ en el tercero).

Obsérvese en particular que una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones $\theta = 1\pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$, y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones $\theta = 0\pi/4$ y $\theta = 2\pi/4$; el punto de intersección está entre las dos direcciones $e = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Las coordenadas *a* y *b* de este punto de intersección son las partes real e imaginaria del número complejo que es solución de la ecuación $z^2 - 4i = 0$. Si nuestra ecuación polinómica original hubiera sido de tercer grado en vez de segundo grado, habría habido una rama de una de las dos curvas aproximándose a las direcciones $\theta = 1\pi/6$ y $\theta = 3\pi/6$, y la otra curva se aproximaría a las direcciones $\theta = 0\pi/6$ y $e\theta = 2\pi/6$. Las ramas son continuas en todos los casos, por lo tanto, tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$.

Para una ecuación de grado *n* habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas $\theta = 1\pi/2n$ y $\theta = 3\pi/2n$, mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones asintóticas $\theta = 0\pi/2n$ y $\theta = 2\pi/2n$, y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{n}$. Asimismo, las coordenadas *a* y *b* del punto de intersección serán de nuevo las partes real e imaginaria de un número complejo que es una raíz de la ecuación. Vemos pues así que, sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, debe tener al menos una raíz compleja. A partir de este resultado se puede demostrar ya fácilmente el teorema de la tesis de Gauss de que un polinomio cualquiera se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos.

La demostración del teorema fundamental del álgebra dada por Gauss en su tesis se basa en parte en consideraciones geométricas, lo que no resultaba del todo satisfactorio. Años más tarde, en 1 816, publicó dos nuevas demostraciones, así como otra, en 1850, pugnando siempre por encontrar una demostración puramente algebraica.



La teoría de funciones de variable compleja

A veces se dice de Gauss que fue el último matemático que conoció toda la matemática de su tiempo. Una generalización como esta corre el grave riesgo de ser inexacta y también se ha aplicado, de hecho, a algunos matemáticos posteriores, pero sí sirve en nuestro caso concreto para subrayar la gran amplitud de intereses que mostró Gauss.

En 1809 publicó una exposición de sus métodos astronómicos en un libro cuyo título es *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, donde se refiere a su descubrimiento del principio de mínimos cuadrados. Legendre creía haber sido el único inventor de este principio, por lo que prácticamente llegó a acusar a Gauss de plagio, compartiendo su indignación con Carl Gustav Jacobi. Nosotros sabemos hoy que Gauss tenía razón en atribuirse la prioridad del descubrimiento, pero uno no puede menos que pensar que hubiera sido deseable que publicara sus descubrimientos más puntualmente o que fuera más comprensivo con los que hicieron más tarde los mismos descubrimientos, al comunicar los suyos.

Gauss, lo mismo que Newton, intentaba ser escrupulosamente justo con los demás, pero a veces se mostraba muy poco ecuánime con la obra de sus colegas, especialmente con la de Augustin Louis Cauchy, su más próximo rival en talla matemática y a cuya obra no se refirió ni una sola vez en su vida.

Cauchy era completamente distinto a Gauss en un aspecto concreto: tan pronto como tenía algo terminado lo enviaba a publicar. Quizá sea esta una de las razones por las que la característica principal de la matemática del siglo XIX, la de la introducción del rigor, se atribuya más bien a Cauchy que a Gauss, a pesar del alto nivel de precisión lógica que este se impuso a sí mismo. Posiblemente también tuvo gran importancia en este sentido la tradición pedagógica de la École Polytechnique, puesto que Cauchy, a quien le gustaba enseñar, tenía un carácter pedagogo mucho más desarrollado que Gauss, que lo detestaba. Gauss tenía escritos aquí y allá, en su diario o en notas, esbozos de teoremas sobre funciones de variable compleja, pero era Cauchy quien llenaba las páginas del *Journal de l'École Polytechnique* y de los *Comptes rendus de l'Académie des sciences* de memorias cada vez más largas. Las había sobre una gran variedad de temas, pero especialmente sobre la teoría de funciones de variable compleja, rama de la matemática de la que podemos considerar a Cauchy, desde 1814 en adelante, como el verdadero fundador.

En 1806, Jean-Robert Argand (1768-1822), de Ginebra, había publicado una exposición de la representación gráfica de los números complejos y a pesar de que, al principio, esta obra pasó casi tan desapercibida como la de Wessel, a finales de la segunda década del siglo XIX casi toda Europa estaba ya familiarizada, gracias a Cauchy principalmente, no solo con la representación de Wessel-Argand-Gauss para los números complejos, sino también con las propiedades fundamentales de las funciones de variable compleja. Durante el siglo XVIII se habían presentado ocasionalmente problemas sobre variables complejas con Euler y d'Alembert, en conexión con problemas físicos, pero a partir de ahora se iban a convertir en una parte de la matemática pura.

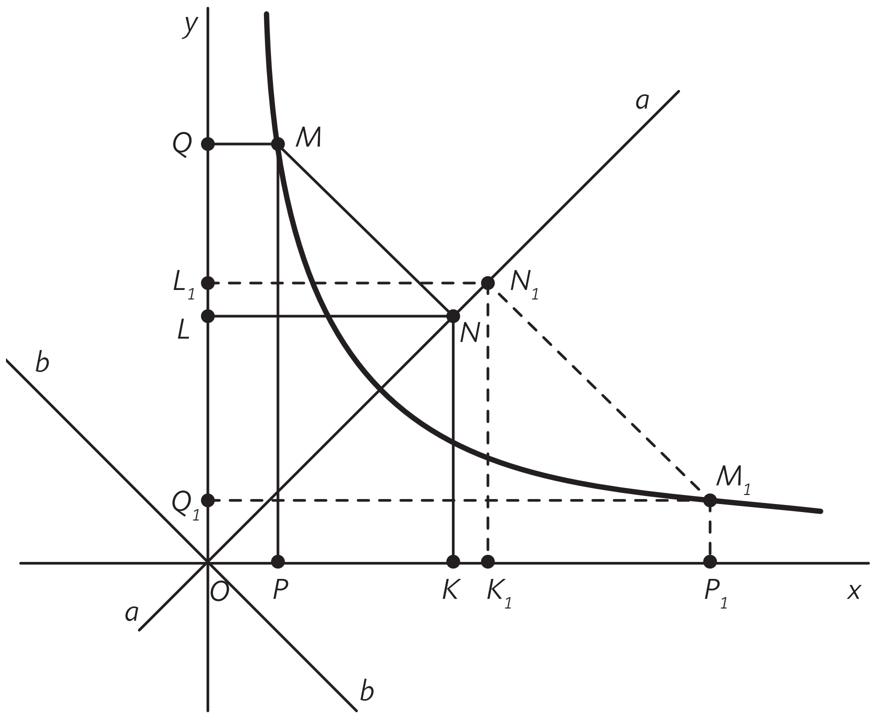
Dado que ya se precisaban dos dimensiones para representar gráficamente la variable independiente, se necesitarían cuatro dimensiones para representar gráficamente una relación funcional entre dos variables complejas $w = f(z)$. Inevitablemente, pues, la teoría de funciones de variable compleja implica un grado de abstracción y de complejidad más alto que el de la teoría de funciones de variable real.

Las definiciones y las reglas de diferenciación, por ejemplo, no pueden transferirse fácilmente del caso real al caso complejo, y en particular la derivada, en el segundo caso, no puede considerarse ya como la pendiente de la tangente a una curva. A falta de las "andaderas", que nos ofrecen la posibilidad de visualizar la situación, uno se ve forzado a dar unas definiciones más precisas y detalladas de los conceptos utilizados. La capacidad de satisfacer estas necesidades de rigor fue una de las principales contribuciones de Cauchy al análisis, tanto de variable real como compleja.

Funciones hiperbólicas

1. Ecuación de la hipérbola referida a los ejes

Sean x e y las coordenadas del punto M de la hipérbola en el sistema de coordenadas cuyos ejes coinciden con las asíntotas. En este caso, la ecuación de la hipérbola tiene la forma: $x \cdot y = a$.



Tomemos los ejes $\overline{aa}$ y $\overline{bb}$ de la hipérbola como los ejes nuevos de coordenadas. Designemos con X e Y las coordenadas del punto M en el nuevo sistema de coordenadas. Expresemos las coordenadas viejas x e y por las nuevas X e Y.

Sea N la proyección del punto M al eje $\overline{aa}$. Las proyecciones de los puntos M y N a los ejes Ox y Oy las designamos, respectivamente, por P, Q y K, L, como se puede ver en la figura de arriba. Entonces:

$$\overline{OP} = \overline{OK} - \overline{PK} = \overline{ON} \cos 45^\circ - \overline{NM} \cos 45^\circ,$$

$$\overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{ON} \cos 45^\circ + \overline{NM} \cos 45^\circ$$

(puesto que la proyección de un segmento a una recta que forma con el segmento el ángulo de 45° es igual a la longitud del segmento multiplicada por el cos 45°). Pero:

$$\overline{OP} = x,\ \overline{OQ} = y,\ \overline{ON} = X,\ \overline{NM} = Y,$$

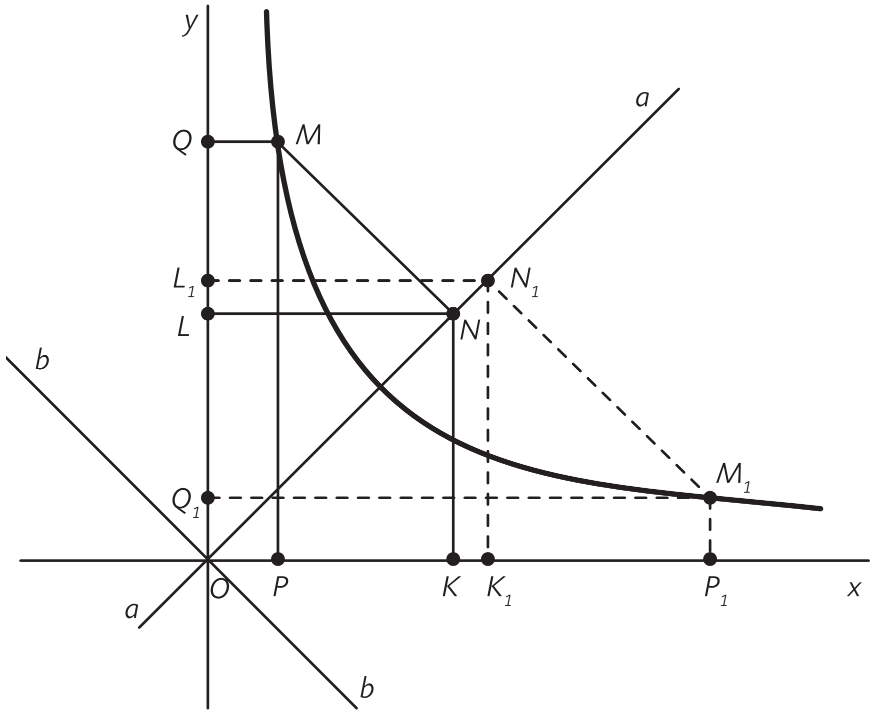
y obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x &= (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (^*)$$

Sustituyamos en la fórmula $xy = a$ los valores obtenidos de x e y. Tendremos:

$\left(X^2 - Y^2\right)\frac{1}{2} = a$, o sea, $X^2 - Y^2 = 2a$.

Para el punto M_1 de la figura siguiente,



tenemos:

$$X_1 - OP_1 = OK_1 + K_1P_1 = ON_1 \cos 45^\circ + N_1M_1 \cos 45^\circ = X_1\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-Y_1\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y_1 = OQ_1 = OL_1 - Q_1L_1 = ON_1 \cos 45^\circ - N_1M_1 \cos 45^\circ = X_1\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-Y\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

es decir, las mismas fórmulas (*), que podemos comprobar que son fórmulas válidas también para los puntos de la segunda rama de la hipérbola, dispuesta en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas x, y (aunque esta demostración no la necesitaremos).

Esta es la ecuación de la hipérbola referida a los ejes o a las asíntotas.

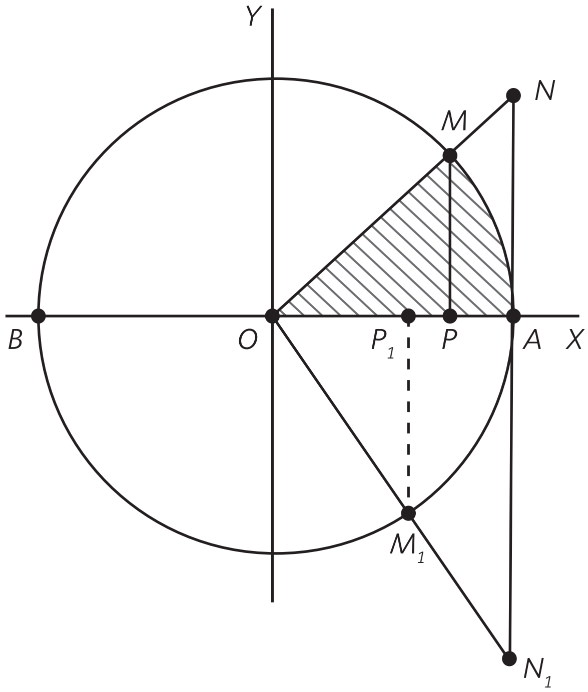
La hipérbola

$$X^2 - Y^2 = 1$$

se llama *hipérbola unidad*. Su ecuación es análoga a la ecuación de la circunferencia unidad (circunferencia de radio unidad):

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Sea M un punto cualquiera de la circunferencia de radio 1, con el centro en el origen de coordenadas (figura siguiente).



Supongamos que X e Y son las coordenadas del punto M. Según el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2,$$

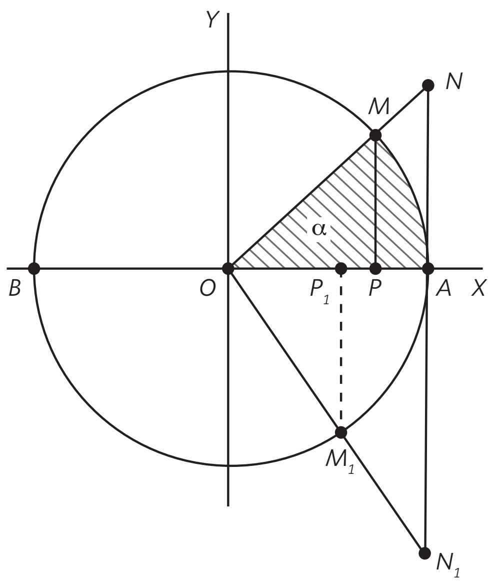
pero $\overline{OP} = X$, $\overline{PM} = Y$, $\overline{OM} = 1$. Por consiguiente, la ecuación $X^2 + Y^2 = 1$ es válida para cualquier punto de la circunferencia.

La ecuación de la hipérbola unidad en el sistema de coordenadas cuyos ejes coinciden con las asíntotas tiene la forma $xy = \frac{1}{2}$ (en este caso, $2a = 1$ y, por lo tanto, $a = \frac{1}{2}$).

2. Definición y propiedades fundamentales de las funciones hiperbólicas

Procedamos ahora con la exposición de la teoría de funciones hiperbólicas (se llaman también *funciones hiperbólicas trigonométricas*), que en muchos aspectos es análoga a la de funciones trigonométricas comunes, es decir, circulares. Para recalcar la analogía y permitir su comparación entre las funciones circulares e hiperbólicas, se le da a la exposición una forma en dos bloques: en el **bloque superior** se exponen los conocidos postulados de la teoría de funciones trigonométricas circulares; en el **bloque inferior,** la teoría de funciones hiperbólicas. La comparación justificará el nombre que llevará cada una de estas funciones.

Bloque superior. Examinemos una circunferencia unidad, $X^2 + Y^2 = 1$.



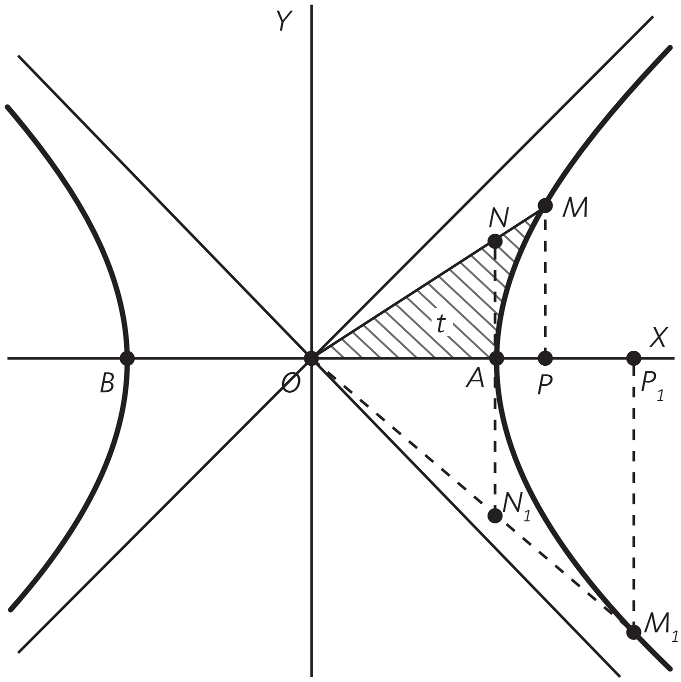
Se llama *ángulo* α (en radianes), formado por los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OM}$ de la circunferencia, a un número igual a la longitud del arco *AM*, o al doble del área del sector *OAM*, limitado por los radios mencionados y el arco de *A* a M_1 (figura de arriba).

Tracemos una perpendicular $\overline{MP}$ del punto *M* de la circunferencia al diámetro $\overline{OA}$; tracemos también una tangente a la circunferencia en el punto *A*, procurando que se corten la tangente y el radio $\overline{OM}$ en el punto *N*. Entonces, el segmento $\overline{PM}$ de la perpendicular será línea del seno. El segmento $\overline{OP}$ del diámetro será línea del coseno y el segmento $\overline{AN}$, línea de la tangente.

Las longitudes de los segmentos $\overline{PM}$, $\overline{OP}$ y $\overline{AN}$ son iguales al seno, coseno y tangente del ángulo α, respectivamente:

$$\overline{PM} = \text{sen}\ \alpha,\ \overline{OP} = \cos \alpha,\ \overline{AN} = \text{tg}\ \alpha.$$

Bloque inferior. Examinemos ahora una hipérbola unidad $X^2 - Y^2 = 1$ (figura de abajo).



Se llama *ángulo hiperbólico t*, formado por dos radios $\overline{OA}$ y $\overline{OM}$ de la hipérbola, al número igual al doble del área del sector, limitado por estos radios y el arco de la hipérbola. La principal propiedad del ángulo α, consiste en la invariabilidad de su valor al girar el sector *AOM* alrededor de *O*. Análogamente, el ángulo hiperbólico *t* no varía su valor en el giro hiperbólico de la figura *AOM* [véase la propiedad e), en *Leñitas Geométricas* 10, 5ª época, p. 24].

Tracemos una perpendicular $\overline{MP}$ del punto *M* de la hipérbola al diámetro $\overline{OA}$. que es el eje de simetría de la hipérbola que corta a esta en el vértice *A*; tracemos también una tangente a la hipérbola en el punto *A*, procurando que la tangente corte el diámetro $\overline{OM}$ en el punto *N*. El segmento $\overline{PM}$ de la perpendicular se llama *línea del seno hiperbólico*, el segmento $\overline{OP}$ del diámetro se llama *línea del coseno hiperbólico* y $\overline{AN}$, *línea de la tangente hiperbólica*.

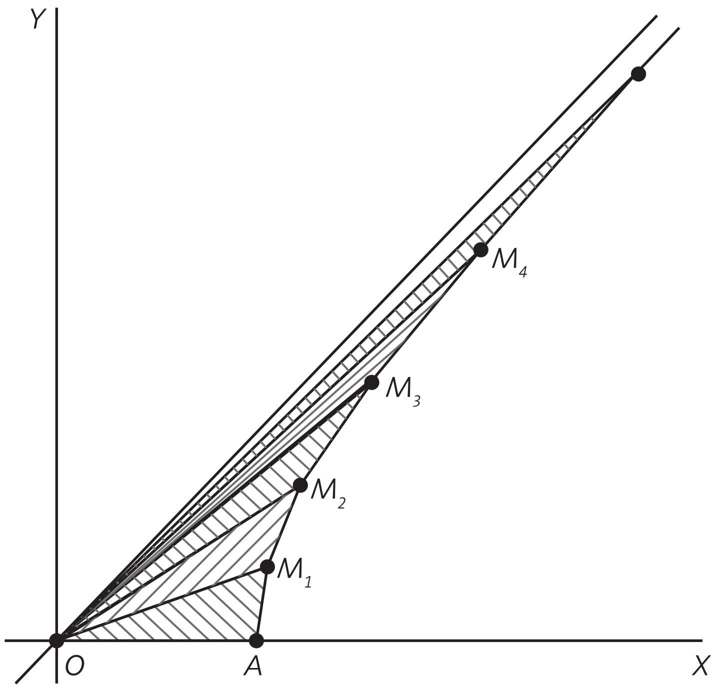
Las longitudes de los segmentos $\overline{PM}$, $\overline{OP}$ y $\overline{AN}$ se llaman, respectivamente, *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica* del ángulo hiperbólico *t*, y se designan de la manera que sigue:

$$\overline{PM} = \text{sh}\ t,\ \overline{OP} = \text{ch}\ t,\ \overline{AN} = \text{th}\ t.$$

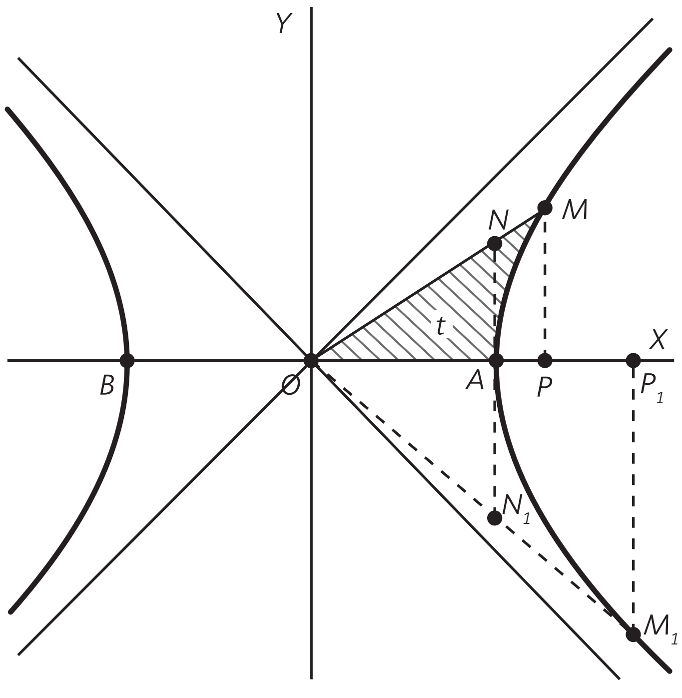
Las relaciones $\frac{\overline{1}}{\overline{PN}}, \frac{1}{\overline{OP}}$ y $\frac{1}{\overline{AN}}$ se denominan, a veces, *cosecante hiperbólica, secante hiperbólica y cotangente hiperbólica* del ángulo hiperbólico *t*.

Se conoce que las funciones trigonométricas del ángulo varían periódicamente, con el período igual a 2π. Las funciones hiperbólicas son aperiódicas. El ángulo hiperbólico *t* puede variar en los límites desde 0 hasta ∞. Para comprobarlo (o, en otras palabras, comprobar que el área del sector hiperbólico *AOM* puede ser tan grande como se quiera), examinemos el ángulo hiperbólico *AOM*, cuyo valor designaremos con t_1.

Realicemos el giro hiperbólico que traslada el punto A al punto M_1; el punto M_1 pasará, con ello, al punto M_2, M_2 en el M_3, M_3 en el M_4, etc., como muestra la figura siguiente:



En virtud de la propiedad e) (*Leñitas Geométricas* 10, 5ª época, p. 24), las áreas de los sectores hiperbólicos AOM_1, M_1OM_2, M_2OM_3, M_3OM_4 ... son todas iguales, razón por la cual los ángulos hiperbólicos AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4 son iguales, respectivamente, a t_1, $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$, … De aquí se deduce que el ángulo hiperbólico puede ser tan grande como se quiera. De la definición de funciones hiperbólicas se desprende que,



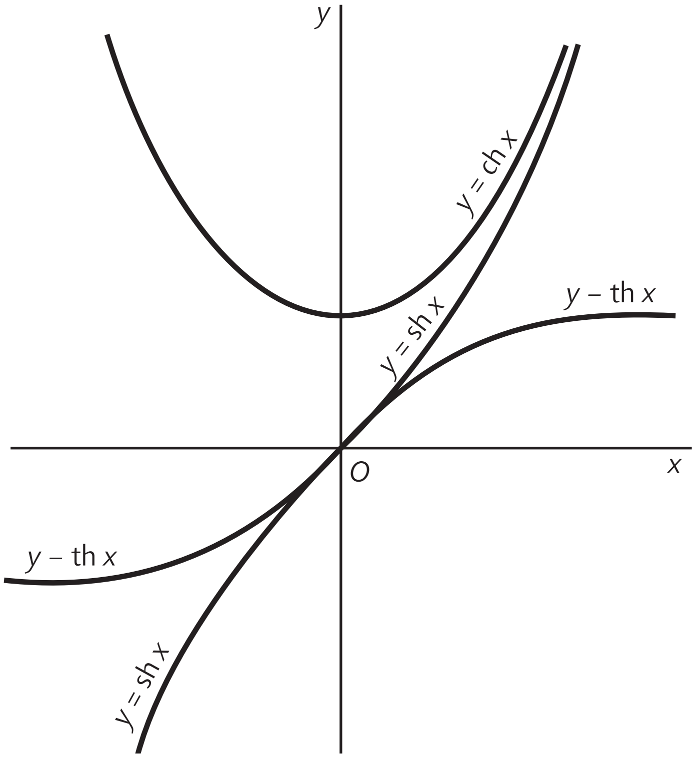
al variar el ángulo hiperbólico t desde 0 hasta ∞, el seno hiperbólico sh t varía desde 0 hasta ∞, ch t varía desde 1 hasta ∞, th t varía desde 0 hasta 1. Si, rigiéndonos por la analogía completa con funciones circulares, consideramos el ángulo AOM_1 (véase figura de arriba) negativo, igual a $-t_1$ (t_1 es el doble del área del sector AOM_1) y admitimos que:

$$\text{sh}\,(-t_1) = -\overline{M_1P_1} = -\text{sh}\,t_1,$$

$$\text{ch}\,(-t_1) = \overline{OP_1} = \text{ch}\,t_1,$$

$$\text{th}\,(-t_1) = -\overline{N_1A} = -\text{th}\,t_1,$$

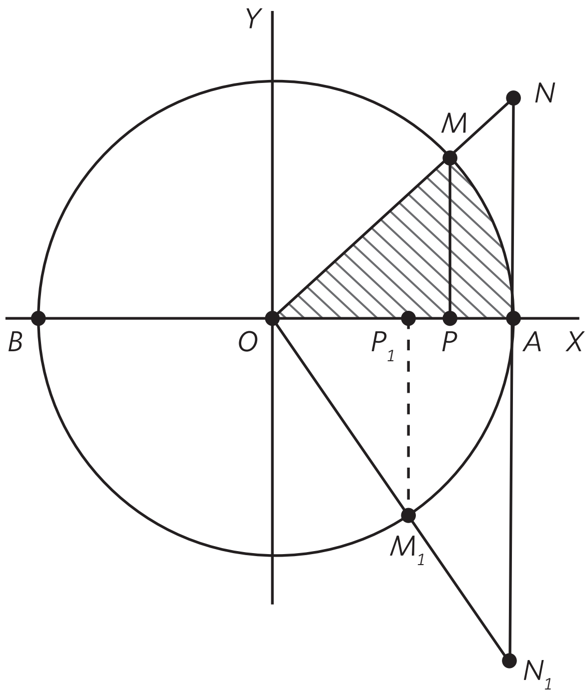
entonces, las gráficas de funciones hiperbólicas tendrán la forma representada en la figura siguiente.



Observemos, además, que sh 0 = th 0 = 0 y ch 0 = 1 (de igual modo que sen 0 = tg 0 = 0 y cos 0 = 1).

Deduzcamos, ahora, las dependencias principales entre las funciones trigonométricas (tanto circulares como hiperbólicas).

Bloque superior (para las circulares). De la semejanza de los triángulos *OMP* y *ONA* de la figura siguiente se deduce:



$$\frac{\overline{AN}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}.$$

Pero $\frac{\overline{AN}}{\overline{OA}} = \text{tg}\,\alpha$ (dado que $\overline{OA} = 1$) y $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

De este modo obtenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(I)}$$

Luego, las coordenadas del punto M de la circunferencia son: $\overline{OP} = X$, $\overline{PM} = Y$.

La ecuación de la circunferencia unidad tiene la forma: $X^2 + Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = 1,$$

o bien,

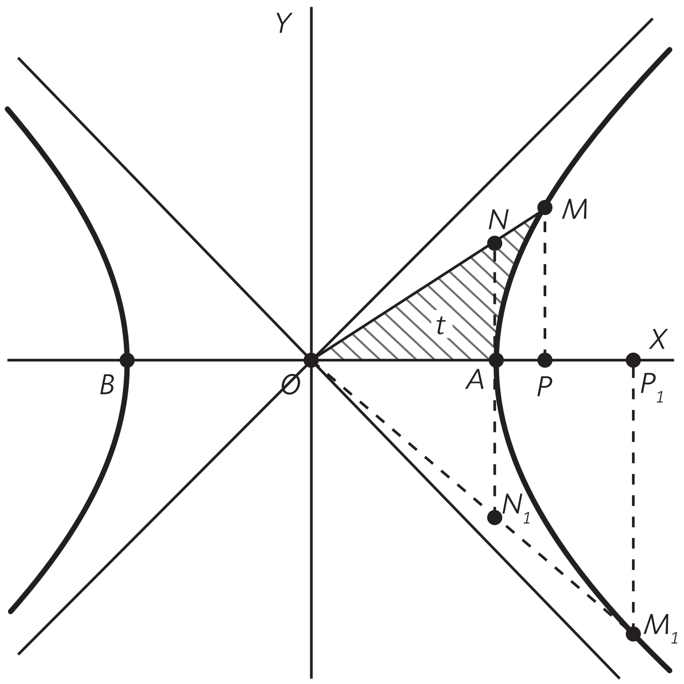
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \text{(II)}$$

Al dividir ambos miembros de la identidad (II) primero por $\cos^2\alpha$ y luego, por $\operatorname{sen}^2\alpha$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{(III)}$$

$$\operatorname{cotg}^2 + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad \text{(IV)}$$

Bloque inferior. También, de la semejanza de los triángulos *OMP* y *ONA* representados en la figura siguiente se deduce:



$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Pero $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{OA}}$th t (dado que $\overline{OA} = 1$ para el punto A, la coordenada $Y = 0$, por lo que $\overline{PA}^2 = X^2 = 1 + Y^2 = 1$) y

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}.$$

De este modo obtenemos:

$$\operatorname{tn} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}. \qquad \text{(I)}$$

Luego, las coordenadas del punto M de la hipérbola son $\overline{OP} = X$, $\overline{PM} = Y$. La ecuación de la hipérbola unidad tiene la forma $X^2 - Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$\overline{OP}^2 - \overline{PM}^2 = 1$$

o bien,

$$\text{ch}^2\, t - \text{sh}^2\, t = 1. \qquad \text{(II)}$$

Al dividir ambos miembros de la identidad (II) primero por $\text{ch}^2\, t$, y luego, por $\text{sh}^2\, t$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 - \text{tg}^2 t = \frac{1}{\text{ch}^2 t}; \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2 t} - 1 = \frac{1}{\text{sh}^2 t}. \qquad \text{(IV)}$$

El cálculo diferencial

3. Técnica de derivación

Hasta ahora nuestros esfuerzos se han concretado en derivar diversas funciones, transformando el cociente de diferencias antes de efectuar el paso al límite. Se dio un paso decisivo cuando, debido a las investigaciones de Isaac Newton, Gootfried Leibniz y otros, se reemplazaron esos procedimientos especiales por métodos generales más poderosos. Mediante ellos, se puede derivar casi automáticamente cualquier función entre las que aparecen normalmente en la matemática, siempre que nos apropiemos de unas pocas reglas muy simples y seamos capaces de reconocer su aplicabilidad. Así, la derivación ha adquirido el carácter de un “algoritmo”, aspecto de la teoría que se expresa precisamente mediante la voz “cálculo”. No podemos dar muchos detalles de esta técnica. Mencionaremos solo unas pocas reglas.

(a) **Derivación de una suma.** Si a y b son constantes y se define la función $k(x)$ por

$$k(x) = af(x) + bg(x)$$

como podemos verificar fácilmente, se tiene:

$$k'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Puede establecerse una regla similar para un número cualquiera de términos.

(b) **Derivación de un producto.** Para un producto

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

la derivada es:

$$p'(x) = f(x) \cdot g'(x) = g(x) + f'(x).$$

Esto se demuestra fácilmente mediante el siguiente procedimiento, que consiste en sumar y restar el mismo término:

$$p(x + h) - p(x) = f(x + h)\, g(x + h) - f(x)g(x)$$

$$= f(x - h)g(xh) - f(x + h)g(x) + f(x + h)g(x) - f(x)g(x)$$

de aquí, se tiene:

$$\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = f(x+h)\frac{g(x+h)-f(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Hagamos ahora tender h a cero; puesto que $f(x + h)$ tiende a $f(x)$, la afirmación queda demostrada.

Ejercicio. Demuéstrese que la función $p(x) = x^n$ tiene la derivada $p'(x) = nx^{n-1}$. (Escribir $x^n = x \cdot x^{n-1}$ y utilizar inducción).

Utilizando las reglas (a) y (b) podemos derivar cualquier polinomio:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n;$$

cuya derivada es:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Como aplicación, podemos demostrar el teorema del binomio. Este teorema se refiere al desarrollo de $(1 + x)^n$ en forma de polinomio:

$$f(x) = (1 + x)^n = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n, \qquad (1)$$

y afirma que el coeficiente a_k está dado por la fórmula:

$$a_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (2)$$

siendo, naturalmente, $a_n = 1$.

Ya hemos visto que la derivada del primer miembro de (1) es $n(1 + x)^{n-1}$; pero, según el párrafo precedente, se tiene:

$$n(1 + x)^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + ns_nx^{n-1}. \qquad (3)$$

En esta fórmula, hagamos $x = 0$, de donde resulta $n = a_1$, que es precisamente el valor de (2) para $k = 1$. Derivando (3) otra vez, se tiene:

$$n(n - 1)\,(1 + x)^{n-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n - 1)a_nx^{n-2}.$$

Haciendo nuevamente $x = 0$, resulta $n(n - 1) = 2a_2$ de acuerdo con la fórmula (2) para $k = 2$.

Ejercicio. Demuéstrese (2) para $k = 3$, 4, y para un k cualquiera mediante inducción.

(c) **Derivación de un cociente.** Si es $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, se tiene:

$$q'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La demostración queda como ejercicio.

Ejercicio. Mediante esta regla, obténgase las fórmulas para las derivadas de tg x y ctg x, a partir de las de sen x y cos x. Demuéstrese que las derivadas de sec x = 1/cos x y cosec x = 1/sen x son respectivamente: sen x/cos 2x, cos x/sen 2x.

Ahora podemos derivar cualquier función que pueda escribirse en forma de cociente de dos polinomios. Por ejemplo:

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

tiene la derivada

$$f'(x)=\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2}.$$

Ejercicio. Derivar la función: $f(x) = 1/xm = x–m$, donde m es un entero positivo. El resultado es:

$$f'(x) = -mx^{-m-1}.$$

(d) **Derivación de funciones inversas.** Si

$$y = f(x) \qquad \text{y} \qquad x = g(y)$$

son funciones inversas (por ejemplo, $y = x^2$ y $x=\sqrt{y}$) sus derivadas son recíprocas:

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{o sea: } Dg(y)\ \ Df(x) = 1.$$

Se demuestra fácilmente este hecho, volviendo a los cocientes de diferencias recíprocos: $\Delta y/\Delta x$ y $\Delta x/\Delta y$, respectivamente. Puede deducirse también de la interpretación geométrica de la función inversa dada, si tomamos la pendiente de la tangente respecto del eje de las y en lugar del de las x.

Como ejemplo, derivaremos de la función

$$y = f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$$

que es la inversa de $x = y^m$. (Véase también el estudio más directo de esta misma cuestión para $m=\frac{1}{2}$).
Puesto que la derivada de la última función es my^{m-1}, se tiene:

$$f'(x)=\frac{1}{my^{m-1}}=\frac{1}{m}\frac{y}{y^m}=\frac{1}{m}yy^{-m}$$

de donde, sustituyendo $y=x^{\frac{1}{m}}$ e $y^{-m} = x^{-1}$, $f'(x)=\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ resulta,

$$D\left(x^{\frac{1}{m}}\right)=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}.$$

Como un ejemplo más, derivaremos las funciones trigonométricas inversas:

$$y = \text{arc tg}\, x, \text{ o sea: } x = \text{tg}\, y.$$

En este caso, la variable y, que está expresada en radianes, está limitada al intervalo $-\frac{1}{2}\pi<y<\frac{1}{2}\pi$ para asegurar una definición unívoca de la función inversa.

Puesto que $D\,\text{tg}\,y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ y dado que $\dfrac{1}{\cos^2 y}=\dfrac{(\text{sen}^2 y+\cos^2 y)}{\cos^2 y}=1+\text{tg}^2 y=1+x^2$, se tiene:

$$D\,\text{arc tg}\,x=\frac{1}{1+x^2}.$$

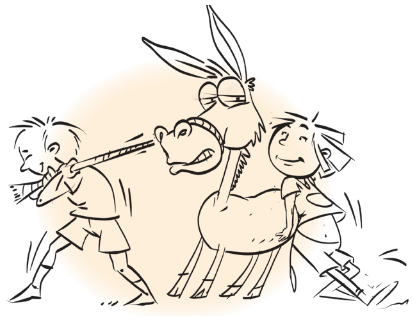
De la misma manera, podemos obtener las siguientes fórmulas:

$$D \text{ arc ctg } x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$D \text{ arc sen } x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$D \text{ arc cos } x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Finalmente, llegamos a una regla general muy importante.



(e) **Derivación de las funciones compuestas.** Recordemos que un método para crear funciones a partir de dos a más previamente dadas consiste en formar funciones compuestas; por ejemplo, la función

$$u = f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

se "compone" de estas dos más sencillas:

$$z = g(x) = 1 + x^2 \text{ y } u = h(z) = \sqrt{z},$$

y puede escribirse de la manera siguiente

$$u = f(x) = h(g[x]) \text{ y se lee "} h \text{ de } g \text{ de } x\text{".}$$

Análogamente, la función

$$u = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

está compuesta por tres funciones

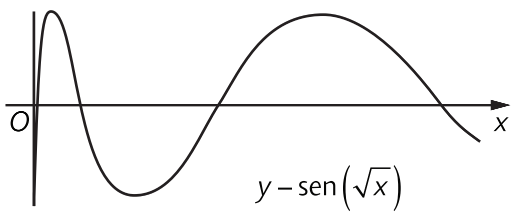
$$z = g(x) = 1 + x^2,\ w = h(z) = \sqrt{z},\ u = k(w) = \frac{1}{w}$$

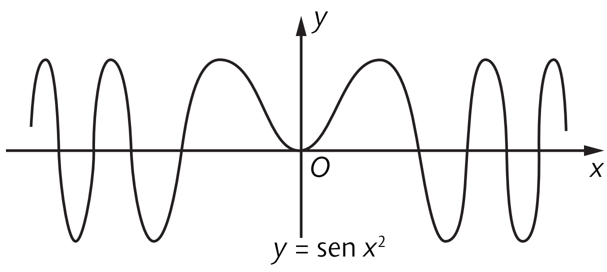
por lo que resulta la función

$$u = k(h[g(x)]).$$

Estas funciones están compuestas de otras dos (o más) que, son más sencillas.

En otros ejemplos, $z = \text{sen}\sqrt{x}$ se compone de $z = \text{sen } y$ e $y = \sqrt{x}$; la función $z = \sqrt{x} + \sqrt{x^5}$ se compone de $z = y + y^5$ e $y = \sqrt{x}$; $z = \text{sen } x^2$ se compone de $z = \text{sen } y$ e $y = x^2$; $z = \text{sen}\frac{1}{x}$ se compone de z = sen y e $y = -\frac{1}{x}$.





Si se dan dos funciones

$$z = g(y),\ y = f(x)$$

y se substituye la última en la primera, obtenemos una función compuesta

$$z = k(x) = g[f(x)].$$

Afirmamos que es:

$$k'(x) = g'(y)f'(y) \tag{4}$$

pues si escribimos

$$\frac{k(x_1) - k(x)}{x_1 - x} = \frac{z_1 - z}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

siendo $y_1 = f(x_1)$ y $z_1 = g(y_1) = h(x_1)$, y hacemos tender x_1 a x, el primer miembro tiende a $k'(x)$, mientras que los dos factores del segundo miembro tienden a $g'(x)$ y $f'(x)$, respectivamente, que es (4), como se quería demostrar.

En esta demostración, es necesario suponer que $y_1 - y \neq 0$. Pues, dividimos por $\Delta y = y_1 - y$ y no podemos utilizar valores de x_1 para los cuales $y_1 - y = 0$. Pero la fórmula (4) sigue siendo válida, aun cuando $\Delta y = 0$ en un intervalo en la vecindad de x (entorno de x) y es entonces constante; $f'(x) = 0$, $k(x) = g(y)$ es constante respecto de x (puesto, que y no varía con x), de donde resulta $k'(x) = 0$, como debe ocurrir según (4). Podemos verificar los siguientes ejemplos:

$$k(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x},\ k' = \left(\cos\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$k(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^5},\ k'(x) = \left(1 + 5x^2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$k(x) = \operatorname{sen}\,(x^2),\ k'(x) = \cos\,(x^2) \cdot 2(x);$$

$$k(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ k'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2};$$

$$k(x) = \sqrt{1 - x^2},\ k'(x)\frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot 2x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ejercicio. Combinando los resultados anteriores demuéstrese que la función

$$f(x) = \sqrt[m]{x^s} = x^{\frac{s}{m}}$$

tiene la siguiente derivada:

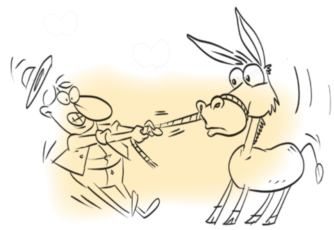
$$f'(x) = \frac{s}{m}x^{\frac{s}{m}-1}.$$

Es necesario hacer constar que todas nuestras fórmulas que se refieren a las potencias de x pueden expresarse en una sola: si r es un número racional cualquiera, positivo o negativo, la función

$$f(x) = x^r$$

tiene la siguiente derivada:

$$f'(x) = rx^{r-1}.$$



Armando festivales y pasatiempos

1. Efectúense las derivaciones de los ejercicios del punto 3 anterior, utilizando las reglas allí explicadas.
2. Derívense las siguientes funciones:

$$x \operatorname{sen} x,\ (x^3 - 3x^2 - x + 1)^3,\ 1 +$$

$$+ \operatorname{sen}^2 x,\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right),\ \operatorname{arc\,sen}\left(\cos nx\right),\ \operatorname{tg}\frac{1+x}{1-x},\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}, \sqrt[4]{1-x^2}, \frac{1}{1+x^2}\operatorname{sen} nx.$$

3. Determínense las segundas derivadas de algunas de las funciones anteriores y, además, de arc tg x, $\operatorname{sen}^2 x$, tg x y $\dfrac{1-x}{1+x}$.
4. Derívese $c_1\left(x - x_1\right)^2 + y_1^2 + c_2\left(x - x_2\right)^2 + y_2^2$, y demuéstrense las propiedades del mínimo del rayo luminoso por reflexión y refracción, que se expusieron anteriormente. Tanto la reflexión como la refracción tendrán lugar en el eje de las x; las coordenadas de los puntos extremos de la trayectoria serán, respectivamente, x_1, y_1 y x_2, y_2. (La derivada de la función se anula en un solo punto, en consecuencia, puesto que puede existir un mínimo, pero no un máximo, no es necesario estudiar el comportamiento de la segunda derivada).

Otros problemas de máximos y mínimos

5. Determínense los valores extremos de las siguientes funciones, dibújense sus respectivas gráficas, establézcase en qué intervalos la función es creciente o decreciente, cóncava o convexa:

$$x^2-6x+2, \quad \frac{x}{1+x^2}, \quad \frac{x^2}{1+x^4}, \quad \cos^2 x.$$

6. Estúdiense los máximos y mínimos de la función $ax^3 + 3ax + 1$ en su dependencia respecto de a.
7. ¿Qué punto de la hipérbola $2y^2 - x^2 = 2$ está más cerca del punto $x = 0$, $y = 3$?
8. Entre todos los rectángulos de un área dada, determínese aquel cuya diagonal sea mínima.
9. Inscríbase el rectángulo de área máxima en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
10. Entre todos los cilindros circulares de volumen dado, determínese aquel cuya área sea mínima.

4. Leibniz y los "infinitésimos"

Newton y Leibniz conocían el camino para obtener integrales y derivadas mediante pasos al límite, pero los fundamentos del cálculo se hallaban oscurecidos por la incapacidad de reconocerle al concepto de límite el derecho exclusivo a ser fuente de los nuevos métodos. Por muy sencillo que esto nos parezca ahora, después de haber aclarado el concepto de límite, ni Newton ni Leibniz pudieron decidirse a adoptar una actitud tan definida.

Su ejemplo influyó durante más de un siglo sobre el desarrollo de la ciencia matemática, período durante el cual se evitaba el tema hablando de "cantidades infinitamente pequeñas", "diferenciales", "razón última", etc. La repugnancia con que se abandonaron por fin esos conceptos estaba profundamente enraizada en la actitud filosófica de la época y en la misma naturaleza de la inteligencia humana. Alguien pudiera argumentar así: "Naturalmente, tanto la integral como la derivada se calculan mediante límites; pero, después de todo, ¿qué son estos entes en sí mismos, fuera del particular paso al límite mediante el cual se los describe? Parece evidente que conceptos intuitivos tales como la superficie o la pendiente de una curva tienen un significado absoluto en sí, independiente de la idea auxiliar de los polígonos inscriptos o de las secantes y sus límites".

Psicológicamente es muy natural que se intente buscar una definición adecuada del área o de la pendiente, como "cosas en sí". Pero el renunciamiento a ese deseo y la creencia en el paso al límite como única definición, aceptable desde el punto de vista científico, están de acuerdo con la madura actitud científica que ha abierto tantas veces el camino al progreso. En el siglo XVII no existía una tradición científica que permitiera ese radicalismo filosófico.

La tentativa de Leibniz de "explicar" la derivada empezaba correctamente con el cociente de diferencias de una función $y = f(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

En el límite, Leibniz escribía la derivada (que nosotros denotamos $f'(x)$ siguiendo la notación introducida por Lagrange) de esta manera:

$$\frac{dx}{dy}.$$

reemplazando el símbolo Δ de diferencias por el "símbolo diferencial" d. No hay ninguna dificultad y no existe ningún misterio si entendemos que este símbolo indica solamente que debe efectuarse el paso al límite: $\Delta x \to 0$ y, en consecuencia, $\Delta y \to 0$.

Antes de pasar al límite, se elimina el denominador Δx del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o se le transforma de tal manera que pueda efectuarse sin dificultad el proceso de límite. Este es siempre el punto decisivo en la derivación. Si hubiéramos intentado hacerlo sin esa simplificación previa, habríamos obtenido la relación sin sentido $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{0}$, que no nos interesa.

Solo se llega al misterio y a la confusión si seguimos el camino de Leibniz y de muchos de sus sucesores y decimos algo como esto: "Δx no tiende a cero"; al contrario, "el último valor" de Δx no es cero, sino "una cantidad infinitamente pequeña", "una diferencial", llamada dx, y, análogamente, Δy tiene un "último" valor infinitamente pequeño, llamado dy.

El verdadero cociente de estos diferenciales infinitamente pequeños es un número ordinario: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$. Por esto Leibniz llamó a la derivada "cociente diferencial". Se creía que esas cantidades infinitamente pequeñas eran una nueva clase de números no iguales a cero, sino más pequeños que cualquier número real. Solo los que poseían una verdadera intuición matemática podían captar este concepto. Se creía que el cálculo era verdaderamente difícil, puesto que no todos tienen o pueden desarrollar esa intuición. De la misma manera, se consideraba la integral como una suma de infinitas "cantidades infinitamente pequeñas" $f(x)dx$. Los matemáticos parecían pensar que esa suma era la integral, o área, considerándose como algo accesorio al cálculo de su valor mediante el límite de una suma finita de números ordinarios $f(x_1)\Delta x$. Hoy nos limitamos a dejar de lado el deseo de una explicación "directa" y definimos la integral como límite de una suma finita. De esta manera, se eliminan todas las dificultades y se asienta sobre una base sólida todo lo que es de valor en el cálculo.

A pesar de esta superación, se retuvieron las notaciones de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ para la derivada $f'(x)$ y $\int f(x)dx$ para la integral, pues han demostrado ser extremadamente útiles. No hay ningún inconveniente si recordamos que son simples símbolos para el paso al límite. La notación de Leibniz ofrece la ventaja de que se pueden considerar los límites de cocientes y de sumas "como si" fueran realmente cocientes o sumas. El poder de sugestión de esos símbolos ha inducido numerosas veces a los estudiosos a atribuirles un significado que está enteramente fuera de la matemática. Si nos resistimos a esa tentación, la notación de Leibniz es, por lo menos, una excelente abreviatura que reemplaza a la notación explícita, más complicada, del paso al límite. De hecho, es indispensable en ciertos aspectos más avanzados de la teoría.

Por ejemplo, según la regla (d) la derivada de la función inversa $x = g(y)$ de $y = f(x)$ es tal que $g'(y)f'(x) = 1$. En la notación de Leibniz se tiene:

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=1$$

"como si" pudieran eliminarse las "diferenciales" de algo que parece ser una fracción ordinaria. Igualmente, según la regla de la derivada de una función compuesta $z = k(x)$, siendo $z = g(y)$, $y = f(x)$, puede expresarse así, según la notación de Leibniz:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

La notación de Leibniz tiene otra ventaja más: la de atender a las cantidades x, y, z, más que a su conexión funcional explícita. Esta última expresa un procedimiento, una operación, que produce una cantidad y a partir de otra x; por ejemplo, la función $y = f(x) = x^2$ produce una cantidad y igual al cuadrado de x. La operación (en este caso, elevar al cuadrado) requiere la atención del matemático, pero el físico y el ingeniero se interesan primordialmente por las cantidades mismas. De ahí que el énfasis puesto por Leibniz en su notación de las cantidades mismas sea particularmente atractivo para quienes se interesan por la matemática aplicada.

Podemos añadir otra observación. Mientras "las diferenciales" se han descartado definitivamente y de forma poco honorable, en cuanto a cantidades infinitamente pequeñas, la palabra diferencial ha entrado por la puerta falsa, para designar un concepto legítimo y muy útil. Significa ahora una diferencia Δx cuando Δx es muy pequeña en relación con las otras cantidades que aparecen en el cálculo. Un entorno reducido del punto límite. No podemos discutir el valor de este concepto para el cálculo aproximado.

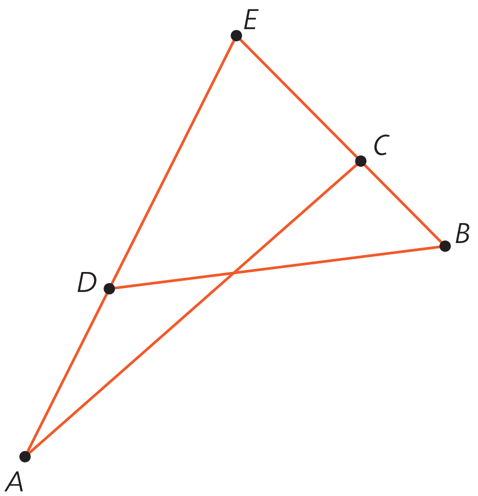
Tampoco podemos discutir las otras nociones matemáticas perfectamente legítimas que se designan con el mismo nombre y algunas de las cuales han demostrado ser sumamente útiles en el cálculo y en sus aplicaciones a la geometría.

PARA RESOLVER

con imaginación e inteligencia

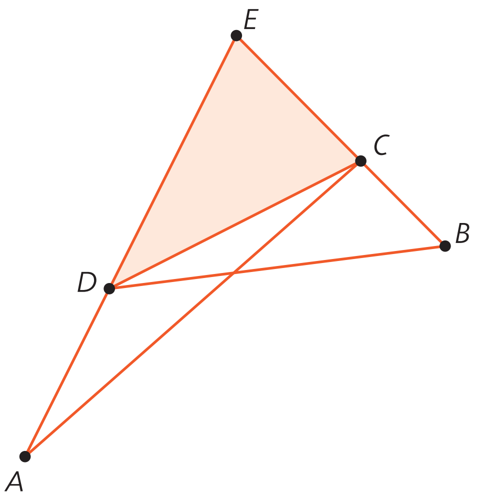
Respuesta del Nº 26

En la figura, los triángulos *ACE* y *BED* tienen sendas áreas del mismo valor. Determinar qué clase de cuadrilátero se forma con los puntos *ABCD* tomados como vértices.

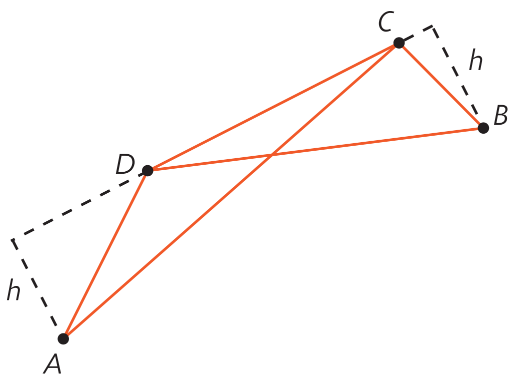


Solución

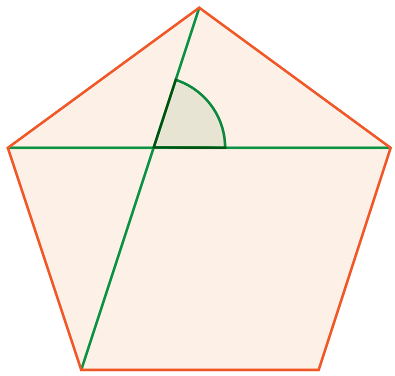
Si de ambos triángulos quitamos el triángulo *CDE*, los triángulos resultantes, *ACD* y *BCD*, tienen igual área.



En consecuencia, son iguales sus alturas sobre el lado común *CD*, siendo *ABCD* un trapecio dado que *AB* y *CD* son lados paralelos.

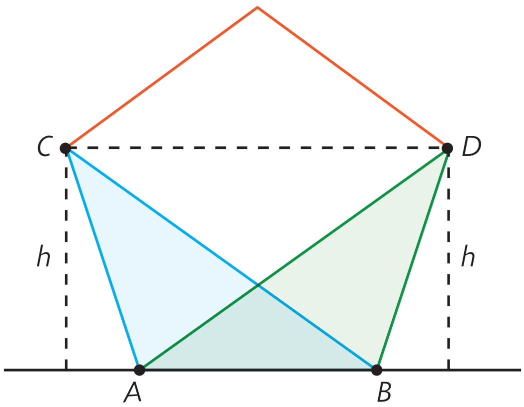


Hallar el valor del ángulo entre dos diagonales del pentágono regular.



Solución

En un pentágono regular, cada diagonal es paralela a uno de los lados del pentágono; el fundamento radica en que los triángulos determinados por tres vértices consecutivos del pentágono son congruentes entre sí, por tener un par de lados iguales y el mismo ángulo comprendido.



En la figura precedente, los triángulos *ABC* y *ABD* son congruentes y comparten la base *AB*, por lo tanto, tienen la misma altura *h* respecto de *AB*; es decir, *AB* y *CD* son segmentos paralelos.

En el problema, por lo anteriormente visto y propiedades de ángulos entre paralelas, los ángulos indicados en la siguiente figura son de igual medida. Pero uno de ellos es un ángulo exterior del pentágono y mide 72°.