Leñitas Geométricas*

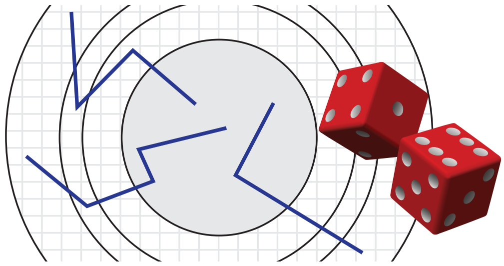
para el Fogón Matemático de los Festivales

De OMA para Profesores y Maestros en actividad

5ª época ✈ Nº 13
7 de septiembre de 2023

"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

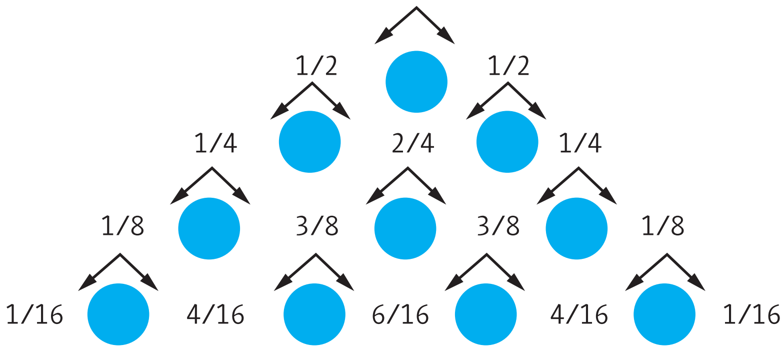
El Método Montecarlo



Continúa de *Leñitas Geométricas* Nº 12, 5ª época, Estadística complementaria al método Montecarlo.

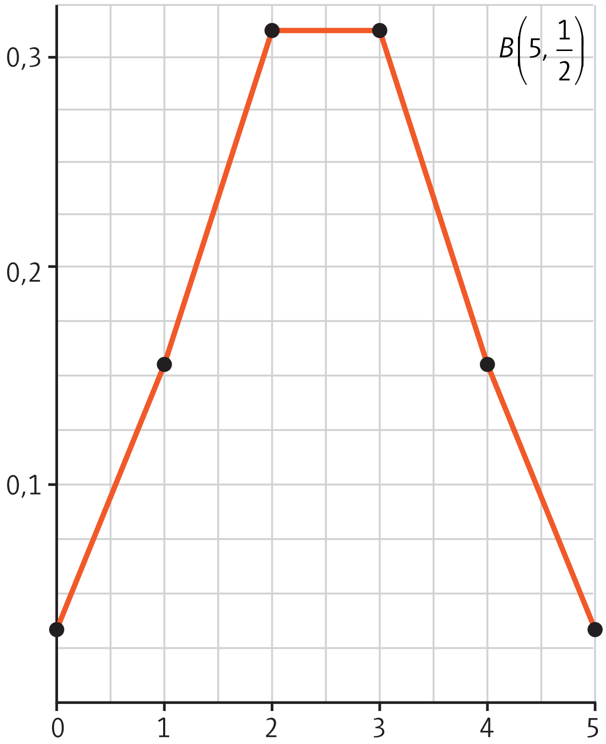
La distribución binomial se aproxima a la normal

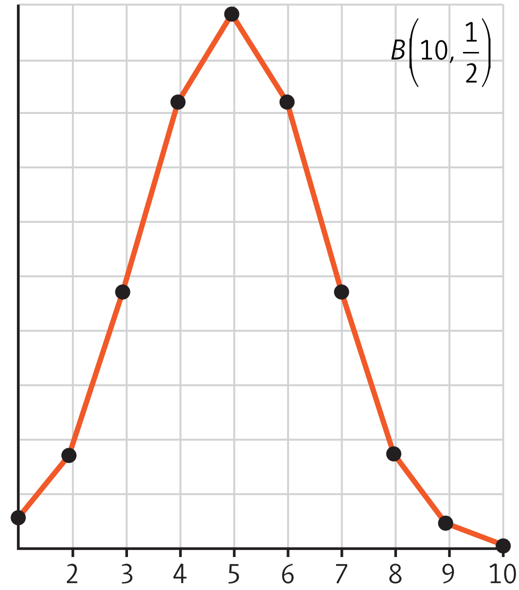
La distribución de perdigones en las casillas del aparato de Galton se parece mucho a la curva normal. Pero la distribución obtenida por medio del aparato de Galton es una binomial $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

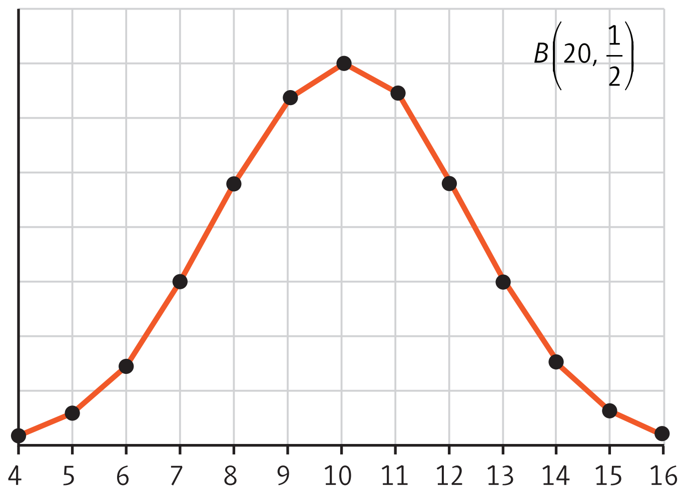


* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

He aquí, a continuación, las distribuciones de probabilidad de varias binomiales como esta:

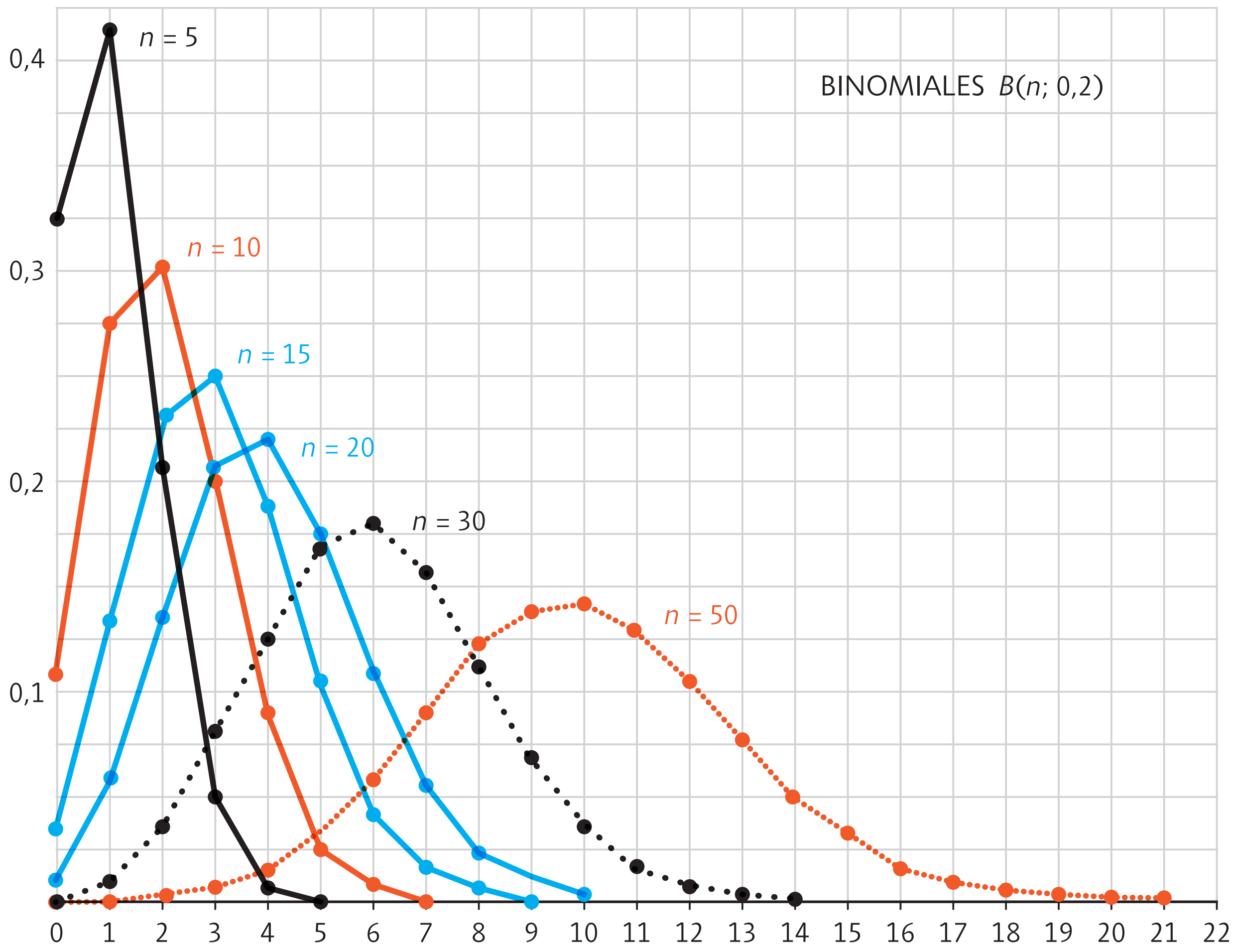






Podemos observar que cuanto mayor es n, más se parece a la curva normal. ¿Les ocurrirá lo mismo a distribuciones $B(n, p)$ para una p cualquiera?

Antes de responder a esta pregunta de forma general, observemos las seis gráficas de la figura siguiente, correspondientes a distribuciones de probabilidad binomiales con $p = 0{,}2$.



Mirémoslas bien. La primera no se parece en nada a la curva normal. Poco a poco, se le van pareciendo más y más. La última, una binomial $B(50; 0{,}2)$, es casi exactamente una curva normal.

En general, una binomial $B(n, p)$ se parece a una curva normal tanto más cuanto mayor es el producto $n \cdot p$ (o $n - q$ si $q < p$). Cuando $n - p$ y $n \cdot q$ son ambos mayores que 3, la aproximación es bastante buena. Y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta.

Veamos su utilidad. Si queremos calcular probabilidades en una $B(n, p)$ con n grande, las operaciones pueden ser muy engorrosas. Por ejemplo, para x: $B(200; 0{,}3)$, el cálculo de $P[x \geq 70]$ supone obtener:

$$\sum_{k=70}^{200} \binom{200}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{200-k}$$

es decir, sumar 131 sumandos tremendos. La tarea es prácticamente imposible. Sin embargo, si tenemos en cuenta que

$$\overline{x} = 200 \cdot 0{,}3 = 60$$
$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{42} = 6{,}48$$

nuestra distribución se parecerá mucho a una distribución normal $N(60; 6{,}48)$. Sobre esta distribución calcularemos la probabilidad pedida:

$$x \text{ es } B(200; 0{,}3) \ \rightarrow \ x' \text{ es } N(60; 6{,}48) \ \rightarrow \ z \text{ es } N(0, 1)$$

$$P[x \geq 70] = P[x' \geq 69{,}5] = P\left[z \geq \frac{69{,}5 - 60}{6{,}48}\right] = P[z \geq 1{,}47] = 0{,}0708.$$

En general, si en una distribución binomial $B(n, p)$ tanto $n - p$ como $n \cdot q$ son mayores o iguales que 5, tenemos:

$$x \text{ es } B(n, p) \rightarrow x' \text{ es } N\left(nq, \sqrt{npq}\right)$$
$$P[x = k] = P[k - 0{,}5 \leq x' \leq k + 0{,}5]$$

Recordemos: cuando una variable discreta, x, se aproxima a la normal, x', a cada valor de x se le asocia un intervalo unidad en torno a él $x = 70\ x'\ \varepsilon(69{,}5;\ 70{,}5)$.

Resolver

El 2% de los tornillos fabricados por una maquina presentan defectos. Si tenemos un lote de 2 000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 50 defectuosos?

Pasos para resolver:

- Comprobar que se trata de una distribución binomial $B(2\,000;\ 0{,}02)$ para la que se pide $P[x > 50]$.
- Calculemos $\overline{x}$ y σ.
- Comprobemos que $n \cdot p$ y $n \cdot q$ son suficientemente grandes como para aproximar la binomial a una normal (ambos mayores que 5).
- Calculemos $P[x > 50]$ mediante el siguiente proceso:

$$x \text{ es } B(2\,000;\ 0{,}02) \rightarrow x' \text{ es } N(40;\ 6{,}26) \rightarrow z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$P(x > 50) = P[x' \geq 50{,}5] = \left[z \geq \frac{50{,}5 - 40}{6{,}26}\right] = P\left[z \geq 1{,}68\right].$$

26. Para cada una de las siguientes distribuciones binomiales indiquemos, calculando los valores $n \cdot p$ y $n \cdot q$, si se pueden aproximar a una normal o no. En caso afirmativo, determinemos cuál es la distribución normal correspondiente, dando su media y su desviación típica:

    a) $B(100;\ 0{,}1)$; b) $B(200;\ 0{,}99)$; c) $B(200;\ 0{,}03)$; d) $B(1\,000;\ 0{,}02)$; e) $B(20;\ 0{,}7)$; f) $B(50;\ 0{,}9)$.

    Solución:

    a) $B(100;\ 0{,}1) \cong N(10;\ 3)$; b) $n \cdot p = 2$, no conviene aproximarla; c) $B(200;\ 0{,}03) \cong N(6;\ 2{,}41)$;
    d) $B(1\,000;\ 0{,}02) \cong N(20;\ 4{,}42)$; e) $B(20;\ 0{,}7) \cong N(14;\ 2{,}05)$; f) $n \cdot q = 5$; $B(50;\ 0{,}9) = N(4{,}5;\ 2{,}12)$.

27. Calculemos las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente (en todas ellas tengamos en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua).

    a) x es $B(100;\ 0{,}1)$. Calculemos $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ y $P[5 < x < 15]$;

    b) x es $B(1\,000;\ 0{,}02)$. Calculemos $P[x > 30]$ y $P[x < 80]$;

    c) x es $B[50;\ 0{,}9]$. Calculemos $P[x > 45]$ y $P[x \leq 30]$.

    Solución:

    a) $P[x = 10] = 0{,}1272$; $P[x < 2] = 0{,}0023$; $P[5 < x < 15] = 0{,}8664$; b) $P[x > 30] = 0{,}0089$;

    $P[x < 80] = 1$; c) $P[x > 45] = 0{,}409$; $P[x \leq 30] = 0$.

28. Un test consta de 100 preguntas con cuatro respuestas optativas cada una. Si se responde totalmente al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar 50 o más preguntas? ¿Cuál es la probabilidad de acertar entre 25 y 75 preguntas? ¿Cuál es la probabilidad de acertar menos de 25? ¿Y más de 75?

    Solución:

    P(acertar 50 o más) = 0; P(acertar entre 25 y 75) = 0,4562 (sin incluir 25 y 75); P(acertar entre 25 y 75) = 0,5438 (incluyendo 25 y 75); P(acertar menos de 25) = 0,4562; P(acertar más de 75) = 0.

29. La probabilidad de que una copa de cristal se rompa cuando es transportada es del 1%. Si se transportan 1 000 copas, ¿cuál es el número esperado de roturas? ¿Y la desviación típica? ¿Cuál es la probabilidad de que se rompan 20 copas o más?

Solución:

$\bar{x} = 10$; $\sigma = 3{,}14$. La probabilidad de que se rompan 500 o más copas es prácticamente nula.

30. En una bolsa hay 2 000 bolas: 1 000 blancas y 1 000 negras. Si sacamos 10 bolas, ¿cuál es la probabilidad de que las 10 sean blancas? ¿Y la probabilidad de que al menos 7 sean blancas?

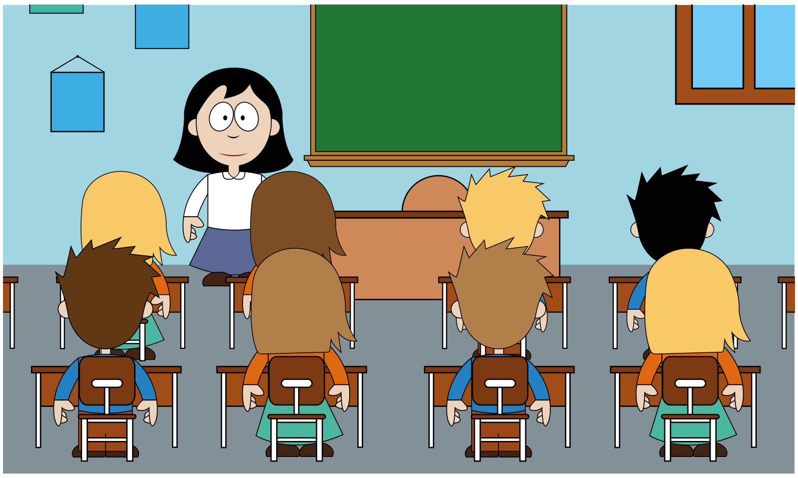
Solución:

Si se supone que la bola es reemplazada: *P*(10 blancas) = 0,0009; *P*(al menos 7 blancas) = 0,1736.

31. Un centro de enseñanza va a presentar, en este curso, 240 alumnos al examen de selectividad y se sabe que, de ese centro, suele aprobar el 95% de los presentados. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben más de 200? ¿Y la de que aprueben más de 220? Calculemos, también, la probabilidad de que aprueben más de 230 alumnos y la de que lo hagan más de 235.

Solución:

P(más de 200) = 1; *P*(más de 230) = 0,2776; *P*(más de 220) = 0,9911; *P*(más de 235) = 0,0192.



32. Una gran plantación está infectada por una nociva especie de escarabajos, y se estima que la plaga la componen un millón de estos insectos. Desde diversos aviones, se rocía la plantación con un insecticida del que se espera acabe con el 80% de los perjudiciales bichos. ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan 500 000 escarabajos o menos? ¿Y la de que sobrevivan más de 300 000? ¿Y la de que sobrevivan entre 100 000 y 200 000 escarabajos?

Solución:

P(sobrevivan 500 000 o menos) ≅ 1; *P*(sobrevivan más de 800 000) ≅ 0; *P*(sobrevivan entre 600 000 y 900 000) ≅ 0.

33. Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenido sea menor que 100?

Solución:

Prácticamente nula.

34. En una distribución $B[5; 0{,}2]$, calculemos $P[x = K]$ para $K = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. Calculemos la suma

$0 \cdot P[x = 0] + 1 \cdot P[x = 1] + 2 \cdot P[x = 2] + \ldots + 5 \cdot P[x = 5]$ y comprobemos que el resultado es $5 \cdot 0{,}2 = 1$.

Solución:

$[x = 0] = 0{,}3276$; $P[x = 1] = 0{,}4096$; $P[x = 2] = 0{,}2048$; $P[x = 3] = 0{,}0512$; $P[x = 4] = 0{,}0064$;

$P[x = 5] = 0{,}0003$.

35. Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, y solo una de las cuales es correcta. Un alumno contesta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente más de tres preguntas? ¿Cuál la de que conteste mal a todas?

Solución:

P(3 correctas) = 0,2502; P(todas mal) = 0,056.

36. En el examen descrito en el ejercicio anterior, un alumno sabe las respuestas a 5 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que responda bien a más de 5? Observemos que, al conocer la respuesta a 5 preguntas, solo deja al azar otras 5. Es, pues, una binomial $B[5; 0{,}25]$.

Solución:

P(más de 5 correctas) = 0,7626.

37. Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota el color y se vuelve a meter; y se realiza 5 veces esta experiencia. Calculemos la probabilidad de obtener: a) 3 rojas; b) menos de 3 rojas; c) más de 3 rojas; d) alguna roja.

Solución:

a) 0,1323; b) 0,83692; c) 0,0307; d) 0,8319.

38. Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con 3 respuestas de las que solo una es correcta. Calculemos la probabilidad de que un alumno, que contesta al azar, acierte: a) 20 o más preguntas; b) más de 30 preguntas.

Solución:

a) 0,1977; b) 0.

39. En el examen descrito en el ejercicio anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a 30 o más?

Solución:

$P = 0{,}9732$.

40. En una ciudad se han contado 4 960 familias con 5 hijos. ¿Cuántas de ellas, aproximadamente, tienen 2 chicos y 3 chicas? (Tómese $P[\text{varón}] = P[\text{hembra}] = 0{,}5$).

Solución:

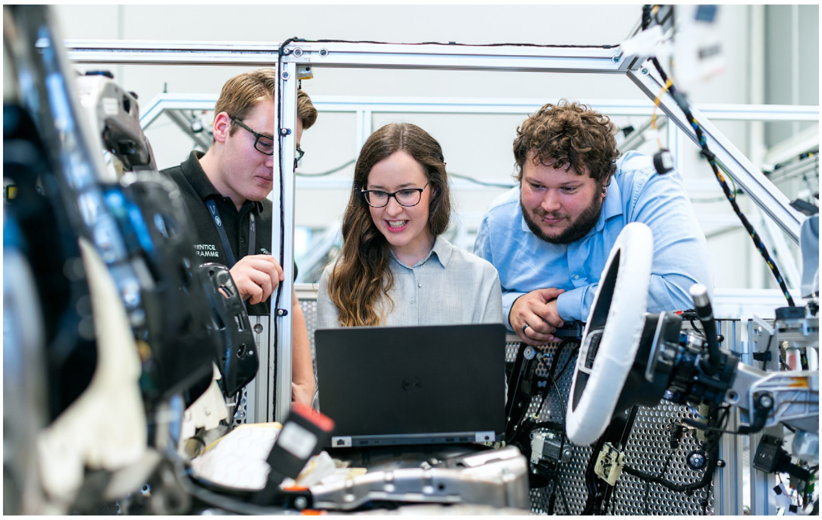
Entre 1 515 y 1 585.

41. En un proceso de fabricación de motores para coches, y antes de la revisión previa a la venta, la probabilidad de que un motor tenga algún defecto es de 0,05. Entre cuatro motores sin revisar, calculemos la probabilidad de que:

a) no haya ninguno defectuoso; b) haya alguno defectuoso; c) haya más de uno defectuosos.

Solución:

a) 0,8145; b) 0,1854; c) 0,014.



42. En el mismo supuesto del problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que entre 100 motores haya más de 10 con algún defecto?

Solución:

0,0057.

43. La probabilidad de que una persona, su padre y su abuelo paterno tengan el mismo cumpleaños es $\left(\frac{1}{365}\right)^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$. En una ciudad con dos millones de habitantes: a) ¿cuántos habrá, por término medio, que presenten esa curiosa coincidencia?; b) ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 10?; c) ¿cuál es la probabilidad de que haya más?

Solución:

a) 15; b) 0,0778; c) 0,9929.

44. Una moneda se lanza 400 veces. Calculemos la probabilidad de que el número de caras difiera de 200 en más de 10. ¿Y de que difiera en más de 20?

Solución:

0,3174 y 0,0452.

45. En un cubilete echamos 10 dados. Los tiramos y recogemos una vez tras otra durante todo un año, a razón de 3 segundos por tirada. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido 6 en los diez dados alguna vez? [Si llama n al número de veces que transcurren 3 segundos en un año y $p = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 1{,}6 \times 10^{-8}$ se trata de calcular $1 - P[x = 0]$ en una distribución binomial $B(n, p)$].

Solución:

0,1595.

46. El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan 46 números. ¿Cuál es la probabilidad de obtener premio en, al menos, 10 de ellos?

Solución:

0,0183.

47. En un examen hay veinte preguntas que se contestan con sí o no. Pedro desconoce totalmente la materia de esa prueba. ¿Qué probabilidad tiene de acertar 15 de esas preguntas? ¿Cuánto vale la media? ¿Y la desviación típica? ¿Qué probabilidad tiene de acertar más de 10 preguntas y aprobar?

Solución:

P(acertar 15) = 0,0147; $\bar{x} = 10$; $\sigma = \sqrt{5} = 2{,}236$; P(acertar más de 10) = 0,4129.

48. En una fiesta hay tantos chicos como chicas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 7 personas haya 3 chicas? ¿Y la de que haya al menos 3 chicas?

Solución:

0,2734 y 0,7734.

49. Un tipo de piezas requiere de 4 soldaduras. Se hace un control de calidad a 1 000 de esas piezas y se obtienen los siguientes resultados:

Soldaduras defectuosas	0	1	2	3	4
Piezas	603	212	105	52	28

¿Se ajustan estos datos a una binomial? Si la probabilidad de que una soldadura fuese defectuosa es de 0,1, ¿cuál es el número esperado de piezas con una soldadura defectuosa?

Solución:

No; de serlo, sería de la forma $B(4, p)$. Entonces:

$$P[x = 0] = (1 - p)^4 \cong \frac{503}{1000} \quad p \cong 1 - \sqrt[4]{0{,}503} = 0{,}157$$

y, por otro lado:

$$P\left[x = 4\right] = p^4 \cong \frac{26}{1000} \rightarrow p \cong 1 - \sqrt[4]{0{,}026} = 0{,}401$$

con lo que obtenemos datos contradictorios. Si $p = 0{,}1$, entonces $P[x = 1] = 0{,}291$; entre 1 000 piezas, habría aproximadamente 291 con una soldadura defectuosa.

50. Si el 1% de las soldaduras son defectuosas y revisamos 2 000 soldaduras, ¿cuál es la probabilidad de que el número de soldaduras defectuosas sea menor que 40?

Solución:

Prácticamente 1.

51. Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta. Para aprobar, hace falta responder correctamente 25 preguntas; para un notable, 35; y para un sobresaliente, 45 preguntas. Un estudiante responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar? ¿Y de sacar un notable? ¿Y un sobresaliente?

    Solución:

    P(Apro.) = 0,0089; P(Not.) = 0; P(Sobr.) = 0.

52. De un total de 5 000 familias de 4 hijos, ¿de cuántas de ellas cabe esperar que tengan un hijo varón?

    Solución:

    Aproximadamente, 1 250 familias.

53. La probabilidad de que un aparato de TV, antes de revisarlo, sea defectuoso es de 0,02. Al revisar 5 aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso? ¿Y la de que haya alguno defectuoso? ¿Y la de que haya uno defectuoso? ¿Y la de que los 5 sean defectuosos?

    Solución:

    P(Ninguno defect.) = 0,9039; P(Uno defec.) = 0,0922; P(Cinco defec.) = 0,0000000032 = 0.

54. Se colocan en un estante los 6 tomos de una cierta obra de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que el orden sea el correcto?

    Solución:

    0,0013.

Población y muestra

Todos los datos... ¡Imposible!

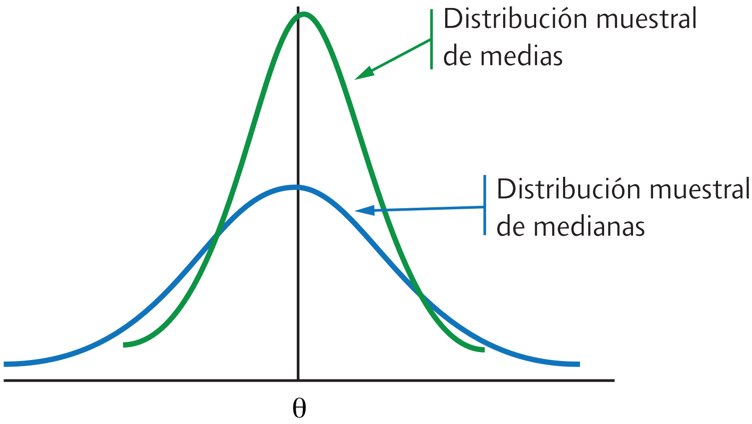
Imaginemos que estamos interesados en el estudio de algunas características (altura, peso, número de hermanos, cociente intelectual...) de los estudiantes del Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) español. El conjunto de todos ellos es la población objeto de estudio.

Para estudiar poblaciones tan enormes como esta es necesario recurrir a una muestra, esto es, limitar la investigación a un pequeño número de sus integrantes y extrapolar a toda la población los resultados obtenidos. Al proceder de este modo son cruciales las siguientes cuestiones:

- Cómo se selecciona la muestra y qué tamaño ha de tener.
- Hasta qué punto son válidas para la población las conclusiones obtenidas a partir de la muestra.

La obtención y el posterior tratamiento de muestras son de primerísima importancia en la estadística actual. Por eso es fundamental conocer las distribuciones obtenidas de muestras y su relación con las de la población.

Medidas muestrales



Se llama *media muestral* a la media obtenida a partir de los individuos de una muestra. Si se calculara la media muestral de todas las posibles muestras, de un cierto tamaño, que se pueden extraer de una población, la distribución de los resultados es lo que se llama *distribución de las medias muestrales*, que es de gran importancia. Veámosla en un ejemplo.

Un dado puede ser lanzado infinitas veces. El resultado de cada lanzamiento es un individuo de esta población infinita. Los resultados de diez lanzamientos son una muestra. Por ejemplo:

$$\{2, 5, 6, 3, 3, 2, 6, 3, 2, 1\}$$

es una muestra de tamaño 10, cuya media es 3,3.

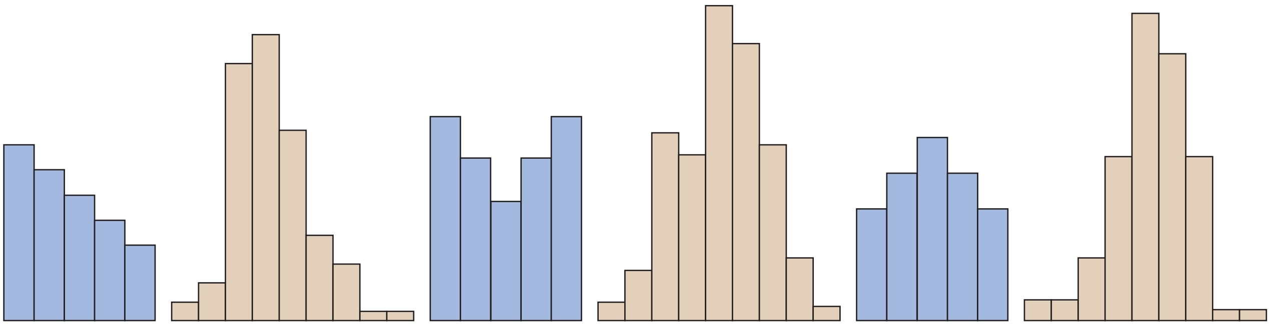
Otra vez la curva normal

De la población anterior referente al lanzamiento de un dado, tomamos al azar 200 muestras de tamaño 10. Sus medidas son 200 números comprendidos entre 1 y 6. Encontramos la distribución que se muestra a continuación:

Observemos cómo, a partir de una población uniforme, se ha obtenido, mediante las medias muestrales, una población similar a la normal. Este resultado no es casual, sino que, al contrario, se generaliza mediante el siguiente teorema:

Cualquiera que sea la población de partida, las medias de las muestras de n individuos se distribuyen de forma tanto más parecida a una curva normal cuanto mayor sea *n*.

Este es el *teorema central del límite* que explica por qué aparece con tanta frecuencia la curva normal. Su efecto se percibe, incluso, para muestras muy pequeñas. Observemos las siguientes distribuciones (en marrón) de las medias de 100 muestras de tamaño 5, extraídas aleatoriamente, mediante computadora, de las poblaciones (en azul) que están a su izquierda:



Ideas erróneas sobre la probabilidad

En un diario madrileño apareció, hace unos años, la noticia de que un muchacho inglés, Steven, nacido un 6 de septiembre, tenía su cumpleaños coincidente con el de su padre y el de su abuelo. El periodista se admiraba muchísimo de tal coincidencia. Sin embargo, vamos a ver que la cosa no es para tanto (al periodista le sorprendió la coincidencia del cumpleaños en las tres generaciones y no que este fuera el 6 de septiembre).

Calculemos, pues, la probabilidad de que una persona, su padre y su abuelo paterno, tengan su cumpleaños en el mismo día, cualquiera que sea ese día:

$$P[\text{cump. del padre} = \text{cump. del hijo}] = \frac{1}{365}$$

$$P[\text{cump. abuelo} = \text{cump. padre} = \text{cump. hijo}] = \left(\frac{1}{365}\right)^2 = 0{,}0000075.$$

El resultado (75 diezmillonésimas) significa que, por término medio, 75 de cada 10 millones de personas cumplen esta propiedad, por lo que no hace falta buscar fuera de España, y de Argentina tampoco, gente que la cumpla. Puesto que el periódico en que aparecía la noticia era madrileño, digamos que en Madrid, en aquel momento con (3 500 000 habitantes), habría, aproximadamente, unas 26 personas a las que les pasaba lo mismo que a Steven.

Por último, aprovechemos que acabamos de estudiar la distribución binomial para calcular la probabilidad de que en Madrid hubiera, al menos, 20 de esas coincidencias:

se trata de calcular $P[x \geq 20]$ en una distribución binomial

$B(3\,500\,000;\ 0{,}0000075)$.

Puesto que $np = 26{,}25 > 5$ podemos aproximarla a una normal de media $\bar{x} = np = 26{,}25$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = 5{,}12$.

$$x : B(3\,500\,000;\ 0{,}0000075) \rightarrow x' : N(26{,}25;\ 5{,}12) \rightarrow z : (0{,}1)$$

$$P[x \geq 20] = P[x' > 19{,}5] = P\left(z > \frac{19{,}5 - 2625}{5{,}12}\right) = P[z > -1{,}32] = P[z < 1{,}32] = \sigma(1{,}32) = 0{,}9066.$$

Es muy probable, pues, que en la propia ciudad del periodista hubiera veinte o más personas para las que concurriera la coincidencia que tanto le asombraba. Mucho menos fácil es que esta coincidencia se dé en fecha fija del 1 de enero, por ejemplo; más difícil aún, es que sea el 29 de febrero. ¿Podemos calcular cuántos, aproximadamente, de los 8 000 millones de habitantes de la Tierra cumplen años el 29 de febrero, junto con su padre y su abuelo, tanto si estos viven como si no? ¿Qué probabilidad hay de que en la Tierra haya al menos veinte casos de estos?

LAURENT MOÏSE SCHWARTZ

Laurent Schwartz nació el 5 de marzo de 1915 en París, Francia. Murió el 4 de julio de 2002 en la misma ciudad. Era un matemático francés, conocido por su trabajo en la teoría de las distribuciones.

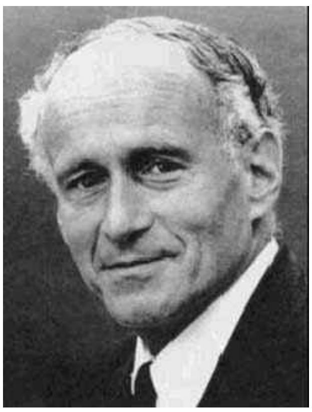
Su biografía

Laurent Schwartz procedía de un entorno judío. Su padre, Anselme Schwartz (1872-1957), nació en Balbronn, cerca de Westhoffen, en Alsacia, poco después de la guerra franco-prusiana de 1870-1871 que resultó en la anexión de Alsacia a Alemania. Era francés y no le gustaba la idea de vivir en Alemania, por lo que a los catorce años dejó su ciudad natal y se fue a París, donde se convirtió en cirujano. Se casó con su prima hermana, Claire Debré (1888-1972), hija de un rabino, en 1907. Aunque Anselme se crio en la fe judía, se hizo ateo y educó a sus hijos como ateos.

En su familia había muchas personas brillantes, como el hermano de Claire, el profesor Robert Debré (1882-1978), el fundador de Unicef, y el hijo de Robert Debré, Michel Debré (1912-1996), quien se convirtió en un político de gran éxito siendo primer ministro de Francia entre 1959 y 1962. También había destacados matemáticos en la familia extendida: Jacques Hadamard estaba casado con una hermana de la madre de Claire Debré. Laurent era el mayor de tres hijos, teniendo como hermanos a Daniel (nacido en 1917) y Bertrand (nacido en 1919).

Cuando tenía once años, Laurent contrajo polio. Aunque se recuperó en pocos meses, la enfermedad lo dejó bastante débil durante toda su vida. En septiembre de 1926, cuando aún estaba en la fase de recuperación de la poliomielitis, sus padres compraron una casa de campo en Autouillet. Era una casa grande con magníficos jardines rodeados de prados y campos en los que los niños podían jugar. Cuando Laurent era joven, la familia pasaba todos los fines de semana en Autouillet pero vivían en París durante la semana. En el liceo al que asistió en París, Schwartz se destacó tanto en matemáticas como en las lenguas clásicas del griego y el latín.

Se enfrentó a una elección difícil, particularmente después de llegar primero en el "*concours général*" nacional en latín, y cuarto en traducción. Tuvo que elegir entre pasar sus últimos años escolares estudiando filosofía y humanidades para prepararse para los estudios universitarios en los clásicos o estudiando matemáticas y filosofía. Su madre, quien siempre había jugado un papel importante animando a su hijo a estudiar, le pidió consejo a su hermano Robert Debré. Su experiencia médica radicaba en el cuidado de niños y dio su opinión profesional de que Schwartz debería estudiar matemática.



Laurent Schwartz

Esto, unido a las mismas opiniones de sus profesores del liceo, llevó a Schwartz a dejar el latín, estudiar tanto matemática como filosofía y cursar el bachillerato en ambas materias. Durante sus últimos años en el *lycée* Janson de Sailly tomó cursos de matemáticas y filosofía. Se enamoró de la geometría, impartida por un maestro inspirador, pero quedó decepcionado con el curso de filosofía, donde la enseñanza era mucho menos interesante. También en el liceo Janson de Sailly se enamoró de Marie-Hélène Lévy, que estaba en la clase con él. Marie-Hélène era hija de Paul Lévy.

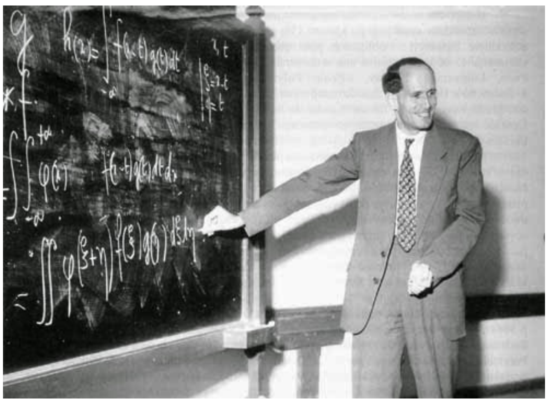
Schwartz ingresó a la *École Normale Supérieure* de París en 1934, donde fue instruido por algunos de los principales matemáticos del mundo. En 1935 se comprometió con Marie-Hélène, quien también estudió matemática. Como buen padre, Paul Lévy ejerció una importante influencia matemática en su hija, ya que le transmitió el amor por la teoría de la probabilidad y el análisis funcional, temas que se convertirían en sus principales intereses de investigación a lo largo de su vida.

La universidad constituye a menudo una instancia para que los estudiantes se involucren en la política y, de hecho, Schwartz fue activo respecto de sus creencias de izquierda. Sus actividades políticas en este momento se describen así: "El fermento intelectual de estos años fue paralelo al compromiso político. Aunque de origen tradicionalmente derechista, fue un firme partidario del Gobierno del Frente Popular de Léon Blum, hasta que se desilusionó por su fracaso en apoyar a los republicanos españoles. De manera similar, sus simpatías por el comunismo pronto se vieron empañadas por los juicios espectaculares de Joseph Stalin, aunque luego pasó diez años bajo influencia trotskista, hasta 1947. Afirmó nunca arrepentirse, a pesar de que esto casi le impidió viajar a Estados Unidos para recibir la medalla Fields.

Después de una destacada carrera universitaria, se graduó en la *Agrégation de Mathématiques*, en 1937. En esta etapa decidió que haría su servicio militar obligatorio en lugar de retrasarlo. Fue asignado a la DCA (*Défense contre les aéronefs*, Defensa Contra Aeronaves), pero siendo físicamente débil y carente de destreza, descubrió que no podía realizar tareas como desmantelar y ensamblar ametralladoras. Fue destinado primero a Ballancourt, luego a Biscarrosse, y aunque tuvo que extender su servicio militar debido a la Segunda Guerra Mundial, nunca entró en combate y fue dado de baja en agosto de 1940.

Durante este tiempo, en 1938 se había casado con Marie-Hélène. De hecho, habían planeado casarse en diciembre de 1935, pero Marie-Hélène contrajo una infección tuberculosa pulmonar y fue enviada a un sanatorio en Passy, Haute Savoie. La separación forzosa de dieciocho meses, tiempo durante el cual solo pudieron comunicarse por carta, había sido sumamente difícil para ambos. Después de que Schwartz haya dejado el servicio militar en 1940, se fue con su esposa a Toulouse, donde sus padres se habían mudado luego de la invasión alemana y la caída de Francia.

Mientras estaba en Toulouse, conoció a Henri Cartan cuando fue a realizar un examen oral en nombre de la *École Normale Supérieure*. De hecho, Marie-Hélène también aprovechó para hablar con Henri Cartan, ya que quería retomar sus estudios matemáticos. Cartan le aconsejó estudiar para un doctorado en Clermont-Ferrand, donde se se había mudado la Universidad de Estrasburgo después de que los ejércitos alemanes invadieran Francia al comienzo de la Segunda Guerra Mundial. Schwartz se convirtió en miembro de la *Caisse National des Sciences* (que luego se convirtió en el *Centre National de la Recherche Scientifique*, CNRS), que lo apoyó hasta finales de 1942. Cuando culminó este patrocinio, recibió fondos de ARS (*Aide à la Recherche Scientifique*), que lo sostuvo hasta el final de la guerra. Schwartz recibió consejos matemáticos de Georges Valiron, que residía en París. Conocía a Valiron por haber asistido a su curso "Funciones de una variable compleja" mientras era estudiante de pregrado.



Laurent Schwartz

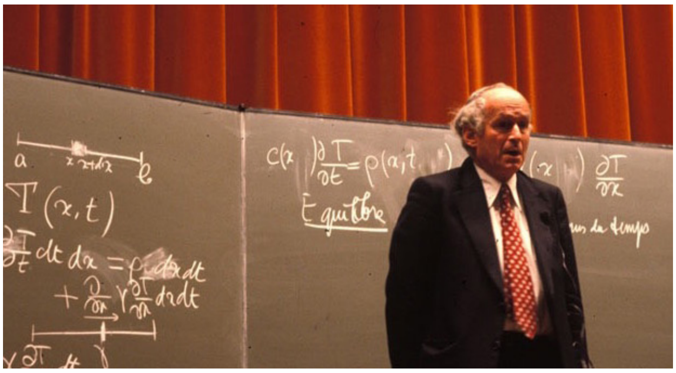
La tesis de Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles*, presentada a la Universidad de Estrasburgo en 1943, contiene el siguiente reconocimiento en cuanto a la ayuda que Valiron había brindado: "Quiero agradecer especialmente a Georges Valiron, que no solo me dio muchos consejos, sino que también, a través de la correspondencia que amablemente entabló conmigo, me ayudó a superar muchas dificultades".

Valiron fue examinador de la tesis, junto con Charles Ehresmann y André Roussel. Schwartz también escribió, en ese mismo trabajo: "También me gustaría expresar mi gratitud a Jacques Hadamard y Paul Lévy, quienes han guiado y enriquecido mi desarrollo matemático".

Durante la guerra, sus actividades políticas, sus afinidades trotskistas y su origen judío lo pusieron en todo tipo de situaciones delicadas. Adoptó una identidad falsa, llamándose a sí mismo Laurent-Marie Sélimartin, y solo gracias a una combinación de habilidad y buena suerte escapó a la detección. Sin embargo, su débil condición física significaba que no podía ayudar al movimiento de la Resistencia. Había sido un partidario acérrimo del partido trotskista desde sus días como estudiante en la *École Normale Supérieure* (ENS), pero sus sentimientos comenzaron a cambiar a lo largo de la guerra: "El trotskismo me dio, durante mis años en la ENS, una educación notable, claramente más avanzada y sofisticada que la de la mayoría de los jóvenes de mi edad. Pero por el extremismo y sectarismo de sus ideas, y por su lenguaje estereotipado, me neutralizó durante la ocupación. Mi juicio sigue siendo extremadamente severo sobre mis propias acciones y las de la mayoría del partido trotskista durante ese período".

En marzo de 1943 nació su hijo, Marc-André; esto solo aumentó el peligro a su alrededor. Marc-André se convirtió luego en escritor y poeta, pero tuvo una vida trágica (ver más adelante). Schwartz pasó el año académico 1944-1945 dando clases en la Facultad de Ciencias de Grenoble antes de mudarse a la de Nancy, por recomendación de Jean Delsarte y Jean Dieudonné, Fue durante este período de su carrera cuando produjo su famoso trabajo sobre la teoría de las distribuciones.

Describimos esta noción con más detalles a continuación, pero, en este punto, citamos la propia descripción de Schwartz acerca de cómo se le ocurrió la idea, en 1944: "En mi juventud solía tener insomnios que duraban varias horas y nunca tomaba pastillas para dormir. Me quedaba en mi cama, la luz apagada y, sin escribir, hacía matemática. Mi energía inventiva se potenció y avancé rápidamente sin cansarme".



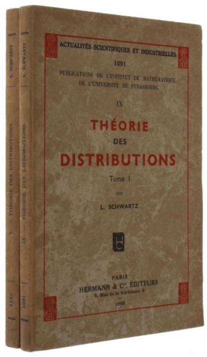
Laurent Schwartz

"Me sentí completamente libre, sin ninguno de los frenos que me imponían mi vida cotidiana y la escritura. Después de algunas horas, especialmente si surgía una dificultad inesperada, me detenía y dormía hasta la mañana. Estaría cansado pero feliz durante todo el día siguiente. [...] En esta noche en particular me sentí seguro de mí mismo y lleno de una sensación de exaltación. No perdí tiempo en apresurarme a explicárselo todo a Henri Cartan, que [...] vivía al lado. Estaba entusiasmado: 'Ahí lo tienes. Acabas de resolver todas las dificultades de la diferenciación. Ahora, nunca más tendremos funciones sin derivadas'".

También siguió siendo políticamente activo, presentándose en las elecciones francesas de 1945 como trotskista y, después de no ser elegido, volvió a presentarse (también sin éxito) en 1946 cuando estaba en Nancy. Durante su estadía en esta ciudad, enseñó a una notable colección de estudiantes, incluidos Bernard Malgrange, Jacques-Louis Lions, François Bruhat y Alexander Grothendieck. Además, se convirtió en una estrella internacional en el mundo matemático dando conferencias en Copenhague en octubre de 1947, por invitación de Harald Bohr, y fue uno de los cuatro oradores principales en el Primer Congreso Matemático Canadiense en Vancouver, en 1949. La hija de Schwartz, Claudine, nació en 1947, se convirtió en matemática y se casó con el matemático Raoul Robert en 1971. En 1953, la esposa de Schwartz, Marie-Hélène, recibió un doctorado de la Universidad de París por su tesis *Formules apparentées à celles de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications de une variété à n dimensions dans une autre*, de la que Valiron fue examinador, como lo había sido para la de su esposo diez años antes.

En 1953 Schwartz regresó a París, donde se convirtió en profesor. Enseñó en la *École Polytechnique* de París de 1959 a 1980. Luego pasó tres años en la Universidad de París VII antes de jubilarse en 1983. Hablaremos a continuación de sus notables contribuciones matemáticas, pero antes de verlas, hagamos un recuento de algunas de las actividades políticas de las que participó durante su carrera en París. En 1956 fue uno de los líderes de las protestas en Francia contra la invasión rusa de Hungría. Al año siguiente, se involucró en un evento mucho más cercano a él, personalmente, el "Asunto Audin" en Argelia: "Audin, matemático y comunista radicado en Argel, estaba escribiendo su tesis bajo la supervisión de Schwartz. Pero en junio de 1957, los paracaidistas secuestraron, torturaron y mataron a este hombre de 25 años, padre de tres hijos y opositor del gobierno francés en Argelia". Schwartz fue incansable en sus llamados a la justicia y organizó una presentación de la tesis del joven en su ausencia.

Vocal en su oposición a la campaña francesa, firmó la famosa "*Declaration des 121*" a favor de la insubordinación militar. La respuesta de Pierre Messmer, ministro del Ejército francés (y, por lo mismo, de la *École*), fue despojarlo de su puesto en la Politécnica, por razones de "sentido común y honor". Schwartz respondió que como el Ejército comandado por Messmer había sancionado la tortura y promovido a los torturadores, tales afirmaciones eran absurdas. Tras un breve exilio en Nueva York, recuperó su puesto dos años más tarde...



La contribución sobresaliente que Schwartz hizo a la matemática a fines de la década de 1940 fue su trabajo sobre la teoría de las distribuciones. Antes dimos su propia descripción de la noche en que se le ocurrió la idea. La primera publicación en la que presentó su trabajo fue *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, que apareció en 1948.

La teoría de las distribuciones es una ampliación considerable del cálculo diferencial e integral. Oliver Heaviside y Paul Dirac habían generalizado el cálculo con aplicaciones específicas en mente. Sin embargo, estos y otros métodos similares de cálculo formal no se construyeron sobre una base matemática abstracta y rigurosa.

El desarrollo de la teoría de las distribuciones de Schwartz puso métodos de este tipo sobre una base sólida y amplió enormemente su rango de aplicación, proporcionando herramientas poderosas para utilización en numerosas áreas.

Las conferencias que dio en Vancouver en 1949 se convirtieron en la base de su tratado en dos volúmenes, *Théorie des distributions* (1950, 1951). Irving Segal escribe en una reseña: "Esta es una descripción generalmente clara, cuidadosamente organizada y detallada de los aspectos básicos de la teoría de las 'distribuciones' debido al autor, y descrito por él en publicaciones anteriores [...] Esta teoría proporciona un formalismo conveniente para muchas situaciones comunes en análisis teórico y aplicado, pero su mayor significado puede estar en relación con las ecuaciones diferenciales parciales, particularmente las de tipo hiperbólico, donde su adaptabilidad a problemas locales le da una ventaja sobre el espacio de Hilbert (y otras técnicas principalmente globales)".

En el artículo sobre "Análisis" en la *Encyclopedia Britannica*, François Trèves describe el trabajo de Schwartz de la siguiente manera: "[...] La idea de Schwartz (en 1947) era dar una interpretación unificada de todas las funciones generalizadas que se habían infiltrado en el análisis, como funcionales lineales (continuas) en el espacio Cç de funciones infinitamente diferenciables que se desvanecían fuera de conjuntos compactos".

Proporcionó una descripción sistemática y rigurosa, totalmente basada en el análisis funcional abstracto y en la dualidad. Es de destacar que tal enfoque tuvo un precedente en la presentación de André Weil de la integración de grupos localmente compactos. Debido a las demandas de diferenciabilidad en la teoría de la distribución, los espacios de funciones de prueba y sus duales son algo más complicados.

Esto ha dado lugar a extensos estudios de espacios vectoriales topológicos, más allá de las categorías familiares de los espacios de Hilbert y Banach, los cuales, a su vez, han proporcionado nuevos conocimientos útiles en algunas áreas de análisis propiamente dichas, como ecuaciones diferenciales parciales o funciones de varias variables complejas. Las ideas de Schwartz se pueden aplicar a muchos otros espacios de funciones de prueba además de Cç, como él mismo y otros han demostrado.

Harald Bohr entregó una medalla Fields a Schwartz en el Congreso Internacional de Matemáticos en Harvard el 30 de agosto de 1950, por su trabajo sobre la teoría de las distribuciones. Harald Bohr afirmó acerca del artículo de Schwartz de 1948: "[...] que sin duda se mantendrá como uno de los artículos matemáticos clásicos de nuestro tiempo. [...] Creo que todos sus lectores, como yo, habrán experimentado una considerable y agradable emoción al ver la maravillosa armonía de toda la estructura del cálculo a la que conduce la teoría y al comprender cuán esencial es el avance: su aplicación puede significar muchas partes del análisis superior, como la teoría espectral, la teoría del potencial y, de hecho, toda la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales lineales [...]".

Edificio de la Academia de Ciencias de París

Schwartz ha recibido numerosos premios, medallas y honores, además de la medalla *Fields*. La Academia de Ciencias de París le otorgó premios en 1955, 1964 y 1972, año este último en que fue elegido miembro de la institución. Ha recibido doctorados honorarios de muchas universidades, incluidas Humboldt (1960), Bruselas (1962), Lund (1981), Tel-Aviv (1981), Montreal (1985) y Atenas (1993).

El trabajo posterior de Schwartz sobre cálculo diferencial estocástico es descrito por él en un artículo. Las campañas políticas posteriores con las que se comprometió incluyen aquellas contra la participación estadounidense en Vietnam, la invasión soviética de Afganistán y la guerra rusa contra Chechenia. Sus actividades políticas, sin embargo, llevaron a una tragedia familiar: su hijo Marc-André se suicidó en 1971, como resultado del trauma insuperable que siguió a su secuestro a manos de nacionalistas franceses que buscaban vengarse de su padre por su compromiso con el anticolonialismo y su apoyo a los argelinos que buscaban la independencia.

Con tal participación en las matemáticas y la política, uno podría imaginar que Schwartz no habría tenido tiempo para un pasatiempo importante. Sin embargo, esto sería completamente erróneo, ya que él era un ávido coleccionista de mariposas, con más de 20 000 especímenes.

Entre varios otros libros que ha escrito, podemos mencionar *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques* (1961). Fue revisado por George Temple, quien escribió: "Quienes hayan tenido el privilegio de ver las notas de las conferencias que el profesor Schwartz pronunció en la Columbia Británica hace unos años sabrán que es un maestro de la exposición clara y precisa que puede adaptarse fácilmente a las necesidades de los físicos matemáticos. El título de este volumen se ha elegido claramente con cierto cuidado, para indicar que trata de los métodos matemáticos implicados en la física matemática moderna, y que no es necesariamente un libro de texto introductorio para el físico matemático. El libro ofrece, de hecho, una espléndida introducción a una serie de temas básicos de la física matemática, tratados con un grado de rigor y abstracción que bien puede sorprender al estudiante de física en las universidades británicas [...]".

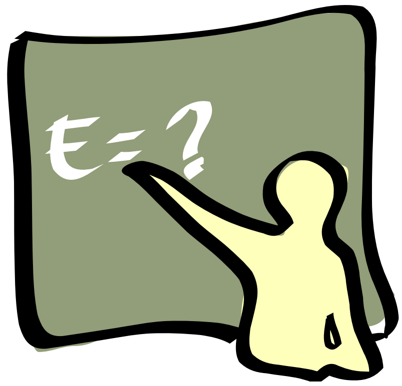
Terminemos este panorama de su vida con dos citas de Schwartz, la primera sobre política y la segunda sobre matemáticas:

“Siempre he pensado que la moralidad en la política era algo esencial, al igual que los sentimientos y las afinidades”.

“Descubrir algo en matemática es superar una inhibición y una tradición. No puedes avanzar si no eres subversivo”.

Schwartz estuvo entre nosotros como profesor visitante en Exactas y nos dejó importantes ideas y métodos con un estilo de trabajo que despertó mucho entusiasmo y el interés de sucesivas generaciones, y que la trágica dictadura de Onganía no logró ahogar.

Un diálogo con los maestros



Otra aventura a las álgebras abstractas del siglo XIX

El álgebra de Boole

La *Investigation of the Laws of Though* de George Boole, de 1854, es ya una obra clásica en la historia de la matemática, porque en ella extendió y clarificó las ideas presentadas en 1847, construyendo tanto la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra, que conocemos hoy como “álgebra de Boole”, y que es a la vez el álgebra de los conjuntos y el álgebra de la lógica. Boole utilizaba las letras $x, y, z, \ldots$ para representar objetos cualesquiera de un cierto subconjunto de cosas (números, puntos, ideas u otras entidades) seleccionadas de un conjunto universal, o universo del discurso, cuya totalidad la representaba con el símbolo o “número” 1. Por ejemplo, si el símbolo 1 representaba al conjunto de todos los europeos, x podría representar a todos los europeos que son ciudadanos franceses, y podría representar a todos los hombres europeos de más de 21 años, y z podría representar a todos los europeos que miden entre 1,50 y 1,80 metros de estatura.

El símbolo o “número” 0 lo tomó Boole para representar el conjunto vacío, que no contiene ningún elemento del conjunto universal. El signo + entre dos letras o símbolos, como en $x + y$, lo consideró representando la unión de los subconjuntos x e y, es decir, el conjunto formado por los elementos que figuran en x o en y, o en ambos. El signo de multiplicación × significaba la intersección de conjuntos, de manera que $x \times y$ representaba el conjunto de todos los elementos que están simultáneamente en el subconjunto x y en el subconjunto y.

En el ejemplo anterior, $x + y$ consistiría en el conjunto de todos los europeos que o son ciudadanos franceses o son hombres y tienen más de 21 años, o bien las dos cosas simultáneamente; $x \times y$ (que se escribe también como $x \cdot y$, o simplemente xy) sería el conjunto de los ciudadanos franceses que son hombres y tienen más de 21 años. (Boole, al contrario que De Morgan, utilizaba la unión excluyente, no permitiendo que hubiera elementos comunes entre x e y, pero en el álgebra de Boole moderna se considera más conveniente tomar la operación + como la unión usual, no excluyente, de conjuntos que pueden tener elementos comunes).

El signo = representa también aquí la relación de identidad (en el sentido extensional para conjuntos). Es inmediato comprobar que las cinco leyes fundamentales del álgebra se verifican en cualquier álgebra de Boole de conjuntos, es decir que $x + y = y + x$, $xy = yx$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$ y $x(y + z) = xy + xz$.

Sin embargo, no todas las reglas del álgebra usual siguen siendo válidas. Por ejemplo, se tiene evidentemente que $1 + 1 = 1$ y que $x \cdot x = x$ (la segunda propiedad aparece en la obra de Boole, pero no la primera, por utilizar la unión excluyente). La ecuación $x^2 = x$ tiene, en el álgebra ordinaria, las dos únicas raíces $x = 0$ y $x = 1$; a este respecto, el álgebra de la lógica y el álgebra ordinaria están de acuerdo. La misma ecuación $x^2 = x$, si la escribimos en la forma $x(1 - x) = 0$, sugiere claramente que $1 - x$ debería representar al complemento del conjunto x, es decir, al conjunto de todos los elementos del conjunto universal 1 que no están en el subconjunto x.

Aunque en el álgebra de Boole es cierto que $x^3 = x$ o bien que $x(1 - x^2) = 0$, o que $x(1 - x)(1 + x) = 0$, la solución en el álgebra ordinaria difiere de la del álgebra de Boole, en la que no hay "números" negativos. El álgebra de Boole difiere también del álgebra usual en que de la igualdad $zx = zy$, donde z es un conjunto no vacío, es decir, no nulo, no se deduce necesariamente que $x = y$; ni tampoco es cierto que si $xy = 0$, entonces o bien x o bien y tengan que ser 0, obviamente.

Boole demostró que su tipo general de álgebra suministraba un algoritmo fácil para el razonamiento silogístico. La ecuación $xy = x$, por ejemplo, expresa elegantemente que todos los x son y; si se sabe también que $yz = y$, es decir que todos los y son z, entonces sustituyendo en la primera ecuación el valor de y dado por la segunda, el resultado obtenido es $x(yz) = x$. Utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación, esta última ecuación queda en la forma $(xy)z = x$, y sustituyendo xy por x, nos queda finalmente que $xz = x$, que es simplemente la manera simbólica y compacta de decir que todos los x son z.

El *Mathematical Analysis of Logic* (1847) y, por supuesto, *The Laws of Thought* (1854) contienen muchas más cosas que el álgebra de conjuntos que hemos esbozado. La segunda obra, en particular, incluye aplicaciones a la teoría de probabilidades. Hoy utilizan frecuentemente el álgebra de Boole no solo los matemáticos puros, sino también otros que lo aplican a problemas de teoría del seguro y de teoría de la información. Las notaciones han cambiado algo desde la época de Boole, y así, como hemos visto, la unión y la intersección se suelen representar hoy por ∪ y ∩, en vez de por + y ×; y el símbolo para el conjunto vacío no es ya el 0, sino generalmente ∅, pero los principios fundamentales son exactamente los mismos que estableció Boole hace más de 160 años.

Hay un aspecto de la obra de Boole que no está relacionado apenas con sus tratados de lógica ni con la teoría de conjuntos, pero que conoce bien cualquier estudiante de ecuaciones diferenciales. Se trata del algoritmo relativo a los operadores diferenciales que introdujo Boole para facilitar el tratamiento de las ecuaciones diferenciales lineales. Si queremos resolver, por ejemplo, la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, podemos escribirla en la forma $(aD^2 + bD + c)y = 0$. Entonces, considerando a D como una incógnita, en vez de como un operador, resolvemos la ecuación algebraica $aD^2 + bD + c = 0$. Si las raíces de la ecuación algebraica son p y q, entonces e^{px} y e^{qx} son soluciones de la ecuación diferencial, y $Ae^{px} + Be^{qx}$ es una solución general de dicha ecuación. Hay otras muchas situaciones en las que Boole, en su *Treatise on Differential Equations* de 1859, establece paralelismos entre las propiedades de los operadores diferenciales (y sus inversos) y las reglas del álgebra. Así pues, los matemáticos ingleses de la segunda mitad del siglo XIX estaban alcanzando de nuevo un alto nivel en el campo del análisis algorítmico, en el que 50 años antes habían mostrado grandes deficiencias.

Boole murió en 1864, solo diez años después de haber publicado sus *Laws of Thought*, pero el reconocimiento a su obra, incluida una graduación honoraria por la Universidad de Dublín, le llegó afortunadamente antes de su muerte. Es curioso observar que Georg Cantor, que como Boole fue uno de los principales exploradores de territorios de la matemática hasta entonces desconocidos del siglo XIX, fue uno de los pocos que se negó a aceptar la obra de Boole.

Continúa de *Leñitas Geométricas* 11, 5ª época. Análisis combinatorio

➔ **3. Muestras y ordenaciones.** Con el concepto de muestra se asocian tanto la propia operación de selección de un subconjunto del conjunto dado como también el resultado de la operación citada, es decir, el subconjunto elegido. En lo sucesivo se tendrá en cuenta precisamente la segunda interpretación, siempre que no se diga lo contrario.

Supongamos que de n-conjunto A_n se ha obtenido una r-muestra:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i), \text{ donde } a_i \in A\text{: } i = 1, 2, \ldots, r_i;\ r \leq n$$

El número r se llama *volumen de la muestra*.

Según sean las condiciones del problema, en las muestras puede tomarse en consideración el orden de sucesión de los elementos en ellas (y en este caso las r-muestras se llaman *r-permutaciones*), o bien dicho orden no se toma en consideración (en este último caso se denominan *r-combinaciones*). Por ejemplo, dos 5-muestras del conjunto $A_n (n \leq 5)$:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \text{ y } (a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$$

representan en sí 5-combinaciones iguales y al mismo tiempo 5-permutaciones diferentes. En general, dos r-permutaciones $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$ son iguales:

$$a = b \text{ únicamente si } a_i = b_i;\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

En las muestras es posible la aparición reiterada de los elementos, y en tal caso ellos se denominan *r-combinaciones con repetición* y *r-permutaciones con repetición*, respectivamente. Una r-permutación (con repetición) de elementos del conjunto A se llama también *palabra de longitud r sobre el alfabeto A*.

Es evidente que los conceptos de r-permutaciones y r-combinaciones, al igual que sus combinaciones, abarcan todos los tipos posibles de muestras. Por eso no hay necesidad de dar el concepto de arreglo (variación), aunque dicho concepto aparece todavía en la literatura, principalmente en los manuales.

La multiformalidad de la solución de los problemas combinatorios observada en las etapas iniciales del desarrollo de las matemáticas condujo a una cuestión natural: ¿cuántos son los procedimientos por medio de los cuales puede realizarse la requerida disposición combinatoria? En particular, el cálculo del número de r-muestras de un n-conjunto fue históricamente uno de los primeros problemas de combinatoria.

Hallemos el número de todas las r-permutaciones posibles (sin repetición) de un n-conjunto. Denotamos el número que se busca mediante $P(n, r)$. El problema se reduce a una aplicación sucesiva de la regla del producto.

En efecto, en el n-conjunto se tienen n posibilidades para elegir el primer elemento de la r-permutación. Una vez realizada tal elección, quedan $n - 1$ posibilidades para la elección del segundo elemento, luego quedan $n - 2$ posibilidades para elegir el tercer elemento, etc.: para la elección del r-ésimo elemento tendremos $n - r + 1$ posibilidades. De acuerdo con la regla del producto,

$$P(n, r) = n(n - 1) \ldots (n - r + 1),$$

de donde se deduce:

$$P(n, n) = n!$$

Para que el resultado sea más completo, admitamos:

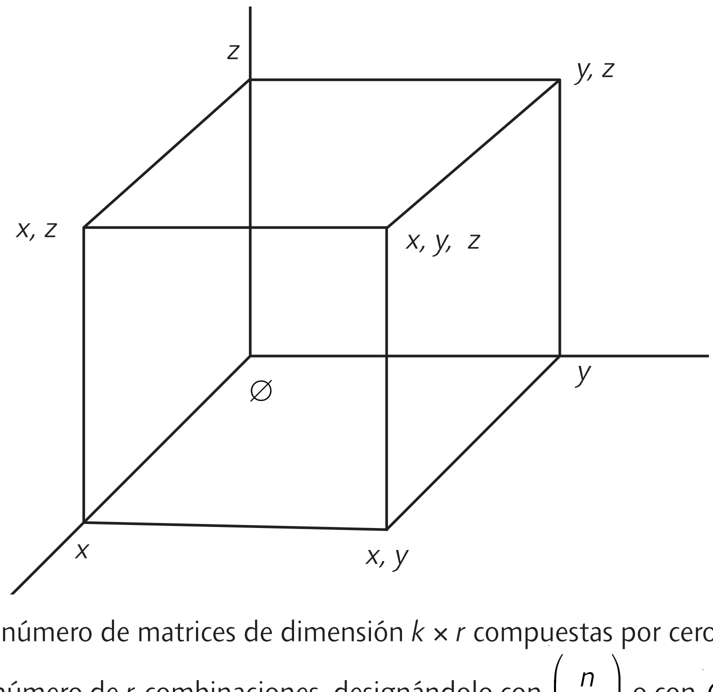
$$P(n, 0) = 0! = 1.$$

Calculemos ahora el número de r-permutaciones posibles con repetición. En este caso, después de elegir cualquier elemento de r-permutación quedan las mismas n posibilidades para elegir el elemento siguiente. Por consiguiente, según la regla del producto, el número de r-permutaciones con repetición del n-conjunto es igual a n'.

Los razonamientos citados aquí se ilustran fácilmente con un ejemplo del esquema de urna, cuyos diferentes tipos se emplean en la teoría de las probabilidades: se tiene una urna dentro de la cual se encuentran colocadas n bolas iguales y de la cual se sacan por turno r bolas. En tal caso resultan posibles dos opciones: la bola sacada o bien se retorna a la urna (elección con retorno) o bien no se retorna (elección sin retorno).

Un ejemplo más. ¿Cuántos subconjuntos tiene un n-conjunto S, es decir, a qué es igual $|P(S)|$. La respuesta será $|P(S)| = 2^n$. Efectivamente, cualquier r-muestra $r = (si_1, si_2, \ldots, si_r)$ donde $r = 1, 2, \ldots, n$, figura en $P(S)$.

A esta r-muestra se le puede poner en correspondencia una n-muestra, compuesta por elementos de dos tipos: ceros, si el elemento no integra la r-muestra R, y unidades, si el elemento figura en R. De este modo, las unidades deben disponerse en los lugares correspondientes a $i_1, i_2, \ldots, i_r$ mientras que los ceros, en los demás lugares. Pero, el número de tales n-muestras (es decir, de n-permutaciones con repetición) de 2-conjunto $[0,1]$ es igual a 2^n, lo que constituye precisamente el resultado buscado. Este mismo problema puede interpretarse como el problema sobre el número de vértices de un hipercubo en el espacio de n dimensiones (el caso de $n = 3$, $S = [x, y, z]$ se muestra en la figura siguiente, donde todos los subconjuntos $P(S)$ son vértices del cubo).



Ejercicio. ¿Cuál es el número de matrices de dimensión $k \times r$ compuestas por ceros y unidades?

Calculemos ahora el número de r-combinaciones, designándolo con $\binom{n}{r}$ o con C_n^r. Comencemos por el caso en que todos los elementos en las r combinaciones son diferentes.

Es fácil ver que el número de r-combinaciones del n-conjunto es $r!$ veces inferior al número de r-permutaciones de los elementos del mismo conjunto. Por consiguiente:

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r(n-r)!}.$$

De aquí se deduce que $\binom{n}{n} = \binom{n-r}{r}$; en particular, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$

Observemos que las r-combinaciones del n-conjunto son sus r- subconjuntos. Con este motivo estudiemos el problema sobre el número de $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-particiones del n-conjunto S, es decir, de particiones ordenadas del tipo $S = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$, en las cuales $T_i \cap T_j = \varnothing$ para $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$, con la particularidad de que T_i es un r_i -subconjunto del conjunto S, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Obviamente, $\sum_{i=k}^{k} r_i = n.$. Razonemos de igual modo que lo hemos hecho al buscar el número $P(n, r)$. Para elegir el r_i-subconjunto T_1 de S se tienen $\binom{n}{r_1}$ posibilidades: entonces el r_2-subconjunto T_2 puede elegirse solo de $n - r_1$ elementos restantes (ya que $T_1 \cap T_2 = \varnothing$) y, por lo tanto, se tienen $\binom{n-r_1}{r_2}$ métodos para la elección de T_2, etc.; el r_k-subconjunto T_k puede ser elegido solo después de haber elegido los r_i-conjuntos T_i, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, por consiguiente de $\binom{n-\sum_{i=1}^{k-1} r_i}{r_k}$ métodos.

Aplicando la regla del producto, obtendremos el número buscado de $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$-particiones del n-conjunto S es igual a:

$$R = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_1}\cdots\binom{\sum_{i=1}^{k-1} r_i}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}.$$

Tomamos en consideración la expresión para $\binom{n}{r}$.

La r-combinación de n-conjunto puede ser interpretada como una $(r, n - r)$-partición de la $(1, 1, \ldots, 1)$-partición que representa simplemente una permutación. Calculemos, por fin, el número de: r-combinaciones con repetición del n-conjunto S. Daremos a conocer tres métodos distintos de obtención de este número con el objeto de mostrar los rasgos específicos de los razonamientos combinatorios.

Primer método. Admitamos que los elementos del conjunto S están numerados por medio de los números 1, 2, ..., n (es decir, S se encuentra en una correspondencia biunívoca con el conjunto de los primeros n números naturales). Entonces, en lugar de las r-muestras del conjunto S podemos analizar las r-muestras (biunívocas) del conjunto $S' = (1, 2, \ldots, n)$ que corresponden a las primeras. Toda r-muestra del conjunto S' puede ser escrita en la forma $A = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, donde $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r$ (la igualdad de los números responde al caso de elementos iguales en la r-muestra correspondiente de S). A la r-muestra A (los elementos en esta muestra no son forzosamente diferentes) la ponemos en correspondencia con el

$$r\text{-conjunto } A' = [a_1 + 0, a_2 + 1, \ldots, a_r + r - 1],$$

en el cual todos los elementos son, evidentemente, diferentes.

Como es fácil de ver, dicha correspondencia es biunívoca, con la particularidad de que los r-conjuntos A' son r-combinaciones sin repetición del $(n + r - 1)$-conjunto $[1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + r - 1]$, cuyo número es igual (como quedó demostrado) a $\binom{n+r-1}{r}$.

Esta es precisamente la respuesta que buscábamos.

Segundo método. Consiste en la obtención de una fórmula recurrente. Se denominan *fórmulas (relaciones) recurrentes*, aquellas que permiten calcular los valores de una magnitud buscada paso a paso, partiendo de los valores "iniciales" conocidos y de los calculados de antemano.

Denotemos mediante (n, r) el número de r-combinaciones con repeticiones del n-conjunto S. Está claro que

$$f(n, 1) = n \text{ y } f(1, r) = 1.$$

(Para cualquier $n > 0$ entero de n elementos pueden elegirse n diferentes 1-combinaciones, es decir, n diferentes elementos; mientras tanto, para cualquier $r > 0$ entero de un elemento se puede obtener solamente una $r$combinación: una r-muestra compuesta por r elementos iguales).

Fijemos en S cierto elemento; entonces, cada r-combinación o bien contiene este elemento o no lo contiene. Si tiene lugar el primer caso, los demás $r - 1$ elementos de esta r-combinación (por tanto, las r-combinaciones que contienen el elemento fijado) pueden ser elegidos empleando los $f(n, r - 1)$ métodos. Si tiene lugar el segundo caso, la r-combinación se elige de $n - 1$ elementos, y entonces, el número de tales r-combinaciones es igual a $f(n - 1, r)$. Empleando la regla de la suma, obtendremos:

$$f(n, r) = f(n, r - 1) + f(n - 1), r. \qquad (1)$$

En particular, al conocer $f(n, 1)$ y $f(1, n)$, tenemos

$$f(n, 0) = f(n, 1) - f(n - 1, 1) = 1,$$

lo que concuerda con el resultado obtenido anteriormente. Ahora obtenemos sucesivamente:

$$f(n, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 2) = f(n, 1) + f(n - 1, 1) + f(n - 2, 2) = \ldots$$

$$= n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2};$$

$$2f(n,3) = f(n,2) + f(n-1,2) + \ldots + f(1,3) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \ldots + 1 = \binom{n+2}{3},$$

etc. Es fácil convencerse de que

$$f(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

satisface la correlación (1) y las condiciones iniciales:

$$f(n, 1) - n; f(1, r) = 1.$$

Tercer método. A una r-combinación con repetición del n-conjunto S (por ejemplo, a *bcb* de $S = [a, b, c, d, e]$) agreguemos todos los n-elementos del conjunto S, y escribamos por orden los $n + r$ elementos obtenidos, disponiendo juntos los elementos iguales: (*abbbccde*). A continuación, dividamos los subconjuntos de elementos iguales mediante $n - 1$ rayas: $(a \mid bbb \mid ccc \mid d \mid e)$. Por fin, sustituyamos por puntos todos los elementos dispuestos entre dos rayas: $(\cdot \mid \cdots \mid \cdot\cdot \mid \cdot \mid \cdot)$. De este modo, en la r-combinación se le asigna (equipara) la colocación de $n - 1$ rayas en $n + r - 1$ intervalos entre $n + r$ puntos. Recíprocamente, en cada colocación de esta índole se restituirá unívocamente la r-combinación que le corresponde. Por ejemplo:

$$(\cdot\cdot \mid \cdot \mid \cdot\cdot \mid \cdot \mid \cdot) \rightarrow (aa \mid b \mid cc \mid d \mid ee) \rightarrow (aabccdee) \rightarrow |a, c, e|.$$

Existen en total $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$ métodos para colocar $n - 1$ rayas en $n + r - 1$ lugares. En consecuencia, existe exactamente la misma cantidad de r-combinaciones con repetición del n-conjunto.

Para concluir, analicemos el concepto relacionado con la operación de ordenación, es decir, la *permutación*. Esta última puede ser examinada desde dos puntos de vista: a) como una totalidad ordenada de elementos del conjunto dado; o bien b) como una perturbación del orden estándar llamado, habitualmente, natural (por ejemplo, el alfabético, el numérico). El caso a) conduce a las r-permutaciones, $r \leq n$, ya descritas anteriormente.

El caso b) conduce a las n-permutaciones (en relación con la definición de la r-permutación) denominadas simplemente *permutaciones* (o sustituciones), que se estudian en la teoría de los grupos.

Sea, por ejemplo, una permutación

$$P = (4, 3, 7, 5, 6, 9, 2, 8, 1, 12, 11, 10),$$

que representa una perturbación del orden natural de los primeros 12 números de la serie natural. Puede ser escrita en forma de una sustitución (en la primera fila se tiene el orden natural y en la segunda, el perturbado).

$$P = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12 \\ 4\ 3\ 7\ 5\ 6\ 9\ 2\ 8\ 1\ 12\ 11\ 10 \end{pmatrix}.$$

Esta notación muestra que, al realizarse la permutación P, el elemento 1 se convierte en 4, el elemento 2 en 3, el 3 en 7, etc. La permutación P puede escribirse también de otro modo:

$$P = (1, 4, 5, 6, 9)\ (2, 3, 7)\ (10, 12)\ (8)\ (11), \qquad (2)$$

donde cada paréntesis es una permutación que actúa solo contra los elementos encerrados dentro del paréntesis dado y no toca los elementos no encerrados en él [por ejemplo, la sustitución (2, 3, 7) convierte 2 en 3, 3 en 7, y 7, de nuevo en 2].

La representación de una permutación en la forma (2) lleva el nombre de *descomposición en ciclos*. Cualquier permutación puede ser descompuesta en ciclos. Esta descomposición es única, con una exactitud de hasta las permutaciones cíclicas de los elementos dentro de los ciclos. Por ejemplo, (2, 3, 7), (3, 7, 2) (7, 2, 3) son notaciones diferentes de un mismo ciclo.

Supongamos que una permutación contiene k_1 ciclos compuestos por un solo elemento, es decir, 1-ciclos, luego k_2 2-ciclos, k_3 3-ciclos; etc. En este caso, se denomina $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$-permutación, o bien de la forma donde, evidentemente,

$$1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, n^{k_n}. \qquad (3)$$

Teorema. El número de permutaciones del tipo (3) es igual a n!

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{1^{k_1} k_1!\,2^{k_2} k_2! \ldots n^{k_n} k_n!}; \qquad (4)$$

Demostración. Examinemos la notación de una descomposición en ciclos para la permutación del tipo (3), a saber: primero k_1 paréntesis para la notación de los ciclos de longitud 1, luego k_2 paréntesis para la notación de los ciclos de longitud 2, etc. En n posiciones dispuestas dentro de todos los paréntesis podemos poner n elementos, sirviéndonos de n! métodos, y cada vez obtendremos la notación de la permutación del tipo (3).

Sin embargo, entre dichas n! notaciones se encuentran diferentes notaciones de una misma permutación. Aclaremos cuántas notaciones diferentes tiene una permutación. En primer lugar, como hemos observado anteriormente, cada ciclo de longitud i puede escribirse dentro de los márgenes del paréntesis dado mediante i métodos.

En segundo lugar, sirviéndose de k_i métodos se pueden reordenar los paréntesis donde están escritos los ciclos de longitud i. Según la regla del producto obtenemos que una familia de ciclos de longitud i puede ser representada por $i^{k_i} k_i!$ métodos. Al hacer que i recorra los valores de 1 a n, y al aplicar otra vez la regla del producto, concluimos que existen

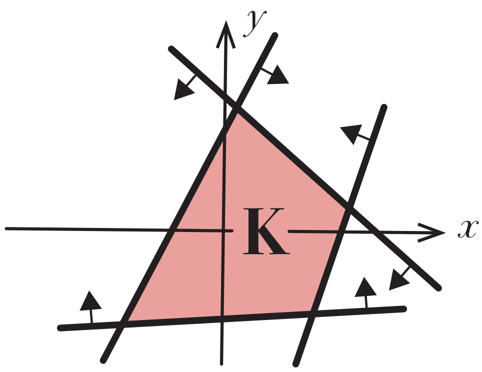
$$N = 1^{k_1} k_1!\,2^{k_2} k_2! \ldots n^{k_n} k_n!$$

métodos para escribir cada permutación del tipo (3).

Por consiguiente, se tienen en total $\frac{n!}{N}$ de tales permutaciones, lo que era necesario demostrar.

La representación de las permutaciones en forma de un producto de ciclos sirve de fuente para muchos problemas combinatorios, por ejemplo: hallar el número de permutaciones del n-conjunto que tengan un número prefijado de ciclos (sin tomar en consideración la longitud de los ciclos); que dejen los elementos dados inmóviles; que tengan un número dado de ciclos de longitud prefijada, etcétera.

No olvidemos lo fundamental



9. Sistema homogéneo de desigualdades lineales. Conjunto fundamental de soluciones

En *Leñitas Geométricas* N° 11, 5ª época, hemos analizado el método utilizado para hallar soluciones de sistemas de desigualdades lineales. No obstante, los méritos evidentes de este método, existe una serie de problemas que no solo con él se resuelven; por ejemplo, este método no permite determinar el conjunto de todas las soluciones de un sistema de desigualdades dado. Precisamente a esta cuestión están dedicados los dos siguientes párrafos de la presente parte.

Las principales dificultades, como veremos, están ligadas al análisis de sistemas homogéneos. Este problema se trata en el presente punto; el caso general (es decir, el de sistemas de desigualdades no homogéneos) se analiza en el punto siguiente. Además, no existe la necesidad imperiosa de limitarse a casos de dos o tres incógnitas; desde el comienzo, examinaremos sistemas compuestos por cualquier número de desigualdades y con cualquier número de incógnitas. Para comodidad dividiremos lo expuesto en una serie de apartados.

➔ **1. Función líneal de *n* argumentos.** La forma general de una desigualdad homogénea con n incógnitas es:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq 0.$$

Veamos por separado la expresión

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \qquad (1)$$

dada en el primer miembro de la desigualdad. Esta expresión se llama *función lineal*. En calidad de argumentos se toman n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por cierto, se puede considerar que la función (1) depende no de n argumentos, sino de uno. Este argumento es el punto

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

situado en un espacio n-dimensional.

En lo sucesivo, acordaremos designar la función (1), brevemente, por $L(X)$:

$$L(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

si es que se dan, no una, sino varias funciones como esta. Entonces, las designamos por $L_1(X)$, $L_2(X)$, etc.

Establecemos dos propiedades de una función lineal, que son:

1. $L(kX) = kL(X)$, siendo X cualquier punto y k cualquier número.
2. $L(X + Y) = L(X) + L(Y)$ siendo X e Y dos puntos cualesquiera. La propiedad 1 se deduce de forma evidente de la igualdad

$$a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \dots + a_n(kx_n) = k(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n).$$

Ahora demostraremos la propiedad 2. Sean

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Entonces:

$$L(X+Y) = a_1(x_1+y_1) + a_2(x_2+y_2) + \ldots + a_n(x_n+y_n) =$$
$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n) = L(X) + L(Y).$$

2. Algunas propiedades de las soluciones de un sistema homogéneo de desigualdades lineales. Sea dado el sistema homogéneo de m desigualdades lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq 0 \text{ (1ª desigualdad)} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \geq 0 \text{ (2ª desigualdad)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geq 0 \text{ (}m\text{ª desigualdad)} \end{array}\right\}$$

Designando los primeros miembros de estas desigualdades respectivamente por: $L_1(X)$, $L_2(X)$, …, $L_m(X)$ el sistema dado adquiere la forma:

$$\left.\begin{array}{r} L_1(X) \geq 0, \\ L_2(X) \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m(X) \geq 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Siendo

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Hacemos las dos siguientes afirmaciones:

1. Si el punto X es solución del sistema (2) y k es un número cualquiera no negativo, entonces el punto kX es también solución del sistema (2).

2. Si X e Y son dos soluciones del sistema (2), entonces $X + Y$ es también solución del sistema (2).

Estas dos afirmaciones se deducen fácilmente de las propiedades de las funciones lineales, ya demostradas. Efectivamente, sea i cualquiera de los números 1, 2, ..., m. Tenemos

$$L_i(kX) = kL_i(X) \geq 0$$

[puesto que $k \geq 0$ y $L_i(X) \geq 0$], y, además,

$$L_i(X + Y) = L_i(X) + L_i(Y) \geq 0$$

[puesto que $L_i(X) \geq 0$ y $L_i(Y) \geq 0$].

De las afirmaciones 1 y 2 se deduce directamente el siguiente corolario.

Si ciertos puntos X_1, X_2, …, X_p son soluciones del sistema (2), entonces cualquier punto de la forma

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p, \qquad (3)$$

siendo k_1, k_2, …, k_p números no negativos, también es solución del sistema (2).

En efecto, cada uno de los puntos k_1X_1, k_2X_2, …, k_pX_p, en conformidad con la afirmación 1, es solución del sistema (2), pero entonces también la suma de estos puntos, en conformidad con la afirmación 2, será solución del sistema (2).

Acordaremos denominar cualquier punto de la forma (3), en la que k_1, k_2, …, k_p son números no negativos, por *combinación no negativa* de los puntos X_1, X_2, …, X_p. Entonces, el corolario deducido en renglones anteriores admite la siguiente formulación:

Una combinación no negativa de cualquier número de soluciones del sistema homogéneo (2) es nuevamente solución de este sistema.

3. Conjunto fundamental de soluciones. Introducimos la siguiente definición:

El conjunto de un número finito de soluciones

$$X_1, X_2, \ldots, X_p$$

del sistema homogéneo (2) se llama *conjunto fundamental de soluciones*, si cualquier solución X de este sistema puede ser dada por la fórmula

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p \qquad (4)$$

siendo k_1, k_2, …, k_p números no negativos.

En este caso, por lo tanto, la fórmula (4), en la cual k_1, k_2, …, k_p son cualesquiera números no negativos, da posibilidad para determinar todas las soluciones del sistema (2).

Por eso, queda claro que la determinación de un conjunto fundamental de soluciones es un problema de primera importancia para el análisis del sistema (2). El objetivo de nuestras formaciones será, precisamente, la elaboración de un algoritmo que permita, mediante operaciones sumamente simple, hallar el conjunto fundamental de soluciones para cualquier sistema (2).

4. Formación de un conjunto fundamental para un sistema compuesto por una desigualdad. Formemos el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq 0, \qquad (5)$$

donde los números a_1, a_2, …, a_n no son, al mismo tiempo, iguales a cero. Con este fin examinaremos, junto con la desigualdad (5), la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0. \qquad (6)$$

Por las propiedades de una función lineal, demostradas en el punto 1, fácilmente se deducen las dos siguientes afirmaciones: **1)** Si X es una solución cualquiera de la ecuación (6) y k cualquier número, entonces kX es también solución de la ecuación (6). **2)** Si X e Y son dos soluciones de la ecuación (6), entonces $X + Y$ es también solución de la ecuación (6).

Demostremos estas afirmaciones. Conforme a la condición, entre los números a_1, a_2, …, a_n los hay no iguales a cero. Supongamos, por ejemplo, que $a \neq 0$. Entonces, la ecuación puede ser expresada en la siguiente forma:

$$x_n = -\frac{1}{a_n}(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}). \qquad (6')$$

Suponiendo $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, …, $x_{n-1} = 0$, hallamos por la última ecuación $x = -\frac{a_1}{a_n}$. Así pues, el punto

$$X_1 = \left(1, 0, \ldots, 0, -\frac{a_1}{a_n}\right)$$

es solución de la ecuación (6). De forma análoga se pueden obtener las siguientes soluciones:

$$X_2 = \left(0, 1, \ldots, 0, -\frac{a_2}{a_n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_{n-1} = \left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Supongamos, ahora, que

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \qquad (7)$$

es cualquier solución de la ecuación (6). Conforme a (6'), obtenemos:

$$\alpha_n = -\frac{1}{a_n}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots a_{n-1}\alpha_{n-1}) = \alpha_1\left(-\frac{a_1}{a_n}\right) + \alpha_2\left(-\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots + \alpha_{n-1}\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Examinando el punto

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \ldots + \alpha_{n-1}X_{n-1} = \alpha_1\left(1, 0, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}\right) +$$

$$+\alpha_2\left(0, 1, \ldots, -\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots + \alpha_{n-1}\left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

nos convencemos de que sus coordenadas coinciden con las coordenadas del punto X. Por eso es válida la igualdad

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1}. \qquad (8)$$

Ahora, agregamos a los puntos antes construidos $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ uno más:

$$X_n = -(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}). \qquad (9)$$

Por las propiedades de las soluciones de la ecuación (6), dadas al principio de este punto, se deduce que el punto X_n también es solución. Ahora no será difícil demostrar el siguiente hecho:

Cualquier solución X de la ecuación (6) es una combinación no negativa de soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$.

En efecto, sea α un número positivo que supera a cualquiera de los números $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{n-1}|$. De (8) y (9) se deduce que

$$X = (\alpha_1 + \alpha)X_1 + (\alpha_2 + \alpha)X_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha)X_{n-1} + \alpha X_n,$$

lo que sirve como demostración de nuestra afirmación.

Para abreviar la escritura, en adelante designaremos el primer miembro de la ecuación (6) por $L(X)$. Elegimos una solución cualquiera de la ecuación $L(X) = 1$ y designamos esta solución por X_{n+1}. Afirmamos que el conjunto de puntas

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1} \qquad (10)$$

es el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad (5).

En efecto, cada uno de los puntos indicados satisface la desigualdad (5). Supongamos, ahora que X' es cualquier solución de esta desigualdad: por consiguiente, $L(X') = a$, siendo $a \geq 0$. Entonces, el punto

$$X = X' - aX_{n+1}$$

satisface la ecuación (6), pues

$$L(x) = L(X') - aL(X_{n+1}) = a - a \cdot 1 = 0.$$

Expresando ahora

$$X' = X + aX_{n+1}$$

y teniendo en cuenta que el punto X es una combinación no negativa de puntos $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$, queda claro que X' puede ser representada en forma de combinación no negativa de los puntos (10).

Veamos un ejemplo concreto. Supongamos que es preciso formar un conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 0 \qquad (11)$$

con tres incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_3$.

En primer lugar, escribimos la siguiente ecuación:

$$-2x_1 - x_2 + x_3 = 0,$$

la cual resolvemos con relación a una de las incógnitas, por ejemplo, a x_3:

$$x_3 = 2x_1 + 4x_2.$$

Ahora consideramos, consecutivamente, una de las incógnitas x_1 o x_2 (que forman el segundo miembro de la ecuación, igual a 1, y las restantes, iguales a cero. Obtenemos las siguientes soluciones:

$$X_1 = (1, 0, 2), X_2 = (0, 1, 4).$$

Seguidamente tomamos en calidad de X_3 al punto

$$X_3 = -(X_1 + X_2) = (-1, -1, -6)$$

y, por último, en calidad de X_4 tomamos una de las soluciones de la ecuación

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1;$$

por ejemplo, $X_4 = (0, 0, 1)$.

Los puntos X_1, X_2, X_3, X_4 forman el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad (11). La solución general tiene la forma

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + k_4X_4 = k_1(1, 0, 2) + k_2(0, 1, 4) + k_3(-1, -1, -6) + k_4(0, 0, 1)$$

o bien,

$$x_1 = k_1 - k_3; \quad x_2 = k_2 - k_3; \quad x_3 = 2k_1 + 4k_2 - 6k_3 + k_4;$$

siendo k_1, k_2, k_3, k_4 números arbitrarios no negativos.

5. Transformación de un conjunto fundamental de soluciones agregando al sistema una desigualdad más. Para aprender a formar conjuntos fundamentales de soluciones, examinaremos primeramente el siguiente problema. Sea dado el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} L_1(X) \geq 0, \\ L_2(X) \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ L_m(X) \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

de desigualdades lineales. Supongamos seguidamente que es conocido el conjunto fundamental de soluciones

$$X_1, X_2, \ldots, X_p,$$

para este sistema. Es preciso confeccionar el conjunto fundamental de soluciones para un sistema, obtenido agregando al (12) una desigualdad más

$$L(x) \geq 0. \qquad (13)$$

Las soluciones del sistema (12) son exactamente todas las combinaciones no negativas de los puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Entre dichas combinaciones debemos elegir aquellas que satisfacen la desigualdad (13) y, además, forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema (12), (13).

Con relación a la función $L(x)$ –primer miembro de la desigualdad (13)– todos los puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$ se pueden dividir en grupos: puntos para los cuales $L(x) > 0$, puntos para los cuales $L(x) < 0$ y, por último, puntos para los cuales $L(x) = 0$. Designamos los puntos del primer grupo por $X_1^+, X_2^+, \ldots, X_k^+$; los del segundo, por $X_1^-, X_2^-, \ldots, X_l^-$; y los del tercero, por $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_s^0$.

Así, pues,

$$X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-, X_1^0, \ldots, X_s^0$$

son los mismos puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$, pero posiblemente situados en otro orden.

Naturalmente, todos los puntos $X_\alpha^+ (\alpha = 1, \ldots, k)$ satisfacen la desigualdad (3). Lo mismo se refiere a $X_\gamma^0 (\gamma = 1, \ldots, s)$. En cuanto a los puntos $X_\beta^- (\beta = 1, \ldots, l)$, entre ellos no hay ni uno que sea solución de la desigualdad (13). No obstante, con cada par

$$X_\alpha^+, \qquad X_\beta^-$$

(un punto "positivo" y otro "negativo") se puede confeccionar una combinación no negativa

$$aX_\alpha^+ + bX_\beta^- \qquad (14)$$

de tal forma que satisfaga la condición $L(x) = 0$. Para ello se debe tomar:

$$a = -L\left(X_\beta^-\right), \quad b = L\left(X_\alpha^+\right). \qquad (15)$$

Efectivamente, los números a y b son positivos y, además,

$$L\left(aX_\alpha^+ + bX_\beta^-\right) = aL\left(X_\alpha^+\right) + bL\left(X_\beta^-\right) = -L\left(X_\beta^-\right)L\left(X_\alpha^+\right) + L\left(X_\alpha^+\right)L\left(X_\beta^-\right) = 0.$$

Designamos el punto (14), en el que *a* y *b* tienen los valores indicados anteriormente, por $X^0_{\alpha\beta}$.

$$X^0_{\alpha\beta} = -L\left(X^-_\beta\right)X^+_\alpha + L\left(X^+_\alpha\right)X^-_\beta. \qquad (16)$$

La respuesta al problema planteado da el siguiente teorema.

Teorema. Los puntos

$$X^+_1, \ldots, X^+_k, X^0_1, \ldots, X^0_s, X^0_{11}, X^0_{12}, \ldots, X^0_{kl} \qquad (17)$$

(en total están escritos $k + s + kl$ puntos) forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema (12), (13).

Para demostrar este teorema, es preciso demostrar también el siguiente lema.

Lema. Cualquier combinación no negativa de puntos X^+_α y X^-_β puede ser expresada como una combinación no negativa de puntos $X^+_\alpha, X^0_{\alpha\beta}$, o también, como una combinación no negativa de puntos $X^-_\beta, X^0_{\alpha\beta}$.

Demostración del lema. Sea

$$X = cX^+_\alpha + dX^-_\beta$$

una combinación no negativa de puntos X^+_α y X^-_β. Examinemos, junto con *X,* el punto

$$X^0_{\alpha\beta} = aX^+_\alpha + bX^-_\beta,$$

donde los números *a* y *b* están determinados por las fórmulas (15).

Comparamos dos razones: $\frac{c}{a}$ y $\frac{d}{b}$. Si la primera es mayor que la segunda, entonces, considerando $\frac{d}{b} = \lambda$ y $\frac{c}{a} = \lambda + \mu$, donde $\mu > 0$ tendremos:

$$X = (\lambda a + \mu a)X^+_\alpha + \lambda b X^-_\beta = \lambda X^0_{\alpha\beta} + \mu a X^+_\alpha,$$

es decir, el punto *X* puede ser expresado en forma de combinación no negativa de X^+_α y $X^0_{\alpha\beta}$. Si dichas razones son iguales, entonces $X = \lambda X^0_{\alpha\beta}$. Y, por último, si $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$, entonces, considerando $\frac{c}{a} = \lambda$ y $\frac{d}{b} = \lambda + \mu$, donde $\mu > 0$, obtenemos:

$$X = \lambda X^0_{\alpha\beta} + \mu b X^-_\beta.$$

El lema está demostrado.

Demostración del teorema. Ante todo, observemos que cada uno de los puntos (17) satisface el sistema (12), (13). Por lo tanto, para demostrar el teorema, nos queda solamente comprobar lo siguiente: si cualquier punto *X* es solución del sistema (12), (13), entonces este punto puede expresarse en forma de combinación no negativa de los puntos (17).

Siendo solución del sistema (12), el punto *X* se expresa en forma de combinación no negativa de puntos fundamentales $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de este sistema:

$$X = a_1X^+_1 + \ldots + a_kX^+_k + b_1X^-_1 + \ldots + b_lX^-_l + c_1X^0_1 + \ldots + c_sX^0_s, \qquad (18)$$

donde todos los coeficientes $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_s$, son no negativos.

Si todos los números $b_1, \ldots, b_l$ son iguales a cero, entonces es evidente que no hay nada que demostrar. Supongamos, por lo tanto, que entre estos números los hay estrictamente positivos.

Observamos pues que entre los números $a_1, \ldots, a_k$ también los habrá estrictamente positivos: de lo contrario resultaría que

$$L(X) = b_1L\left(X^-_1\right) + \ldots + b_lL\left(X^-_l\right) + c_1L\left(X^0_1\right) + \ldots + c_sL\left(X^0_s\right),$$

cosa imposible, puesto que *X* satisface la desigualdad (13).

Supongamos, para determinar, que $a_1 > 0$ y $b_1 > 0$. Valiéndonos del lema, podemos sustituir la suma $a_1X^+_1 + b_1X^-_1$ por una combinación no negativa de los puntos X^+_1, X^0_{11} o de los puntos X^-_1, X^0_{11}. Si en la expresión para el punto *X* se realiza tal sustitución, entonces la cantidad total de coeficientes de

$$X_1^+,\ldots,X_k^+,X_1^-,\ldots,X_l^-,$$

diferentes de cero, disminuye por lo menos en 1. Si en este caso resulta que, en la expresión obtenida nuevamente para X, no todos los coeficientes de $X_1^-,\ldots,X_l^-$ son nulos, entonces se procede otra vez a la sustitución de una de las sumas de la forma $aX_\alpha^+ + bX_\beta^-$ por una combinación no negativa de los puntos $X_\alpha^+, X_{\alpha\beta}^0$ o de los puntos $X_\beta^-, X_{\alpha\beta}^0$. Como resultado, la cantidad de coeficientes de $X_1^+,\ldots,X_k^+,X_1^-,\ldots,X_l^-$, diferentes de cero, disminuye otra vez, por lo menos en 1.

Así continuará hasta obtener una expresión para el punto X en la cual todos los coeficientes de $X_1^-,\ldots,X_l^-$ sean iguales a cero. De tal modo obtenemos una igualdad de la forma:

$$X = a_1'X_1^+ + \ldots + a_k'X_k^+ + \sum_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}^0 + c_1X_1^0 + \ldots + c_sS_s^0,$$

en la que todos los coeficientes del segundo miembro son mayores o iguales a cero. Pero esto es precisamente la expresión requerida para X. El teorema está demostrado.

➔ **6. Existencia y método de formación de un conjunto fundamental de soluciones.** Examinemos un sistema arbitrario de desigualdades homogéneas lineales. Para la primera desigualdad de este sistema se puede formar un conjunto fundamental de soluciones (por el método descrito en el apartado 4). Agregando a esta primera desigualdad la segunda, y basándonos en el teorema del apartado 5, podemos formar un conjunto fundamental de soluciones para el sistema compuesto por las dos primeras desigualdades.

Si a continuación agregamos la tercera desigualdad y seguimos este proceso sucesivamente, obtendremos el conjunto fundamental de soluciones para todo el sistema inicial de desigualdades. De tal forma se demuestra la existencia y, al mismo tiempo, se da el método de formación de un conjunto fundamental de soluciones.

Naturalmente, si en un sistema de desigualdades dado hay un subsistema para el cual podemos de inmediato determinar el conjunto fundamental de soluciones, entonces, en calidad de punto inicial se debe tomar este subsistema, agregándole sucesivamente las restantes desigualdades. Después de una serie de operaciones obtenemos el conjunto fundamental requerido.

Ejemplo. Para el sistema

$$\left.\begin{aligned} L_1(X) &= -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geq 0, \\ L_2(X) &= 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

es preciso hallar todas las soluciones no negativas, es decir, todas las soluciones que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0, \\ x_4 &\geq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Mejor dicho, es preciso hallar la solución común para el sistema (19), (20).

No es difícil ver que para el sistema (20) el conjunto fundamental será el conjunto de los puntos

$$X_1 = (1, 0, 0, 0), \quad X_2 = (0, 1, 0, 0)$$
$$X_3 = (0, 0, 1, 0), \quad X_4 = (0, 0, 0, 1)$$

[efectivamente, cualquier solución $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ del sistema (20) puede expresarse en la forma:

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha_4X_4].$$

Agregamos al sistema (20) la primera de las desigualdades (19) y, para el sistema así obtenido, confeccionamos un conjunto fundamental de soluciones, utilizando el teorema del apartado 5. Para comodidad de cálculos componemos la siguiente tabla:

					$L_1(X)$
x_1	1	0	0	0	–3
x_2	0	1	0	0	–4
x_3	0	0	1	0	5
x_4	0	0	0	1	–6

En cada renglón de esta tabla se da uno de los puntos fundamentales para el sistema (20), así como el valor de la función $L_1(X)$ para este punto. Por la tabla vemos que el único punto del tipo X_α^+ es X_3; los puntos del tipo X_β^- son X_1, X_2, X_4; puntos del tipo X_γ^0 en este caso no hay.

Hallamos los puntos del tipo $X_{\alpha\beta}^0$, que son:

$$X_{31}^0 = 3X_3 + 5X_1 = (5, 0, 3, 0).$$
$$X_{32}^0 = 4X_3 + 5X_2 = (0, 0, 4, 0)$$
$$X_{34}^0 = 6X_3 + 5X_4 = (0, 0, 6, 5).$$

Para no complicar la escritura, en lo sucesivo designaremos estos puntos por Y_1, Y_2, Y_4 (respectivamente), y en lugar de X_3 escribiremos Y_3.

Los puntos Y_3, Y_1, Y_2, Y_4 forman el conjunto fundamental de soluciones para un sistema compuesto por (20) y por la primera desigualdad de (19).

A dicho sistema le agregamos la segunda desigualdad de (19) y componemos la siguiente tabla:

					$L_2(Y)$
Y_1	0	0	1	0	–3
Y_2	5	0	3	0	1
Y_3	0	5	4	0	3
Y_4	0	0	6	5	–13

En la tabla vemos que Y_1, Y_2 cumplen la función de los puntos Y_α^+; que Y_3, Y_4 cumplen la de los puntos Y_β^-, mientras que puntos del tipo Y_γ^0, no hay.

Hallamos los puntos del tipo $Y_{\alpha\beta}^0$.

$$Y_{13}^0 = 3Y_1 + Y_3 = (15, 0, 10, 0) = 5(3, 0, 2, 0),$$
$$Y_{23}^0 = 3Y_3 + 3Y_3 = (0, 15, 15, 0) = 5(0, 3, 3, 0),$$
$$Y_{14}^0 = 13Y_1 + Y_4 = (65, 0, 45, 5) = 5(13, 0, 9, 1),$$
$$Y_{24}^0 = 13Y_2 + 3Y_4 = (0, 65, 70, 15) = 5(0, 13, 14, 3).$$

Los puntos Y_1, Y_2, Y_{13}^0, Y_{23}^0, Y_{14}^0, Y_{24}^0 forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema (19), (20). La solución general tiene la forma

$$X = aY_1 + bY_2 + cY_{13}^0 + dY_{23}^0 + eY_{14}^0 + fY_{24}^0 = a(5, 0, 3, 0) + b(0, 5, 4, 0) + 5c(3, 0, 2, 0) +$$
$$+ 5d(0, 3, 3, 0) + 5e(13, 0, 9, 1) + 5f(0, 13, 14, 3),$$

siendo *a, b, c, d, e, f* números cualesquiera no negativos.

Si consideramos $a = k_1$, $b = k_2$, $5c = k_3$, $5d = k_4$, $5e = k_5$, $5f = k_0$, entonces obtenemos para X la representación

$$X = k_1\,(5, 0, 3, 0) + k_2\,(0, 5, 4, 0) + k_3\,(3, 0, 1, 0) +$$
$$+ k_4\,(0, 3, 3, 0) + k_5\,(13, 0, 9, 1) + k_6\,(0, 13, 14, 3), \qquad (21)$$

siendo $k_1, k_2, \dots, k_6$ números arbitrarios no negativos.

Para finalizar este punto, señalaremos que, junto con la demostración de la existencia de un conjunto fundamental de soluciones para cualquier sistema homogéneo de desigualdades lineales, se demostró también el teorema 2 de la parte 7 (*Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época)) sobre la estructura de cualquier cono poliedro convexo.

10. Resolución de un sistema heterogéneo de desigualdades

Ahora, cuando hemos aprendido a formar la solución común para un sistema homogéneo de desigualdades, no nos será difícil resolver un problema semejante con relación a un sistema de desigualdades arbitrario, es decir, heterogéneo. Sea

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \geq b, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geq c \end{array}\right\} \qquad (1)$$

un sistema arbitrario de desigualdades lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$. Examinemos junto con él, el siguiente sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - at \geq 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n - bt \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - ct \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

con $n + 1$ incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n, t$.

Entre las soluciones de los sistemas (1) y (2) existe una relación de determinado contenido. Precisamente, si $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ es una solución cualquiera del sistema (2) y, además, $t > 0$, entonces los números

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{t}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{t}, \dots, \bar{x}_n = \frac{x_n}{t} \qquad (3)$$

serán solución del sistema (1).

En efecto, veamos, por ejemplo, la primera desigualdad de (2). Esta se cumple para los números $x_1, x_2, \dots, x_n, t$, o sea,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq at.$$

Dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por el numero positivo t, tendremos:

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \dots + a_n\bar{x}_n \geq a;$$

pero esto significa que el conjunto de números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ satisface la primera desigualdad de (1). Un cálculo semejante puede realizarse con respecto a cualquier desigualdad de (2); de aquí, pues, se deduce nuestra afirmación.

No es difícil observar que cualquier solución del sistema (1) puede ser obtenida por el método indicado. En efecto, si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ es una solución cualquiera del sistema (1), entonces los números $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_n = \bar{x}_n, t = 1$ satisfacen el sistema (2) y en este caso son válidas las igualdades (3).

Así, pues, para hallar todas las soluciones $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ del sistema (1), se deben hallar todas las soluciones del sistema (2) para las cuales $t > 0$, y transformar cada una de ellas conforme a las fórmulas (3).

Ejemplo. Supongamos que es preciso hallar todas las soluciones del siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}-3x_1-4x_2+5x_3 &\geq 6,\\ 2x_1+3x_2-3x_3 &\geq -1,\\ x_1 &\geq 0,\\ x_2 &\geq 0,\\ x_3 &\geq 0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Procediendo de la forma indicada, formamos el sistema homogéneo auxiliar:

$$\left.\begin{aligned}-3x_1-4x_2+5x_3-6t &\geq 0,\\ 2x_1+3x_2-3x_3+t &\geq 0,\\ x_1 &\geq 0,\\ x_2 &\geq 0,\\ x_3 &\geq 0.\end{aligned}\right\}$$

Agregando a este sistema la desigualdad $t \geq 0$ (puesto que nos interesan solamente las soluciones para las cuales $t > 0$), obtenemos el sistema (19), (20) de la parte 9 anterior, con la única diferencia, de que, en lugar de x_4, tenemos t. El conjunto de soluciones de este sistema, como allí se demuestra, se expresa mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}x_1 &= 5k_1 + 3k_3 + 13k_5,\\ x_2 &= 5k_2 + 3k_4 + 13k_6,\\ x_3 &= 3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 9k_5 + 14k_6,\\ t &= k_5 + 3k_6,\end{aligned}$$

siendo $k_1, k_2, \ldots, k_6$ cualesquiera números no negativos. Como nos interesan solamente las soluciones para las cuales $t > 0$, entonces debemos considerar que por lo menos uno de los números k_5, k_6 es diferente de cero (estrictamente positivo). A continuación, hallamos la solución común para el sistema (4) por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= \frac{5k_1+3k_3+13k_5}{k_5+3k_6},\\ x_2 &= \frac{3k_2+3k_4+13k_6}{k_5+3k_6},\\ x_3 &= \frac{3k_1+4k_2+2k_3+3k_4+9k_5+14k_6}{k_5+3k_6}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Señalamos una vez más que en estas fórmulas $k_1, k_2, \ldots, k_6$ son cualesquiera números no negativos; además, por lo menos uno de los números k_5, k_6 es diferente de cero.

Al establecer que la resolución del sistema (1) por el método indicado anteriormente se reduce a la resolución del sistema homogéneo (2); de hecho, hemos demostrado el teorema 3 de la parte 7 sobre la estructura de cualquier región poliédrica convexa. Lo ilustraremos tomando como ejemplo, el sistema (4). Sea:

$$k_i' = \frac{k_i}{k_5+3k_6} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

como los números k_1, k_2, k_3, k_4 son arbitrarios no negativos, entonces también los números k_1', k_2', k_3', k_4' son arbitrarios no negativos. Seguidamente suponemos que:

$$k_5' = \frac{k}{k_5+3k_6}, \quad k_6' = \frac{3k_6}{k_5+3k_6}.$$

Los números k_5 y k_6 no son negativos y están relacionados por la condición $k_5'+k_6'=1$. Ahora, las fórmulas (5) pueden ser expresadas en forma de una sola igualdad:

$$(x_1, x_2, x_3) = k_1'(5,0,3)+k_2'(0,5,4)+k_3'(3,0,2)+k_4'(0,3,3)+k_5'(13,0,9)+k_6'\left(0,\frac{13}{3},\frac{14}{3}\right). \tag{6}$$

Introducimos las siguientes designaciones:

$$X_1 = (5, 0, 3), \qquad X_2 = (0, 5, 4), \qquad X_3 = (3, 0, 2)$$

$$X_4 = (0,3, 3), \qquad X_5 = (13, 0, 9), \qquad X_6 = \left(0, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

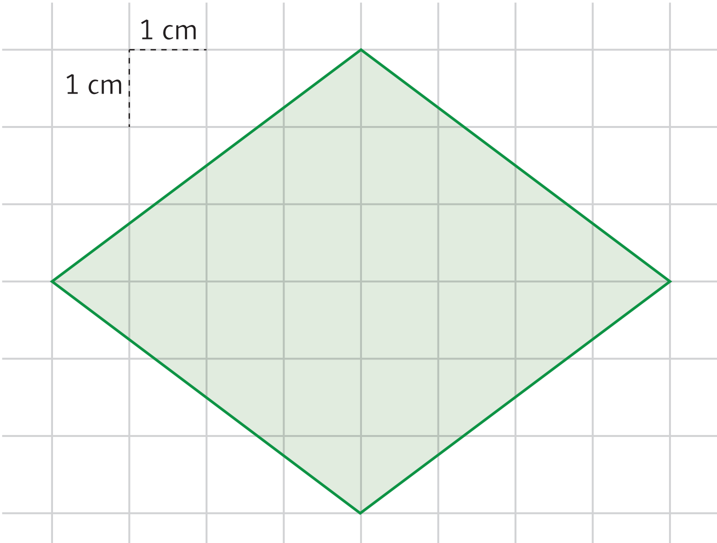
Teniendo en cuenta las restricciones establecidas anteriormente para k_1', k_2', k_3' y k_4' y también para k_5' y k_6', ahora podemos interpretar la igualdad (6) de la siguiente forma: el conjunto de soluciones del sistema (4) es

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) + (X_5, X_6).$$

Con ello, la afirmación formulada en el teorema 3 de la parte 7 queda demostrada para el sistema (4).

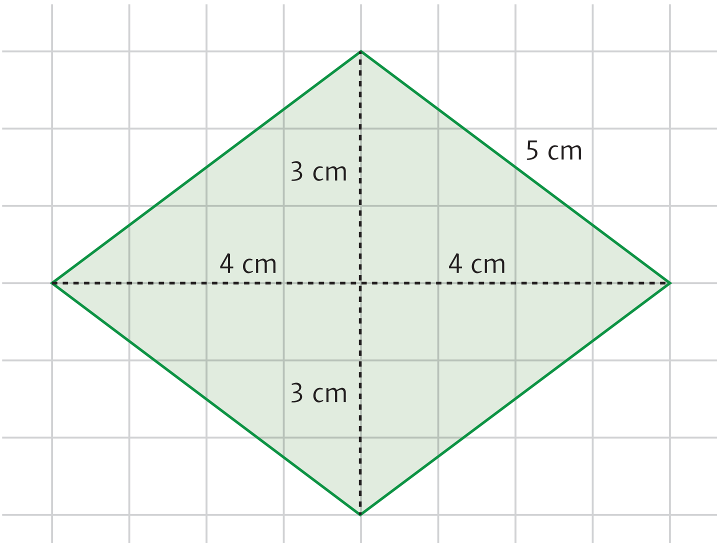
Respuesta del Nº 24

Con la información ofrecida en la figura sobre la cuadrícula, hallar el perímetro del rombo.



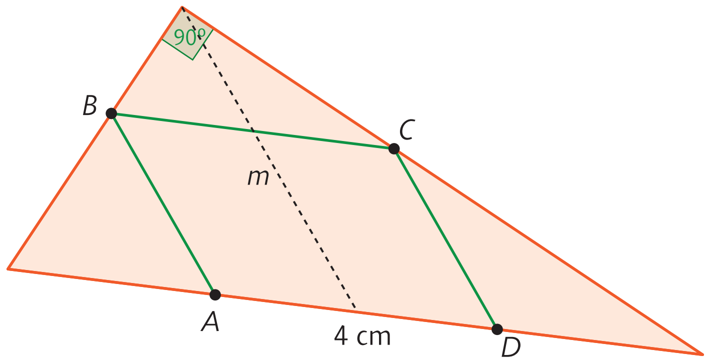
Solución

Cada lado del rombo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm.



Por el teorema de Pitágoras, cada lado del rombo debe medir 5 cm; por lo tanto, el perímetro es de 20 cm.

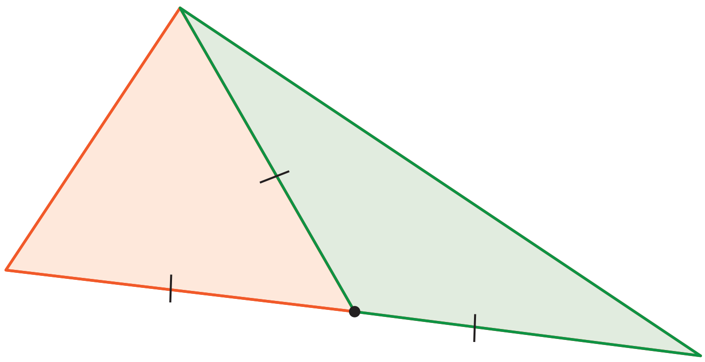
Una mosca recorrió toda la poligonal *ABCD* en un triángulo rectángulo, según muestra la figura.



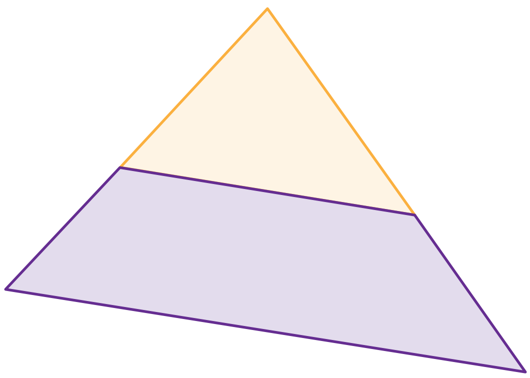
Los tramos *AB* y *CD* son paralelos a la mediana *m* del triángulo; el tramo *BC* es paralelo a la hipotenusa del triángulo que mide 4 cm. ¿Cuántos centímetros recorrió la mosca?

Solución

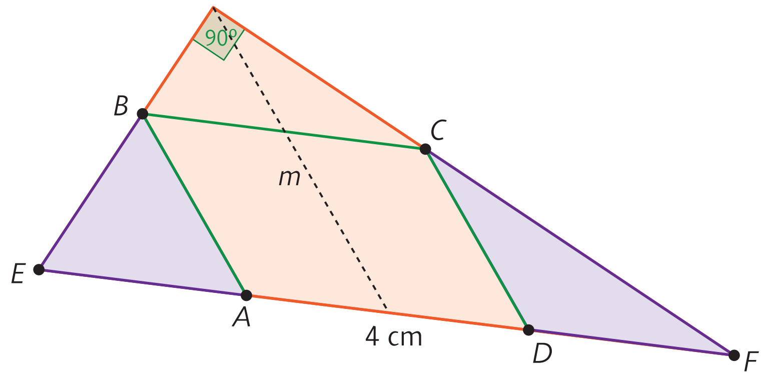
En primer lugar, es conveniente usar el hecho de que la mediana que parte del ángulo recto de un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos isósceles.



En segundo lugar, notar que, si sobre un lado de un triángulo se traza una paralela que lo descompone en un trapecio y un triángulo, el triángulo así obtenido es semejante al triángulo inicial.



Entonces, los triángulos sombreados son isósceles, por ser cada uno semejante a un triángulo de la descomposición.



Se tiene $AB = EA$, $CD = DF$ y por ser $ABCD$ un paralelogramo, es $AD = BC$. En consecuencia, la longitud de la poligonal, que es la distancia recorrida por la mosca, es:

$$AB + BC + CD = EA + AD + DF = EF = 4 \text{ cm}.$$