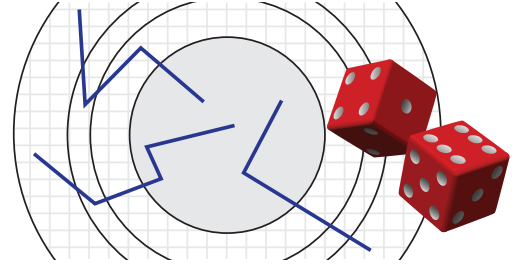




"[...] más valioso que acumular información es interiorizarse de métodos para saber qué propósitos tienen, es decir, de dónde parten y adónde llevan. Los métodos tienen una orientación y una dinámica de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen". *Dr. Alberto Calderón*

El Método Montecarlo



Continúa de *Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época.

7. Análisis del paso de neutrones a través de una placa

Las leyes probabilísticas de la interacción entre una partícula elemental (neutrón, fotón, mesón, etc.) y la materia son conocidas. Como regla, es preciso conocer las características macroscópicas (densidades, flujos, etc.) de los procesos de los que participa una gran cantidad de estas partículas. Esta situación se asemeja a las que hemos analizado en el punto 5 dedicado a los sistemas de servicios (véase *Leñitas Geométricas* N° 8, 5ª época) y en el punto 6 enfocado en la seguridad de las piezas (*Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época), y resulta muy apropiada para la aplicación del método Montecarlo.

Posiblemente sea en la física de neutrones donde se aplica con mayor frecuencia el método Montecarlo. Analizaremos la variante más sencilla del problema relativo al paso de neutrones a través de una placa.

→ **1. Planteamiento del problema.** Supongamos que una placa homogénea infinita $0 \leq x \leq k$ es bombardeada por un flujo de neutrones de energía E_0 , siendo el ángulo de incidencia igual a 90° . Al chocar con los átomos de la placa, los neutrones pueden esparcirse elásticamente o ser absorbidos.



**Los números complejos
en la geometría del plano.
Teorema de Ptolomeo.
Potencia.**



¡Hacé tu pedido!

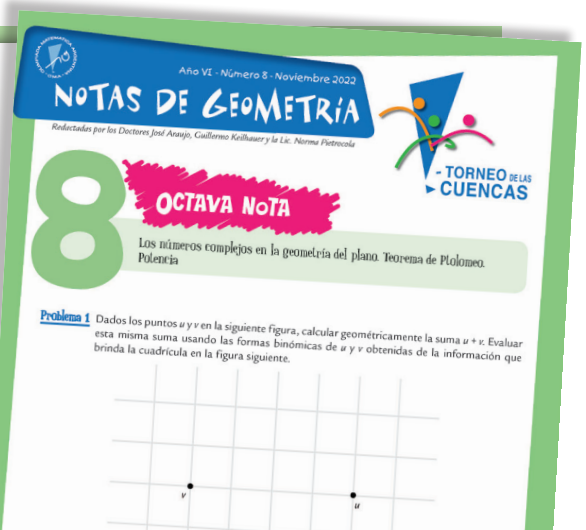
En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

Publicación reciente

fenchu@oma.org.ar

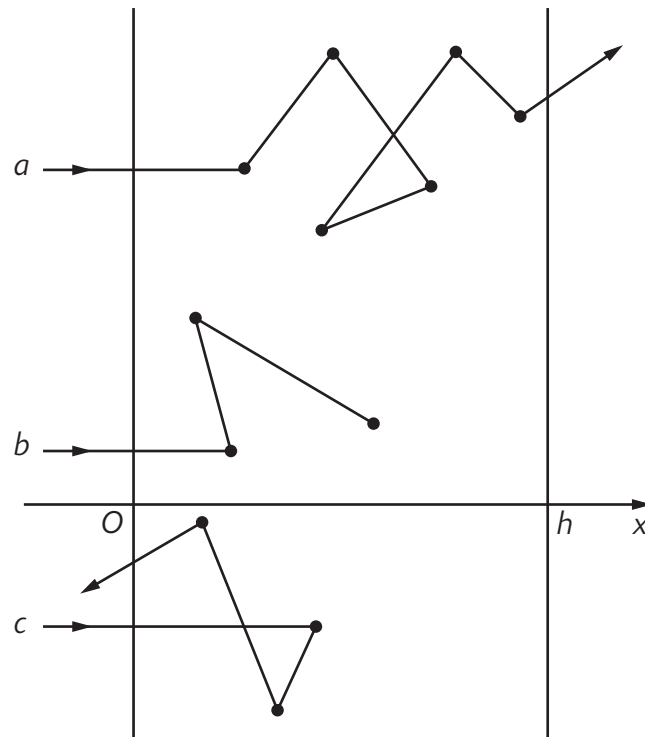
☎ **11 4826 8976**

📞 **+54 9 11 5035 7537**



* Recordamos a los lectores que los temas editados en *Leñitas Geométricas* son material preparado y en gran parte desarrollado y sugerido por el doctor Miguel de Guzmán.

Supongamos, para simplificar, que al esparcirse el neutrón conserva su energía y que cualquier cambio en su dirección provocado por el choque con un átomo es igualmente probable (esto último sucede en materias constituidas por átomos pesados). En la figura siguiente



hemos representado las distintas suertes que pueden correr los neutrones: el neutrón (a) atraviesa la placa, el neutrón (b) es absorbido y el neutrón (c) es reflejado.

Es preciso calcular la probabilidad p_+ de que el neutrón atraviese la placa, la probabilidad p_- de que el neutrón sea reflejado, y la probabilidad p^0 de que el neutrón resulte absorbido.

La interacción de los neutrones con la materia se caracteriza en este caso mediante dos constantes Σ_c y Σ_s que se denominan *sección de absorción* y *sección de dispersión*, respectivamente. Los índices c y s provienen de las letras iniciales de las palabras inglesas "capture" (captura) y "scattering" (dispersión).

La suma de estas secciones lleva el nombre de *sección completa*:

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s.$$

Las secciones tienen el siguiente sentido físico: al toparse el neutrón con un átomo de la materia, la probabilidad de absorción es igual a $\frac{\Sigma_c}{\Sigma}$; y la probabilidad de esparcimiento es igual a $\frac{\Sigma_s}{\Sigma}$.

El recorrido libre λ del neutrón (o sea, su recorrido entre un choque y otro) es una variable aleatoria que puede tomar cualquiera de los valores positivos con la densidad de probabilidad

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

Es fácil ver que la densidad de la variable λ coincide con la densidad –fórmula (26), véase *Leñitas Geométricas* N° 8, 5° época– de la variable aleatoria τ en el caso del flujo elemental de pedidos. Esta analogía con el punto 5.2 nos permite escribir inmediatamente la fórmula para el recorrido libre medio

$$M\lambda = \frac{1}{\Sigma}$$

y la fórmula para el sorteo de λ ,

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma.$$

Resta explicar cómo se escoge la dirección aleatoria del neutrón cuando se produce el esparcimiento. Puesto que existe en el problema una simetría respecto del eje x, esta dirección se determina plenamente con solo indicar el ángulo φ entre la dirección de la velocidad del neutrón y el eje Ox.

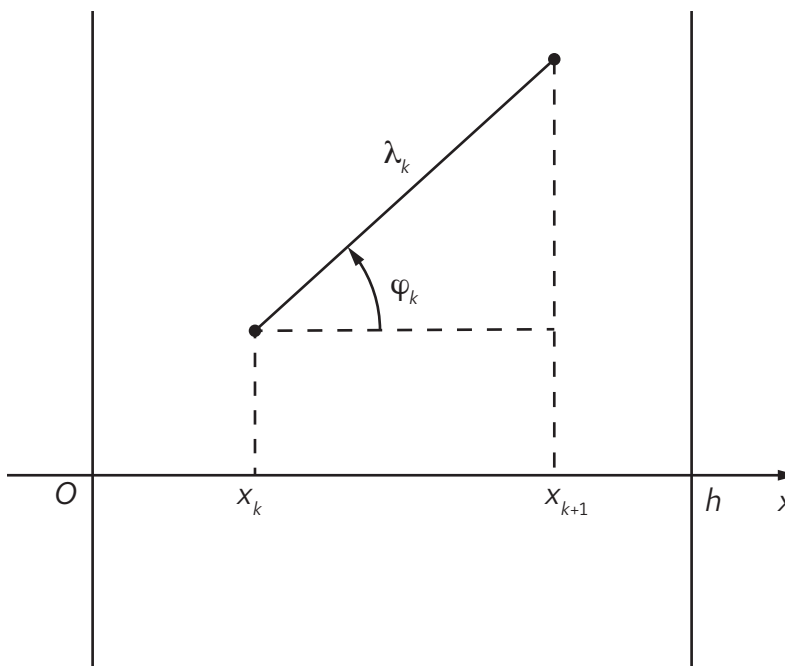
Se puede demostrar que la condición para que todas las direcciones sean igualmente probables es, en este caso, equivalente a la condición de que el coseno de este ángulo $\mu = \cos \varphi$ esté uniformemente distribuido en el intervalo $(-1, 1)$. Tomando en la fórmula (24) (*Leñitas Geométricas* N° 6, 5ª época) $a = -1$ y $b = 1$, obtenemos la fórmula para el sorteo de μ_k :

$$\mu = 2\gamma - 1.$$

→ **2. Esquema de análisis basado en la simulación de trayectorias reales.** Supongamos que el neutrón experimentó el k -ésimo esparcimiento en el punto de abscisa x_k correspondiente al interior de la placa y ha comenzado a moverse en la dirección μ_k . Sorteemos el recorrido libre

$$\lambda_h = -\left(\frac{1}{\Sigma}\right) \ln \gamma$$

y calculemos la abscisa del punto de colisión siguiente (véase la figura siguiente):



$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k.$$

Comprobamos la condición de que la placa ha sido atravesada:

$$x_{k+1} > h.$$

Si esta condición se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria del neutrón y agregamos uno al contador de las partículas que atraviesan la placa. En caso contrario, comprobamos la condición de reflexión:

$$x_{k+1} < 0.$$

Si esta condición se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de las partículas reflejadas. Si tampoco se cumple esta condición, o sea, si $0 \leq x_{k+1} \leq h$, significará que el neutrón experimenta la $(k + 1)$ -ésima colisión en el interior; habrá que sortear de nuevo el "destino" del neutrón en esa colisión.

De acuerdo con el punto 4.1 (*Leñitas Geométricas* N° 6, 5ª época) escogemos el valor siguiente γ y comprobamos la condición de absorción

$$\gamma < \frac{\Sigma_c}{\Sigma}.$$

Si esta última desigualdad se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de partículas absorbidas. En el caso contrario, aceptamos que el neutrón experimenta un esparcimiento en el punto de abscisa x_{k+1} . Realizamos entonces el sorteo de la nueva dirección del neutrón

$$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$$

y repetimos todo el ciclo (tomando, claro está, otros valores para γ).



Hemos escrito todos los valores de γ sin índices, sobrentendiendo que cada valor de γ se emplea una vez solamente. Para analizar un eslabón de la trayectoria es preciso emplear tres valores de γ .

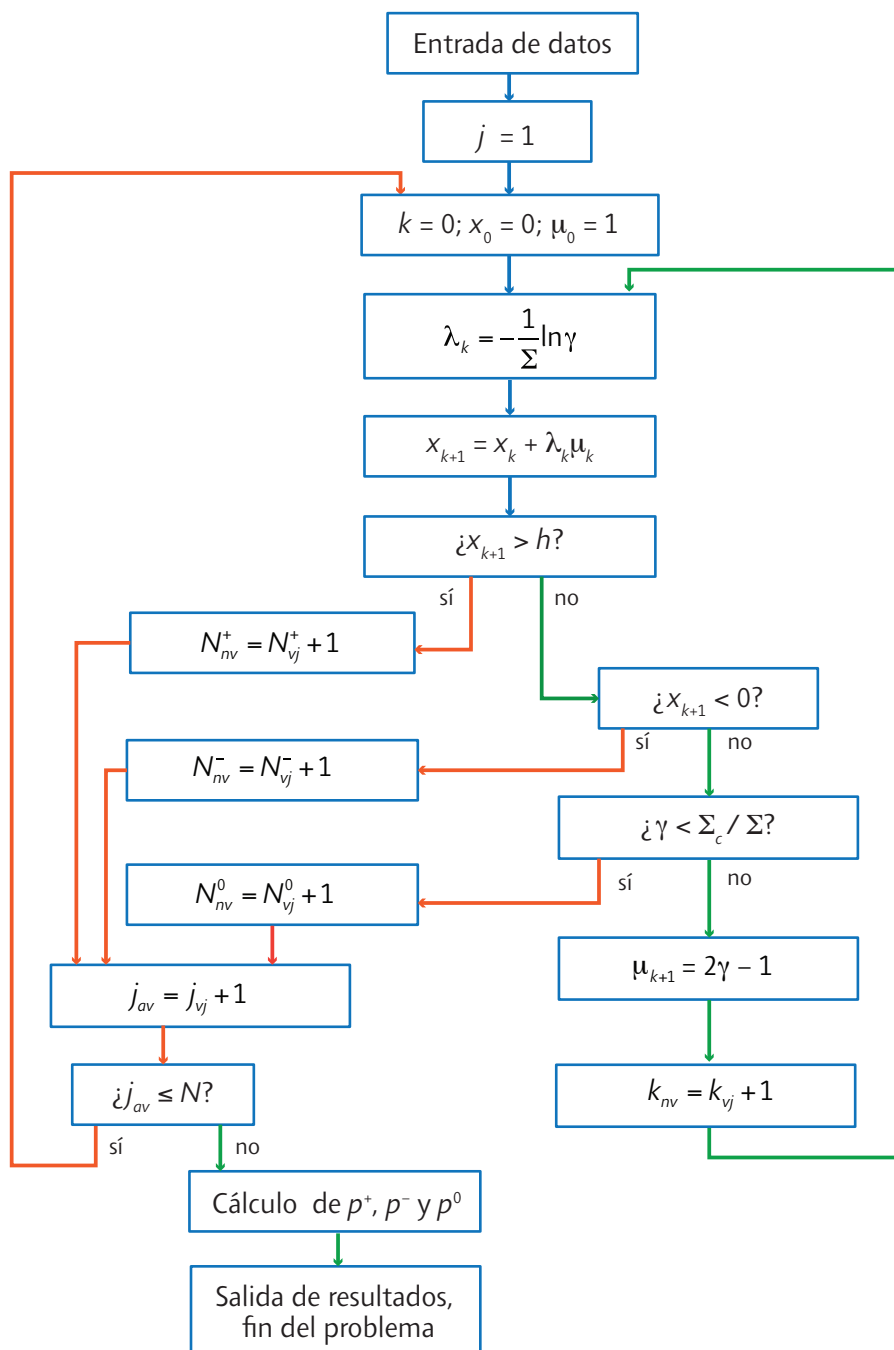
Los valores iniciales para cada trayectoria son

$$x_0 = 0 \quad y \quad \mu_0 = 1.$$

Después de haber analizado de esta forma N trayectorias, resultará que N^+ neutrones han atravesado la placa, que N^- neutrones han sido reflejados y que N^0 neutrones han quedado absorbidos.

Es evidente que las probabilidades buscadas son aproximadamente iguales a las razones

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N}, \quad p^- \approx \frac{N^-}{N}, \quad p^0 \approx \frac{N^0}{N}$$



En el esquema sinóptico de arriba, hemos representado el programa correspondiente a este análisis. El índice j representa el número de la trayectoria y el índice k corresponde al número de la colisión (a lo largo de la trayectoria que se está analizando).

Este método de análisis, a pesar de ser muy natural, tiene sus deficiencias. En particular, resulta difícil calcular por este método la probabilidad p^+ cuando es muy pequeña. Pero precisamente con este caso nos encontramos al analizar la protección contra la radiación.

Existen modificaciones ingeniosas del método Montecarlo que pueden ser aplicadas también en estos casos. Detengámonos brevemente a continuación en la variante más sencilla del análisis, que se basa en el empleo de los así llamados “pesos”.

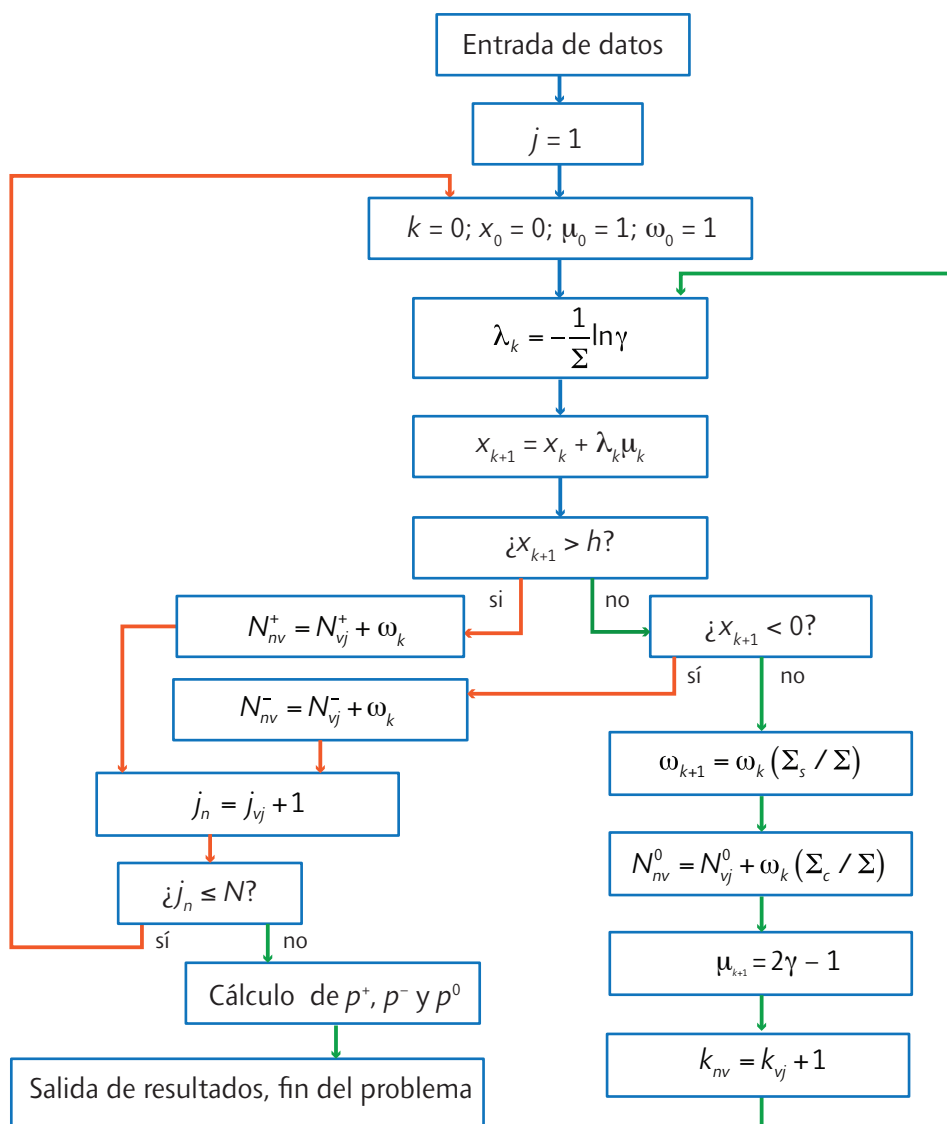
→ **3. Esquema de análisis basado en el empleo de pesos que sustituyen la absorción.** Miremos el mismo problema relativo al paso de los neutrones. Supongamos que a lo largo de la trayectoria se desplaza un “tren” formado por un gran número w_0 de neutrones idénticos. Al producirse la colisión en el punto de abscisa x_1 , un promedio de $w_0 \left(\frac{\Sigma_c}{\Sigma} \right)$ de neutrones del “tren” será absorbido y un promedio de $w_0 \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma} \right)$ de neutrones será esparcido.

Agreguemos la cantidad $w_0 \left(\frac{\Sigma_c}{\Sigma} \right)$ al contador de partículas absorbidas y continuemos el análisis del “tren” esparcido aceptando que todo el tren restante se mueve en una misma dirección.

Todas las fórmulas que hemos dado en el punto 7.2 anterior se conservan. La única diferencia consiste en que, después de cada colisión, la cantidad de neutrones en el “tren” disminuirá, siendo ya que una parte de este, con un total de $w_{k+1} = w_k \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma} \right)$ de neutrones, será absorbida; además, la trayectoria jamás podrá terminarse con la absorción.

La variable w_k suele denominarse *peso de neutrón* y, en lugar de un “tren”, formado por w_k neutrones, suele hablarse de un *neutrón de peso w_k* . El peso inicial w_0 se toma, como regla, igual a 1. Esto no contradice nuestra hipótesis de que el “tren” es grande, pues es fácil ver que w_0 es un factor común de todos los pesos w_k que se obtienen al analizar una trayectoria.

El esquema sinóptico del programa correspondiente a este análisis viene representado en la figura que sigue:



Como puede verse, no resulta más complejo que el esquema anteúltimo. Sin embargo, se puede demostrar que siempre es más conveniente calcular p^+ por el método expuesto en este punto y no por el método del punto 7.2.

→ **4. Observación.** Existe una gran variedad de procedimientos de cálculo que se basan en el empleo de distintos pesos. No podemos detenernos aquí en estas cuestiones.

Señalemos solamente que el método Montecarlo es aplicable a problemas muy complejos relacionados con partículas elementales. Por ejemplo, al caso en que el medio se compone de materias distintas y tiene una estructura geométrica arbitraria, o al caso en que la energía de la partícula varía después de cada colisión. Asimismo, hace posible al análisis de otros muchos aspectos de los procesos nucleares: permite prever la posibilidad de que el átomo se desintegre al chocar con el neutrón y de que surjan neutrones nuevos; determinar el momento de inicio y la condición de mantenimiento de la reacción en cadena; etc.

Estadística complementaria al método Montecarlo

Continúa de *Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época.

Las principales leyes de la estadística

La noción de permanencia estadística se presenta en el estudio de los fenómenos más diversos. Así, en cualquier lugar en que se consulten los registros de estado civil se comprueba que la relación entre nacimientos masculinos y femeninos está cerca de la unidad; la descendencia de la segunda generación en el cruce de dos variedades de arvejas, una de granos esféricos y otra de granos arrugados, revela las proporciones entre "esféricos" y "arrugados" cercanas a $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$; la desviación típica de la máquina de cigarrillos citada anteriormente (*Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época), calculada con varias muestras, no se aparta nunca mucho del valor hallado $s = 0,063$; la talla de los adultos en diferentes poblaciones se distribuye siguiendo las "curvas de campana" más o menos elevadas o aplastadas, pero del mismo tipo; en general, el estudio de los fenómenos económicos presenta ciclos de variación a menudo muy regulares, etcétera.

Todas estas comprobaciones sugieren la idea de que la cantidad de individuos observados, siguiendo ciertos caracteres de clasificación, no es una proporción cualquiera, sino que obedece de modo más o menos exacto a una ley estadística. El estudio completo de estas leyes exige desarrollos matemáticos que no pueden tratarse aquí; nosotros nos limitaremos a dar las definiciones y los resultados indispensables para la buena comprensión de lo que sigue.

La noción de probabilidad y la ley de los grandes números. Para el estudio más a fondo de las probabilidades nos remitimos a estudios y obras ya citadas o realizadas anteriormente. Recordaremos simplemente que la probabilidad de un hecho es la relación entre el número de casos favorables a este hecho y la cantidad total de casos posibles, suponiendo que todos los casos posibles son igualmente verosímiles. Así, la probabilidad

"Estas páginas servirán para animar a matemáticos y no matemáticos a meditar profundamente sobre el sentido mismo del quehacer matemático". *Miguel de Guzmán*



fenchu@oma.org.ar

☎ 11 4826 8976 📞 +54 9 11 5035 7537

¡Hacé tu pedido!

En la Red Olímpica realizamos envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.

¿Ya lo tenés?

Godfrey Harold Hardy

Apología
de un
matemático



de cara, en el juego de cara o ceca, es $\frac{1}{2}$; la probabilidad de sacar un diamante en un mazo de 32 naipes es $\frac{8}{32}$ o $\frac{1}{4}$. La probabilidad es una cifra que varía entre 0 y 1, y los valores extremos corresponden, por un lado, a la imposibilidad, y por el otro, a la certeza.

La igualdad numérica de los sexos al nacer puede interpretarse por un mecanismo análogo al juego de cara y ceca, mecanismo que funcionaría en cada concepción. Sin embargo, si se examinan las estadísticas de un modo más cuidadoso, se puede comprobar que nacen algunos varones más que niñas, aproximadamente 105 varones por 100 niñas. Podemos entonces figurarnos que el sexo se determina por la extracción de una bolilla de una urna que contiene 205 bolillas, de las cuales 100 han sido marcadas como “niñas” y 105 como “varones”.

Después de cada extracción la bolilla se repone en la urna, cuyo contenido es cuidadosamente mezclado, de modo que todas las extracciones se realicen en condiciones idénticas. Esta interpretación lleva el nombre de *esquema de la urna* y se extiende a casos más complicados, en los cuales el fenómeno estudiado no presenta solamente dos posibilidades como el sexo, sino que supone un número mayor de variables (número de pétalos de una flor, forma del grano, etc.). Es suficiente imaginar una urna que contenga diversas categorías de bolillas marcadas de modo distinto. Supondremos que, tal vez, el esquema de la urna solo desplaza el problema sin enfocar su verdadera naturaleza. De hecho, esta interpretación aporta aclaraciones útiles.

A la frecuencia, noción experimental, se la ha sustituido por la idea de probabilidad (probabilidad de obtener cara, de sacar una bolilla, etc.). Esta operación está justificada por la ley de los grandes números, debida a Jacques Bernoulli, y que puede enunciarse de la manera siguiente:

Si, en una prueba, la probabilidad de un acontecimiento o suceso es p y si este se repite una gran cantidad de veces, la relación entre las veces en que se produce el suceso y la cantidad total de pruebas, es decir, la frecuencia f del suceso, tiende a acercarse cada vez más a la probabilidad p .

Más exactamente, si el número de pruebas es suficientemente grande, resulta totalmente improbable que la diferencia entre f y p supere cualquier valor prefijado, por pequeño que sea.

Conociendo la probabilidad de un acontecimiento en una experiencia es posible deducir la probabilidad de las eventualidades más complejas; por ejemplo, calcular la probabilidad de que en diez experiencias sucesivas el hecho no se produzca nunca o que se produzca 1 vez, o 2 veces, o ... 10 veces. El cálculo de probabilidades presta a la estadística la ayuda preciosa de sus métodos deductivos y los resultados teóricos a los que conduce pueden confrontarse con los que se observan en la práctica.

La ley binomial. El problema que acabamos de presentar es el de las pruebas repetidas, cuya solución conduce a la ley binomial. Para ilustrarla tomaremos la experiencia de Weldon. La prueba consiste en tirar un dado al aire y el suceso observado es la presentación del 5 o del 6. Si el dado no es “falso” –es decir, si permite a cada una de las 6 caras la misma posibilidad de presentarse– la probabilidad del suceso es $\frac{2}{6}$, es decir, $\frac{1}{3}$.

La prueba se repite 12 veces: en la práctica se arrojan 12 dados al aire, simultáneamente, y se cuenta el número de veces en que resultan 5 o 6. Probabilidad de tener:

$$0 \text{ dados con } 5 \text{ o } 6: \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0,007707$$

$$1 \text{ dado con } 5 \text{ o } 6: 12 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{1}{3}\right) = 0,04644$$

$$2 \text{ dados con } 5 \text{ o } 6: 66 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0,127171$$

$$3 \text{ dados con } 5 \text{ o } 6: 220 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0,211952$$

$$4 \text{ dados con } 5 \text{ o } 6: 495 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0,238446$$

$$5 \text{ dados con } 5 \text{ o } 6: 792 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0,190757$$

$$6 \text{ dados con 5 o 6: } 924 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0,111275$$

$$7 \text{ dados con 5 o 6: } 792 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0,047689$$

$$8 \text{ dados con 5 o 6: } 495 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 0,014903$$

$$9 \text{ dados con 5 o 6: } 220 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 0,003312$$

$$10 \text{ dados con 5 o 6: } 66 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0,000497$$

$$11 \text{ dados con 5 o 6: } 12 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = 0,000045$$

$$12 \text{ dados con 5 o 6: } \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = 0,000002$$

Total: 1,000000

Es posible calcular las probabilidades referentes a las diferentes eventualidades susceptibles de producirse: estas son exclusivamente las anotadas en el cuadro anterior.

El total de las probabilidades de todos los sucesos posibles es, naturalmente, igual a la unidad (certeza). La probabilidad de obtener 0 dados o 12 dados con 5 o 6 puntos es muy pequeña; la probabilidad máxima corresponde a 4 dados.

La experiencia de Weldon consistente en arrojar los 12 dados se realizó 26 306 veces, o jugadas, y estas se clasificaron del modo expuesto anteriormente. Según la ley de los números, los comprobados deben acercarse a los valores obtenidos multiplicando las probabilidades por el número total de jugadas. Se han obtenido estos resultados:

Números de dados con 5 o 6 puntos	Número de tiradas	Números teóricos (probabilidad × 26 306)	Diferencias entre los números observados y los números teóricos
0	185	203	-18
1	1 149	1 212	-67
2	3 265	3 345	-80
3	5 475	5 576	-101
4	6 114	6 273	-159
5	5 194	5 018	+176
6	3 067	2 927	+140
7	1 331	1 255	+76
8	403	392	+11
9	105	87	+18
10	14	13	+1
11	4	1	+3
12	0	0	-
Total	26 306	26 306	-

Los números observados y los números teóricos son cercanos. Sin embargo, las jugadas en las que más de 4 dados resultan en 5 o 6 son sistemáticamente más frecuentes de lo previsto; las otras son también constantemente menos numerosas. Podemos preguntarnos si, teniendo en cuenta el elevado número de jugadas,

estas diferencias pueden imputarse al "azar", o si demuestran que los dados no son absolutamente normales. Es este uno de los problemas de interpretación del tipo de los que se tratarán más adelante.

De un modo general, si en una experiencia la probabilidad de un suceso llamado "suceso favorable" es p y la prueba se repite N veces, es posible calcular las probabilidades P_0, P_1, \dots, P_N de que el suceso se haya realizado 0 veces, 1 vez, ..., N veces. La probabilidad de que el suceso se produzca K veces está dada por la fórmula:

$$P_K = C_N^K p^K \times (1-p)^{N-K}$$

C_N^K significa el número de combinaciones de N objetos tomados de K en K , es decir:

$$C_N^K = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-K+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K}$$

Los $(N + 1)$ valores de P_K no son otros que los términos sucesivos del desarrollo del binomio de Newton

$$[(1-p) + p]^N,$$

de donde proviene la designación de *ley binomial*. Quienes estén familiarizados con las fórmulas algebraicas hallarán en el cuadro que sigue el medio de calcular las probabilidades P_K .

		Número de veces que se produce el suceso "favorable" (K)												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de repeticiones de la experiencia. (N)	2	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3	1	3	3	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	1	4	6	4	1	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	1	5	10	10	5	1	-	-	-	-	-	-	-
	6	1	6	15	20	15	6	1	-	-	-	-	-	-
	7	1	7	21	35	35	21	7	1	-	-	-	-	-
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	-	-	-	-
	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	-	-	-
	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	-	-
	11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	-
	12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

$\left\{ \begin{array}{l} \text{el exponente de } p \text{ es } K \\ \text{el exponente de } (1-p) \text{ es } N-K \end{array} \right.$

El cuadro se prolonga indefinidamente, como en el esquema conocido como *triángulo de Tartaglia*. Cada línea comienza por 1; la cifra que figura en una fila y columna determinadas se obtiene añadiendo las cifras inscritas en la misma columna y la inmediatamente anterior sobre la fila precedente: por ejemplo, 462, que se lee en la columna 6, fila 11, es igual a

$$210 \text{ (columna 6, fila 10)} + 252 \text{ (columna 5, fila 10)}.$$

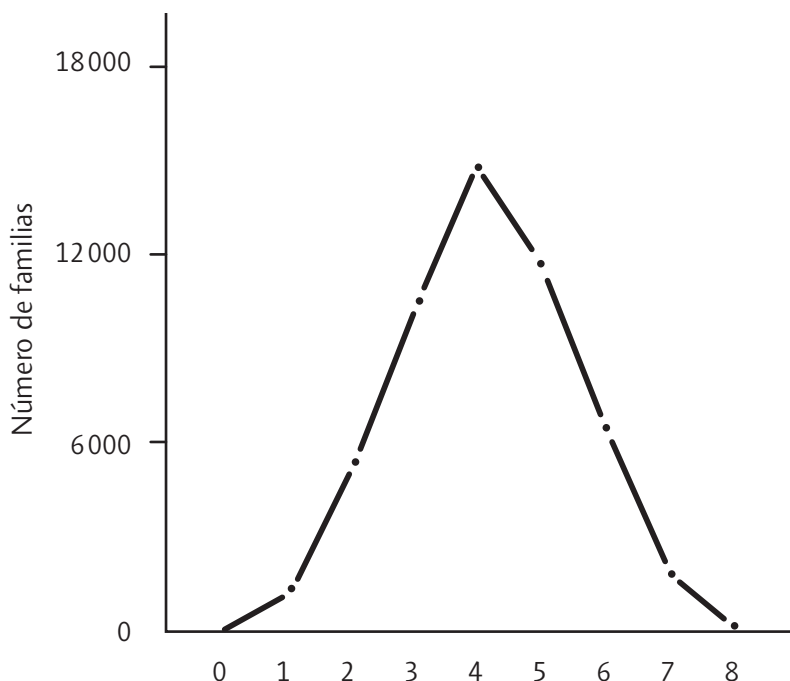
Supongamos, por ejemplo, que debamos calcular la probabilidad P_5 de una serie de 12 pruebas y el suceso favorable se produzca 5 veces. En la intersección de la fila 12 (número de pruebas) y de la columna 5 (frecuencia del suceso favorable) se lee el coeficiente 792.

Este debe multiplicarse por p^5 [el exponente de p es la frecuencia del suceso favorable], luego por $(1-p)^7$ [el exponente de $(1-p)$ es $12 - 5 = 7$, es decir, la frecuencia del suceso contrario al favorable, o suceso desfavorable]. Si se supone que $p = \frac{1}{3}$ (experimento de Weldon), resulta:

$$P_5 = 792 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = 0,190717,$$

valor que hemos hallado más arriba.

Si consideramos que arrojar 26 306 grupos de 12 dados es una distracción bastante alejada de cualquier que-hacer práctico, convendrá referirse a la estadística del sexo de los hijos en las familias de 8 hijos, y reflexionar sobre el hecho de que esta reproduce una distribución completamente análoga a la de los dados de Weldon (véase la figura siguiente); volveremos a ella enseguida.



Retomemos en forma gráfica los resultados de la experiencia de Weldon.

Más exactamente, llevemos sobre el eje de las abscisas las frecuencias posibles en una jugada (valores enteros de 0 a 12) y sobre el eje de las ordenadas las probabilidades correspondientes a los números teóricos que son el producto de estas probabilidades por 26 306 (los valores observados son, como se ha visto, cercanos a estos valores teóricos).

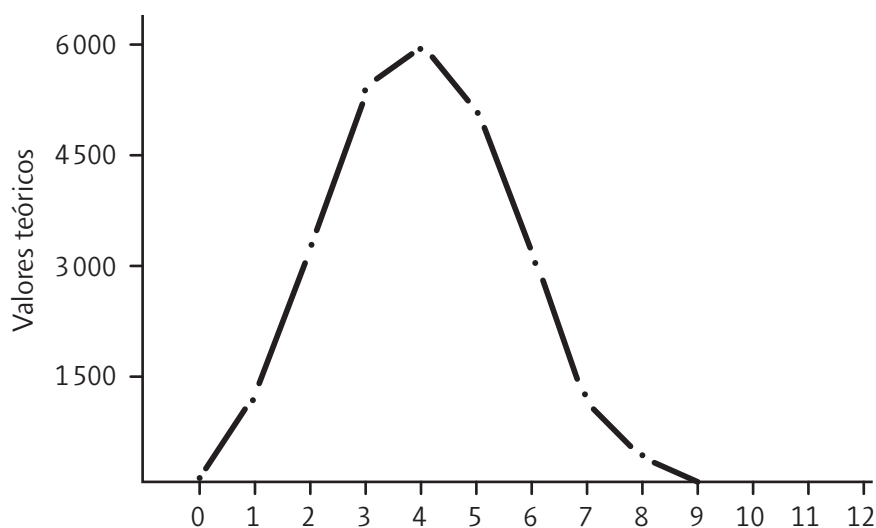


Gráfico correspondiente a la tabla de p. 8, de valores obtenidos por el lanzamiento de dos dados

El gráfico muestra más elocuentemente que las cifras hasta qué punto son poco probables o poco frecuentes, en una gran cantidad de jugadas, los sucesos muy diferentes del suceso más probable, que es la presentación 4 veces de la cara 5 o la cara 6 del dado. Pero además llama la atención, por su forma general, que recuerda aquella que ya hemos observado a propósito de las estadísticas de las familias de 8 hijos, o de los pesos de los cigarrillos, y que representa la ley de Gauss, o ley normal.

Cuando la cantidad de pruebas aumenta, los valores que puede tomar la frecuencia del suceso favorable en una jugada –es decir, los $(N) + 1$ valores enteros de 0 a N – se hacen más numerosos y el gráfico representativo se va regularizando hasta tender a una curva continua que reproduce fielmente la bien conocida “curva campana”.

Se demuestra, efectivamente, que el límite de la ley binomial, cuando N aumenta indefinidamente, es la ley de Gauss, con la condición de que la probabilidad elemental p no sea muy pequeña. Esta propiedad fundamental que conduce a sustituir el gráfico discontinuo por una curva continua de expresión analítica conocida permite tratar, muy simplemente y con una gran aproximación, muchos problemas cuya solución directa aplicando el cálculo de las probabilidades P_K sería casi imposible.

Características de la ley binomial. Las características teóricas simbolizadas aquí por μ y σ corresponden a las características experimentales simbolizadas por \bar{x} y s en "Parámetros de dispersión" en *Leñitas Geométricas* N° 9, 5ª época. Si se toma como variable el número de veces K que se produce el suceso favorable, las características tienen los valores siguientes:



$$\text{media } \mu = N \times p$$

$$\text{desviación típica; } \sigma = \sqrt{N \times p \times (1-p)}.$$

Si se considera como variable la frecuencia relativa $f = \frac{K}{N}$, resulta:

$$\mu = p \quad \sigma = \sqrt{\frac{p \times (1-p)}{N}}.$$

Recordemos que p es la probabilidad del suceso en una experiencia y que N es el número repeticiones.

En una experiencia en la que el suceso se ha realizado K veces, el desvío de la variable respecto de la media es $K - Np$ y el desvío reducido es la relación entre este desvío y la desviación típica:

$$\text{desvío reducido} = \frac{K - Np}{\sqrt{Np \times (1-p)}}.$$

Por ejemplo, en una serie de $N = 100$ jugadas de "cara o ceca" la probabilidad p es $\frac{1}{2}$, de tal modo que la media y la desviación típica toman los valores:

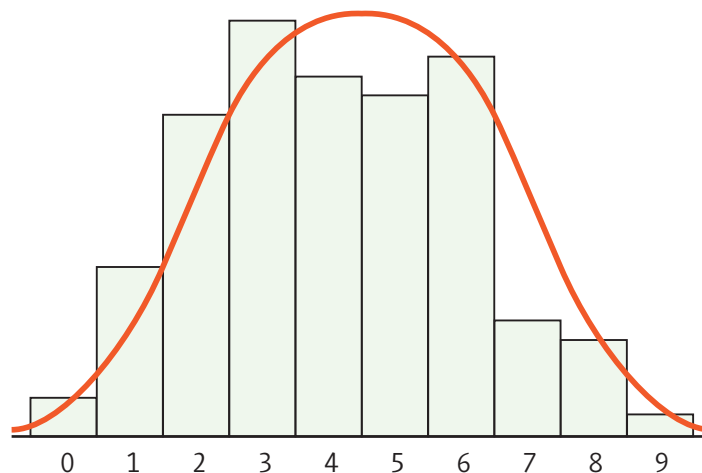
$$p = 100 \times \frac{1}{2} = 50; \quad \sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5.$$

Si se ha comprobado que cara (considerado suceso favorable) se ha presentado 60 veces, el desvío reducido es $\frac{60-50}{5} = 2$. La interpretación del desvío reducido aparecerá en el estudio de la ley de Gauss.

MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA

Método de Kolmogorov. Test de normalidad

Realizamos la experiencia que se sugiere en la hoja introductoria de este tema: contar el número de veces en que aparece la letra "o" en cada uno de los 119 renglones de un artículo periodístico. Los resultados se representan en la figura siguiente:



x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	2	9	17	22	19	18	20	6	5	1

La distribución es solo ligeramente similar a una curva normal. Las diferencias que se aprecian pueden ser debidas al azar, o quizá no. Para decidir científicamente si es lo uno o lo otro, se somete la distribución a lo que se llama *test de normalidad*. Consiste en lo siguiente: se empieza por calcular la media, \bar{x} , y la desviación típica, σ , de los datos que se tienen. En este caso:

$$\bar{x} = 4,08 \quad \text{y} \quad \sigma = 1,96.$$

Procederemos a comparar nuestra distribución empírica con la distribución

$$N(\bar{x}; \sigma) : N(4,08; 1,96).$$

En lugar de comparar frecuencias relativas por intervalos se comparan las frecuencias relativas acumuladas: ¿qué porcentaje de renglones hay con 3 oes o menos?, ¿cuántos renglones con 4 oes o menos?, etcétera.

De este modo obtendremos, en nuestro caso, dos listas de 10 números cada una, como se ve en la tabla que sigue:

Porcentaje de renglones por debajo de...	En la población empírica	En una población $N(\bar{x}, \sigma)$
0,5	1,68	3,44
1,5	9,24	9,51
2,5	25,53	21,19
3,5	42,02	38,21
4,5	57,98	58,32
5,5	73,11	76,42
6,5	89,92	89,07
7,5	94,96	95,91
8,5	99,16	98,78
9,5	99,99	99,71

Restando los pares de números correlativos de las últimas columnas, obtendremos 10 diferencias. La mayor de ellas en valor absoluto, d , representa la máxima diferencia entre lo que se tiene y lo que se habría obtenido si los resultados fueran exactamente normales; en nuestro caso se obtiene

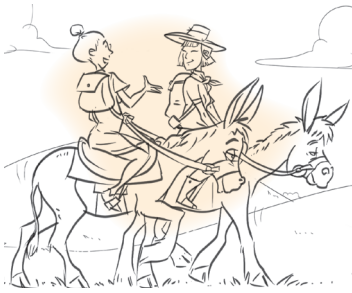
$$d = 3,81\%,$$

correspondiente a los porcentajes acumulados hasta 3,5. Y está demostrado que, si d es menor que $\frac{136}{\sqrt{n}}$, se puede admitir que las diferencias son debidas al azar y, por tanto, que los datos obtenidos provienen de una distribución normal.

La afirmación se hace con un margen de error del 1%, que significa que, por término medio, de cada 100 veces que apliquemos este método nos equivocaremos una. En nuestro 136º caso, $\frac{136}{\sqrt{119}} = 12,46$ es el máximo error que se le puede achacar al azar. Como el valor obtenido para d era 3,81, consideraremos que la variable “número de veces en que aparece la letra ‘o’ en cada renglón” se distribuye normalmente.

Este método para decidir acerca de la normalidad de una población a partir de una muestra extraída de la misma se llama *método de Kolmogorov*.

Una distribución interesante



Como ya se ha dicho, la curva normal aparece con mucha frecuencia. Sin embargo, hay muchas distribuciones que ni son normales, ni lo parecen. Veamos un ejemplo.

Lanzamos una moneda reiteradamente hasta que salga cara y anotamos el número de lanzamientos que se han necesitado para conseguirlo. Si sale cara en el primero, anotamos un 1 y volvemos a empezar; si sale cara en el segundo, anotamos un 2; etc. Los distintos valores que toma esta variable son 1, 2, 3, 4, ..., 11, ..., y sus respectivas probabilidades son:

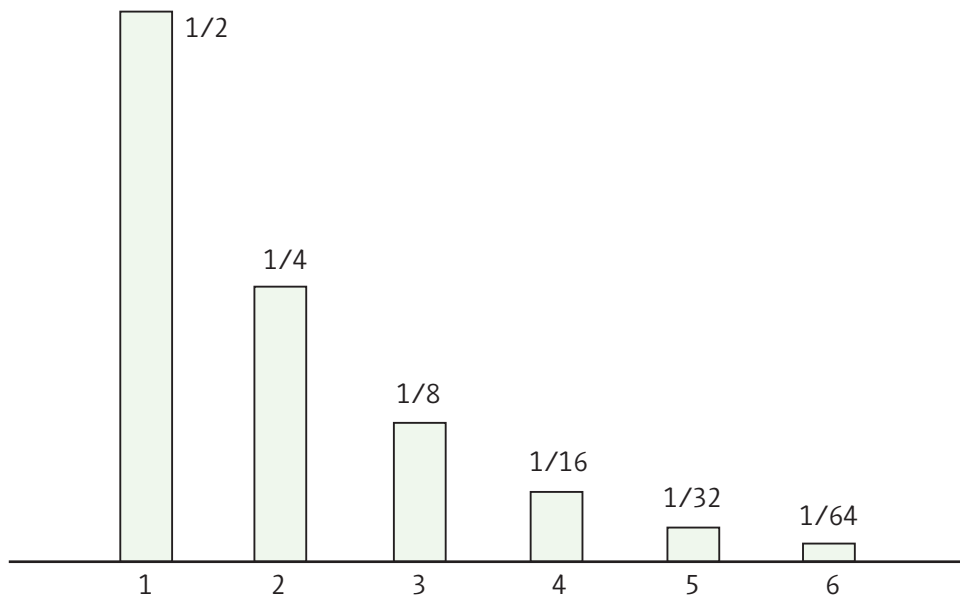
$$P[x = 1] = P[C] = \frac{1}{2}$$

$$P[x = 2] = P[+yC] = p[+] \cdot P[C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$P[x = 3] = P[+y+yC] = P[+] \cdot P[+] \cdot P[C] = \frac{1}{2^3}$$

$$P[x = n] = P[+y+y\dots yC] = \frac{1}{2^n}$$

Esta es, pues, su distribución de probabilidades (figura de abajo):



$$\sigma = \sqrt{6 - 2^2} = \sqrt{2}$$

¿Cómo calcular los parámetros \bar{x} y σ de esta distribución con infinitos términos? Veamos cómo se puede hacer con nuestro conocimiento:

$$\bar{x} \sum_{n=1}^{\infty} x_n P[x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n}$$

Para calcular el valor de esa suma de infinitos sumandos ponemos las expresiones de \bar{x} y de $\frac{1}{2}\bar{x}$.

$$\bar{x} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot \frac{1}{2^4} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\bar{x} = 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^4} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

Restando, se obtiene:

$$\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1,$$

pues es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y cuya razón es $\frac{1}{2}$.

A continuación se incluyen, sin explicaciones intermedias, los cálculos necesarios para la obtención de σ :

$$\sigma = \sqrt{\sum n^2 \cdot \frac{1}{2^n} - \bar{x}^2}; \sum n^2 \cdot \frac{1}{2^n} = S$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \frac{16}{2^4} + \dots + \frac{n^2}{2^n} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \frac{16}{2^5} + \dots + \frac{(n+1)^2}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S + 1 = \frac{2}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \frac{8}{2^4} + \dots + \frac{2n}{2^n} + \dots = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots\right) = 2\bar{x}$$

$$S = (2\bar{x} - 1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6\sigma = \sqrt{6 - 2^2} = \sqrt{2}.$$

FUNCIONES IMPORTANTES



Continúa de *Leñitas Geométricas* N° 8, 5ª época

 [MATERIALES PARA PRESENTAR EN EL AULA](#)

Teoría elemental de las funciones hiperbólicas

En *Leñitas Geométricas* N° 8, 5ª época, presentamos las funciones circulares hiperbólicas y lemniscáticas y su desarrollo nos conduce a preguntarnos qué son y para qué estudiamos estas funciones que, por las que vimos, son análogas a las funciones trigonométricas comunes. Por lo general, las funciones hiperbólicas se utilizan con frecuencia en diversas investigaciones físicas y técnicas. Desempeñaron un papel muy importante en la geometría no euclídea, participando prácticamente en todos los aspectos trigonométricos de la geometría de Nicolái Lobachevski. Además de la aplicación mencionada, la teoría de funciones hiperbólicas es de interés considerable para la enseñanza secundaria o preuniversitaria, puesto que la analogía entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas ilustra muchos problemas de la trigonometría desde un punto de vista moderno y diferente del común.

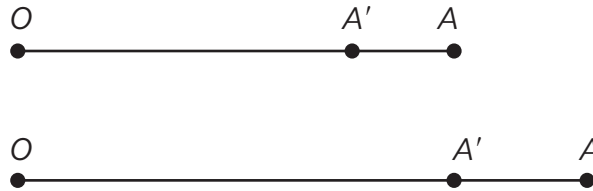
Antes de generalizar la función seno en hiperbólica y lemniscático, profundicemos en las funciones hiperbólicas y sus aplicaciones según la propuesta de V. Shervátov para estudiantes de enseñanza media.



Giro hiperbólico

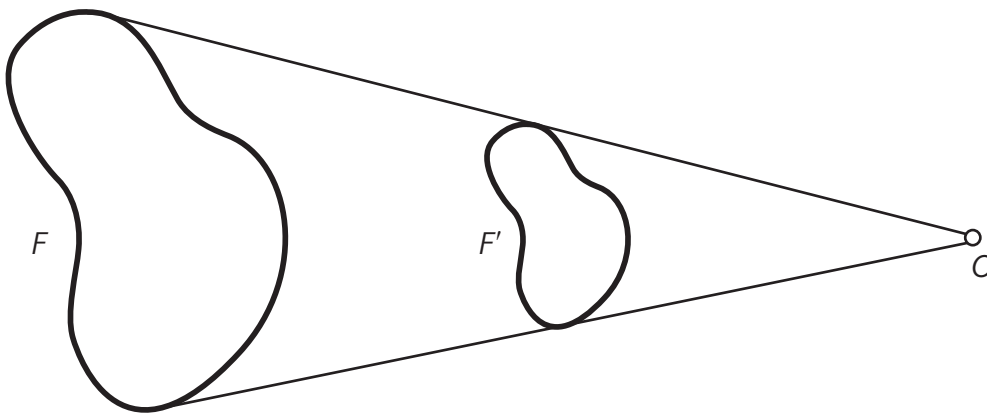
1. Contracción de una recta

En la solución de ciertos problemas geométricos se usa con frecuencia una transformación que se denomina *contracción al punto* (homotecia). La contracción al punto O (llamado *centro de contracción*), realizada con el factor de contracción k , significa que cada punto A de un plano pasa al punto A' en el rayo \overline{OA} , siendo $k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, es decir, $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$ (figura de abajo).



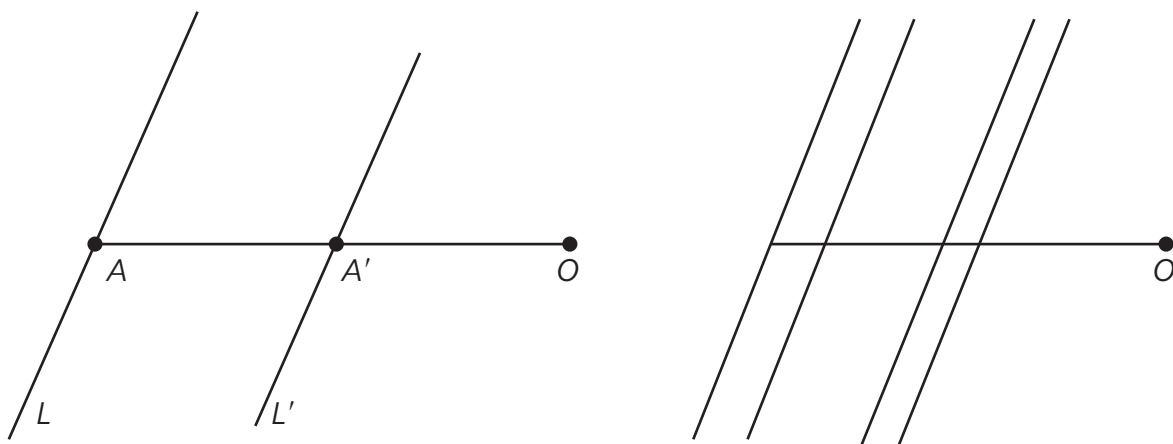
Si el factor de contracción k es superior a 1, entonces $\overline{OA'} > \overline{OA}$; en este caso, la transformación debería llamarse *expansión desde el punto O*. El propio punto O , en la transformación de contracción al punto O , siempre queda en su lugar.

En la contracción al punto O cada figura F se transforma en la figura F' ,

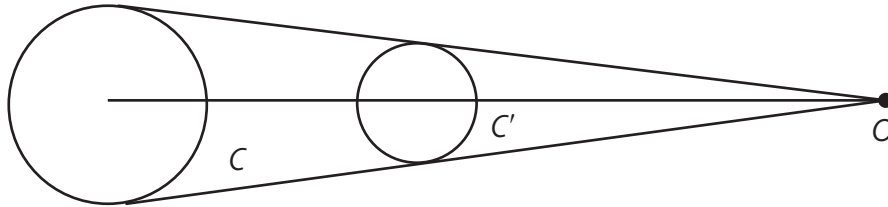


semejante a la original (véase figura anterior), con el centro de semejanza en el punto O y factor de semejanza igual a k . Si $k < 1$, la figura se reduce en área; si $k > 1$, la figura aumenta.

Cada recta, al contraerse, se transforma también en una recta; las rectas paralelas se transforman en las paralelas (figuras izquierda y derecha).

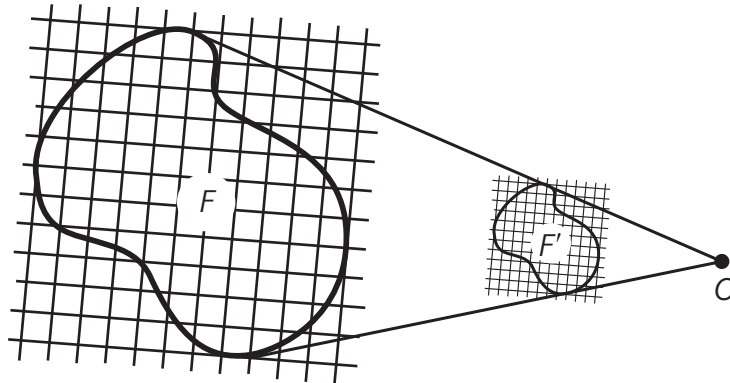


Cualquier circunferencia con la contracción al punto se convierte en una circunferencia (figura siguiente).



En la misma contracción todos los segmentos de un plano se reducen (o aumentan) por una relación constante de k . Las áreas de todas las figuras también se reducen (o aumentan) por una relación constante, igual a k^2 (cuadrado del factor de contracción).

En efecto, sea F una figura plana. Examinemos una retícula compuesta por un número de cuadrados pequeños, como se representa abajo:



El área F es aproximadamente igual al número de los cuadrados que se encuentran dentro de la figura F , multiplicado por el área de cuadrado. El error será tanto menor, cuanto mayor sea el número de cuadrados en la retícula. Eligiendo cuadrados suficientemente pequeños, se puede lograr que el error se haga inferior a cualquier número a , tan insignificante como se desee.

Calculadora Científica
CLASSWIZ **CASIO**

fx-991LA
CW



fx-570LA
CW



fx-82LA
CW



CASIO ha mejorado sus calculadoras científicas de la línea **ClassWiz**, creando calculadoras intuitivas y fáciles de usar.

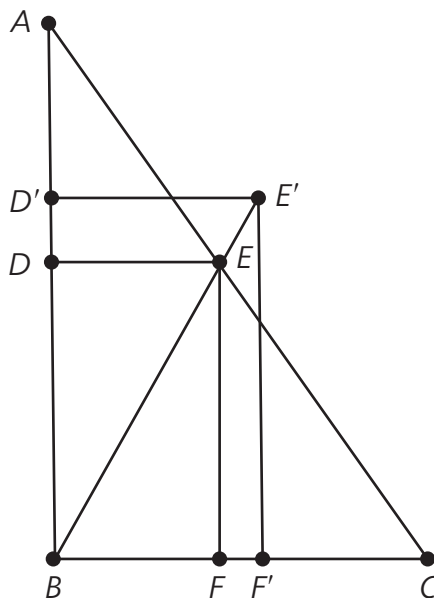
Descubrí toda línea CASIO en:

www.calculadoras.ar

@ f @calculadoras.ar

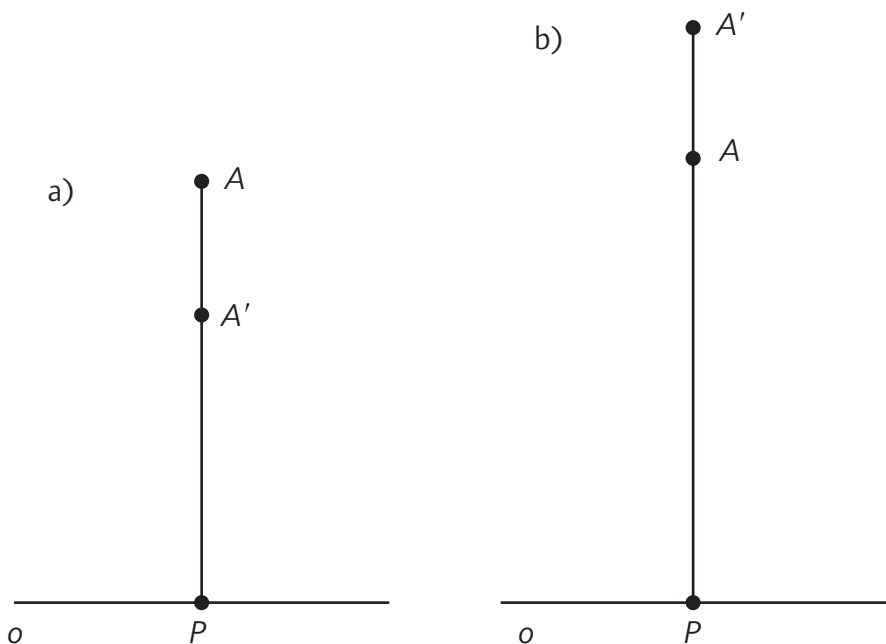
En la contracción al punto O la retícula de cuadrados se transforma en una nueva retícula de cuadrados, mientras que la figura F se transforma en la figura F' , dentro de la cual habrá tantos cuadrados de la nueva retícula (más pequeños en área si $k < 1$, y más grandes, si $k > 1$) como los que contenía la figura original F . El área F' es aproximadamente igual al número de cuadrados que se contienen en ella, multiplicado por el área del cuadrado. Pero el área de cada cuadrado nuevo es igual a la del cuadrado original, multiplicada por k^2 (dado que la longitud del lado de un cuadrado se multiplica por k). Por eso, el área F' es igual al área F multiplicada por k^2 .

Examinemos la resolución del siguiente problema, que nos servirá de ejemplo para la aplicación práctica de la contracción al punto: inscribir en el triángulo rectángulo ABC dado un rectángulo $BDEF$ (véase la figura siguiente), en el cual la relación entre sus lados está bien determinada.



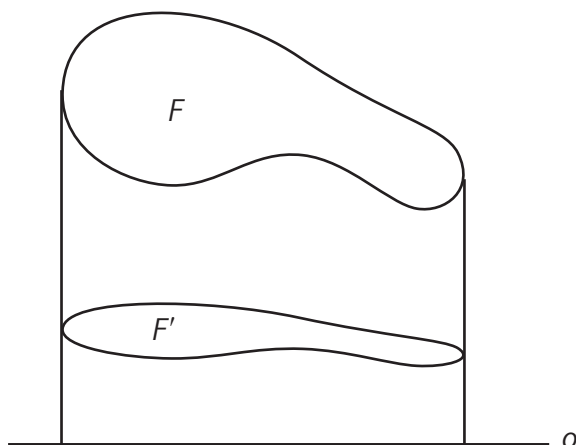
Para comenzar, construyamos un rectángulo arbitrario $BD'E'F'$ de relación dada entre los lados, logrando que los vértices D' y F' se dispongan en los lados \overline{AB} y \overline{BC} , respectivamente. Designemos con E al punto en que se cortan el rayo $\overline{BE'}$ y el lado \overline{AC} del triángulo. Es fácil ver que en la contracción, realizada al centro B con el factor de tracción $k = \frac{BE}{BE'}$, el rectángulo $BD'E'F'$ se transforma en el rectángulo buscado $BDEF$.

Haciendo uso de esta transformación, no es difícil construir el rectángulo mencionado. De modo análogo se resuelve el problema para el caso en que el triángulo ABC no es rectángulo. Pero este problema no se examinará aquí.



En la geometría resulta a veces más cómoda otra transformación, así llamada *contracción a una recta*. En la contracción a la recta o (denominada *eje de contracción*) con el factor de contracción k , cada punto A del plano pasa al punto A' del rayo \overline{PA} , perpendicular a o , siendo $\frac{\overline{PA'}}{\overline{AP}} = k$ o $\overline{PA'} = k\overline{PA}$ (figuras a y b anteriores).

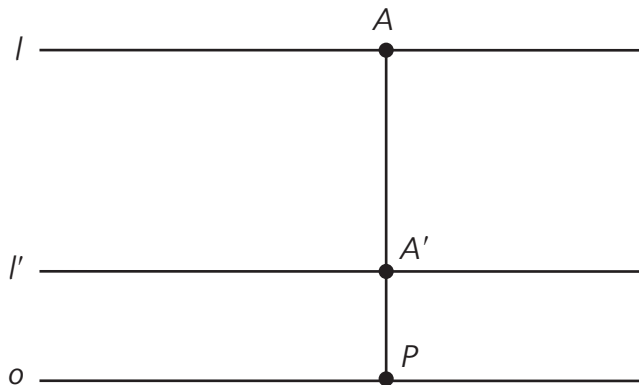
Si el factor de contracción k es mayor a la unidad, entonces $\overline{PA'} > \overline{PA}$ (figura b). En este caso, la transformación debería llamarse *expansión desde el eje o* . Todos los puntos de la recta o en la contracción quedan en su lugar. En la contracción a una recta, la figura F se transforma en otra figura F' , no semejante a F , como muestra la figura siguiente.



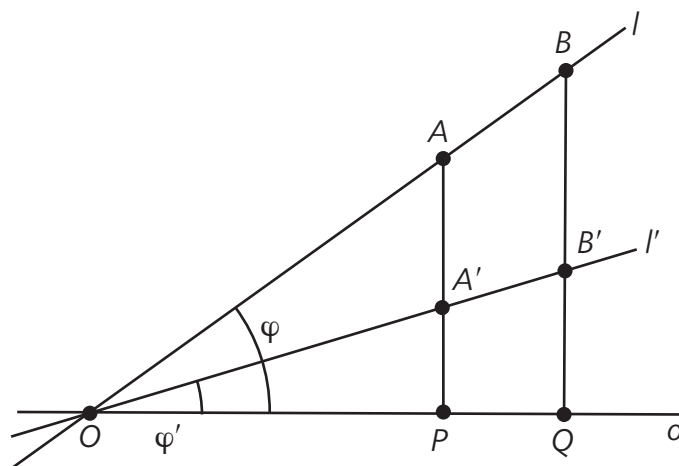
La contracción a la recta tiene un número de propiedades análogo al de la contracción al punto:

a) En la contracción a una recta, cada recta se transforma también en una recta.

Si la recta l es paralela al eje o y d es la distancia entre estas rectas, la recta l se transforma en la recta l' , paralela al eje o , siendo igual a kd la distancia entre l' y o (figura de abajo).



Supongamos que l no es paralela al eje o y designemos por O el punto de intersección de l con o (véase la figura siguiente).



En la contracción a la recta o el punto O queda en su lugar.

Sean: A , un punto arbitrario en la recta l (diferente de O), y A' un punto en el cual pasa A en la contracción al eje o , entonces, $\overline{PA'} = k\overline{PA}$.

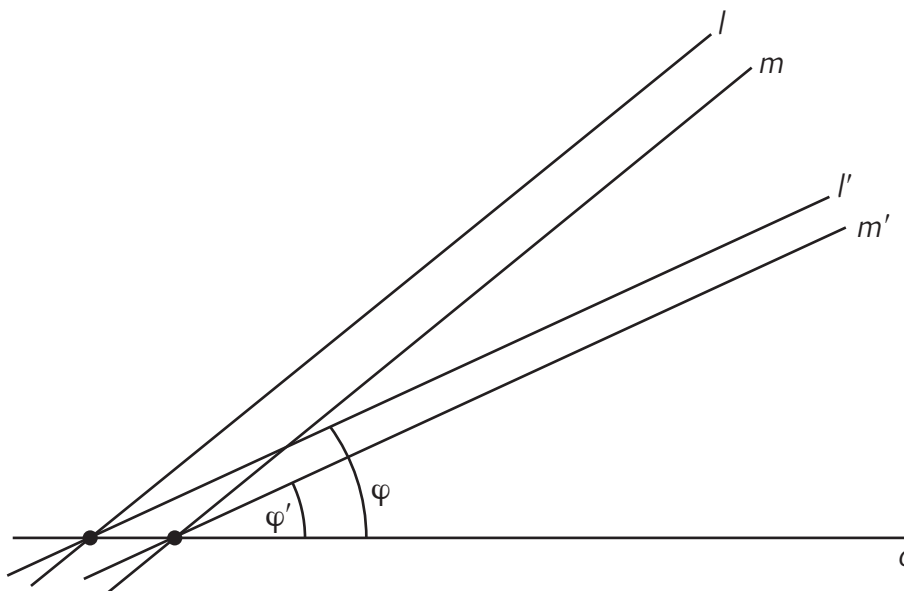
Elijamos en la recta l otro punto B . Si B' es un punto de intersección entre la recta $\overline{OA'}$ y la perpendicular \overline{BQ} , trazada desde el punto B al eje o , entonces:

$$\frac{\overline{B'Q}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}} = k$$

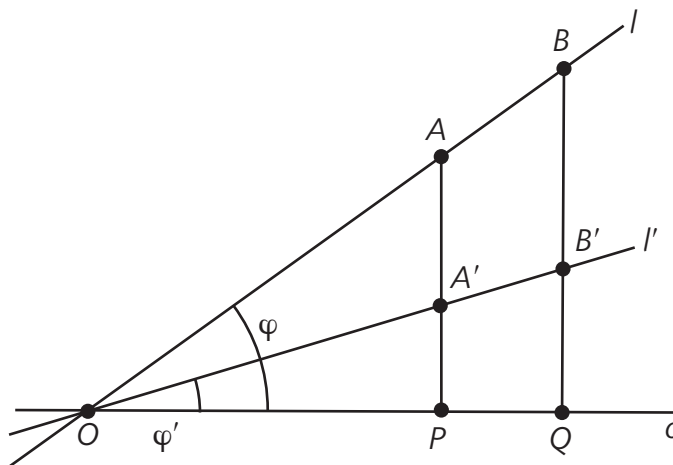
(lo que se deduce de la semejanza de los triángulos OQB , OPA , OQB' y OPA'), o sea, $\overline{QB'} = k \cdot \overline{QB}$.

Vemos, por consiguiente, que en la contracción al eje o el punto B pasa al punto B' . Puesto que B es un punto arbitrario de la recta l , esta última pasa, en la contracción al eje o , a la recta $\overline{OA'}$, la cual, naturalmente, debe designarse con l' ;

b) En la contracción a una recta las rectas paralelas pasan a las rectas paralelas. Sean l y m rectas paralelas. Siendo paralelas, no tienen punto común. Las rectas l' y m' son en las que se transforman las rectas originales: tampoco tienen punto común (el cual podría resultar del punto común de las rectas l y m , si lo tuvieran). Esto significa que las rectas l' y m' son también paralelas (figura siguiente):



Si φ y φ' son los ángulos formados por la recta original l y la recta l' , contraída de la primera al eje o , entonces de la figura de abajo se deduce con facilidad lo siguiente:



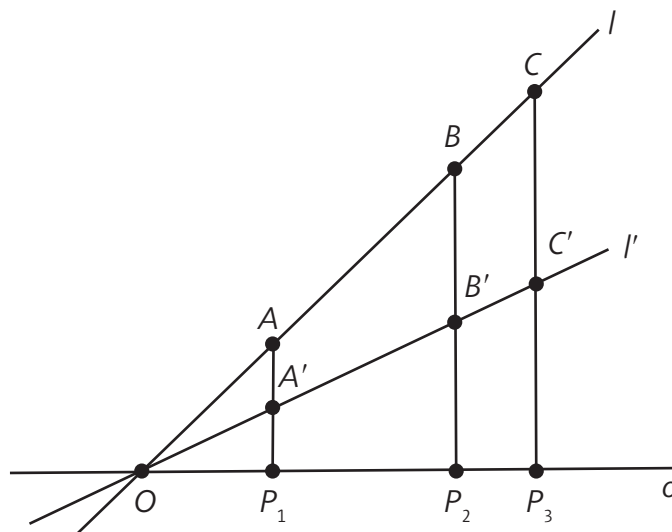
$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PO}} = \frac{k \cdot \overline{PA}}{\overline{PO}} = k \frac{\overline{PA}}{\overline{PO}} = k \operatorname{tg} \varphi.$$

De la figura se infiere también que las rectas paralelas, que cortan el eje o bajo un mismo ángulo φ , se transforman en rectas paralelas que cortan el eje o bajo un mismo ángulo φ' .

c) En la contracción a una recta queda en vigor la relación entre los segmentos dispuestos en una misma recta.

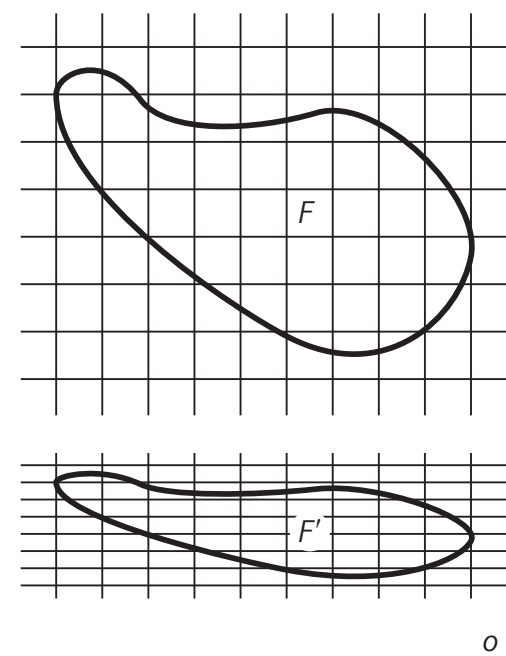
Efectivamente, según la propiedad de las rectas paralelas que cortan los rayos de un haz, tenemos (figura siguiente):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$



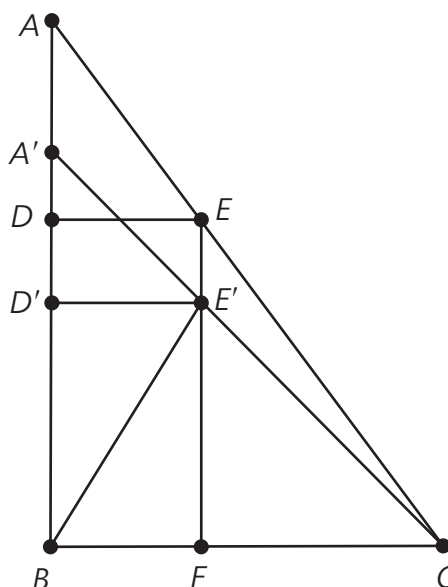
d) En la contracción a una recta las áreas de todas las figuras cambian en una relación constante (igual al factor de contracción k).

Examinemos la figura F y la retícula compuesta por cuadrados del gráfico siguiente. El área F es aproximadamente igual al número de los cuadrados dentro de F , multiplicado por el área del cuadrado.



Convengamos que una de las direcciones de las líneas de la retícula sea paralela al eje de contracción. En la contracción, la retícula de cuadrados se transformará en la retícula de rectángulos de áreas iguales, equivalentes al producto del área cuadrada por el factor de contracción k (uno de los lados del cuadrado no cambia y la longitud del segundo lado se multiplica por k). Nuestro razonamiento posterior no se diferenciará del ya utilizado en la demostración del postulado de que, en la contracción al punto realizada con el factor de contracción k , todas las áreas cambian k veces, como dijimos anteriormente.

Como ejemplo de la aplicación de la contracción hacia una recta examinemos la resolución del siguiente problema sobre la construcción geométrica: inscribir en el triángulo rectángulo ABC dado el rectángulo $BDEF$, en el cual el producto de los lados representa un valor bien determinado: $\overline{BD} \cdot \overline{BF} = d^2$ (en otras palabras, se debe inscribir un rectángulo de área dada) (comparar con el problema anterior parecido).



Para resolver el problema, realicemos como lo muestra la figura anterior la contracción del triángulo ABC al lado \overline{BC} con el factor de contracción $k = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$. El triángulo original se transformará en el triángulo isósceles rectángulo $A'BC$, en el cual $\overline{BA'} = k \cdot \overline{BA} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \cdot \overline{BA} = \overline{BC}$. El área del triángulo $A'BC$ es igual a kS (donde S es el área del triángulo ABC). En virtud de la propiedad d), el rectángulo $BDEP$ se transformará, al ser contraído, en el rectángulo $BD'E'F'$ de área igual a kd^2 . Ahora, nos falta inscribir en el triángulo $A'BC$ el rectángulo $BD'E'F'$ de área conocida kd^2 .

No es difícil hacerlo, dado que:

$$S_{BFE'D'} = S_{BCA'} - (S_{FCE'} + S_{A'D'E'})$$

y, por consiguiente,

$$S_{FCE'} + S_{A'D'E'} = S_{ECA'} - S_{BFE'D'} = kS - kd^2.$$

Pero, por otra parte:

$$S_{FCE'} + S_{A'D'E'} = \frac{1}{2}\overline{FE'}^2 + \frac{1}{2}\overline{D'E'}^2 = \frac{1}{2}(\overline{FE'}^2 + \overline{D'E'}^2) = \frac{1}{2}\overline{BE'}^2$$

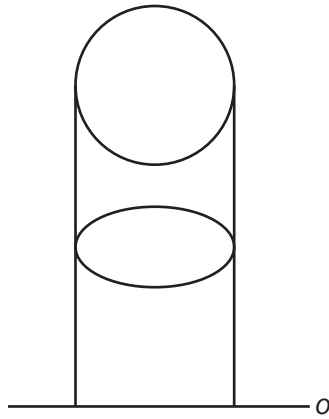
(teniendo en cuenta que el triángulo $A'BC$ y, por lo tanto, los triángulos $A'D'E'$ y $E'FC$ semejantes al primero, son todos isósceles). De este modo obtenemos:

$$\frac{1}{2}\overline{BE'}^2 = kS - kd^2.$$

Ahora, conociendo la longitud del segmento $\overline{BE'}$, encontramos sin dificultad alguna el punto E' , después de que construimos los rectángulos $BD'E'F'$ y $BDEF$, inscritos en el triángulo $A'BC$ y el ABC , respectivamente. El problema puede tener dos soluciones, una solución o ninguna, según sea el valor de la magnitud d .

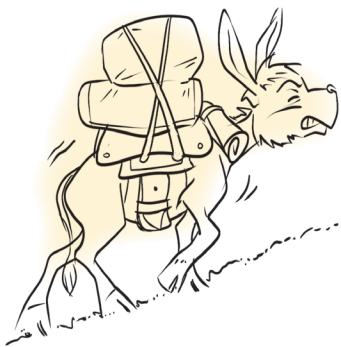
No se conoce otra resolución geométrica de este problema que no usaría la transformación de contracción a una recta. De modo análogo se resuelve el problema en el caso en que el triángulo dado ABC no sea rectángulo. Pero no examinaremos este problema aquí.

Contrariamente a la contracción al punto, la contracción a una recta no transforma una circunferencia en otra circunferencia. Realizada la contracción a una recta, la circunferencia se transforma en una curva de otra índole, llamada *elipse* (figura siguiente).



Haciendo uso de las propiedades a) a d) de la contracción a una recta, se puede derivar una serie de propiedades geométricas de la elipse. No obstante, esta tarea se encuentra fuera de los marcos de nuestro propósito en esta sección.

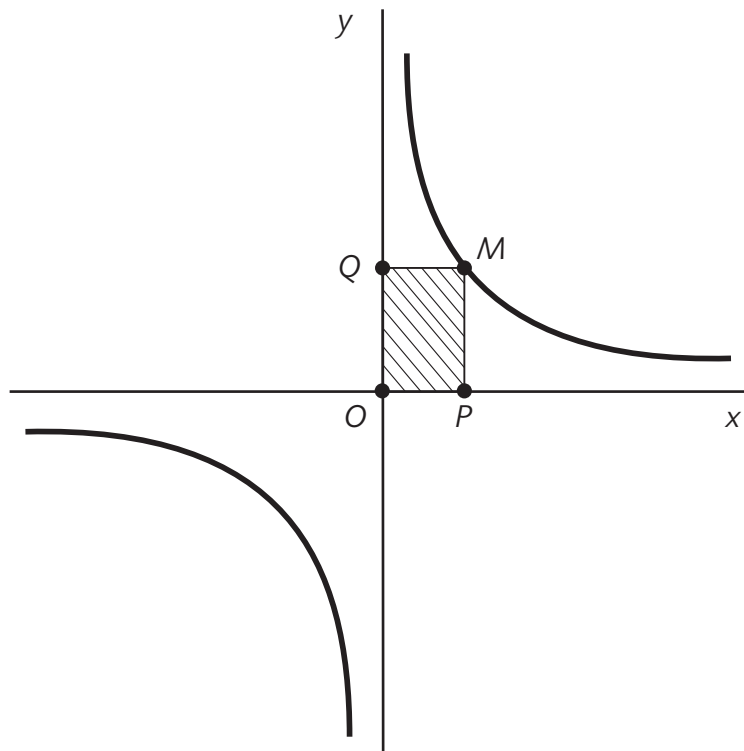
2. Giro hiperbólico



En adelante, un gran papel desempeñará la gráfica que expresa una dependencia de la proporcionalidad inversa, es decir, la curva cuya ecuación tiene la forma:

$$u = \frac{a}{x} \quad \text{o} \quad xy = a.$$

Como sabemos, esta curva se denomina *hipérbola*. Está representada en la figura siguiente:



Es evidente que cuanto mayor es la magnitud absoluta de x , tanto menor es y , e, inversamente: si $x \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow 0$; si $y \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow 0$. En lenguaje geométrico esto significa que la hipérbola se aproxima indefinidamente a los ejes de coordenadas sin cortarlos en ningún punto (de la ecuación $xy = a$ se deduce que x e y no pueden ser nulos).

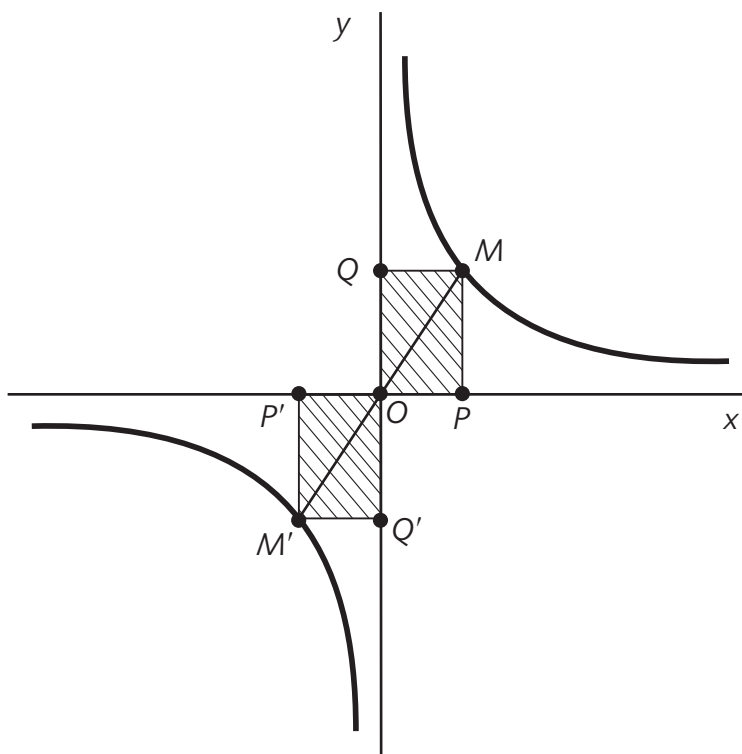
Se llama *asíntota* de una curva a la recta hacia la cual se aproxima indefinidamente la curva mencionada, sin cortar a la recta en ningún punto. Así pues, los ejes de coordenadas sirven de asíntotas para la hipérbola. La hipérbola consta de dos ramas que para $a > 0$ se disponen en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas (x e y son positivos) y en el tercer cuadrante (x e y son negativos).

La ecuación $xy = a$ tiene el sentido geométrico muy simple; el área del rectángulo $MQOP$, limitado por los ejes de coordenadas y las rectas trazadas por un punto M de la hipérbola paralelamente a los ejes, es igual al de la figura representada arriba y no depende de la elección del punto M . En efecto, es evidente que $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$, y

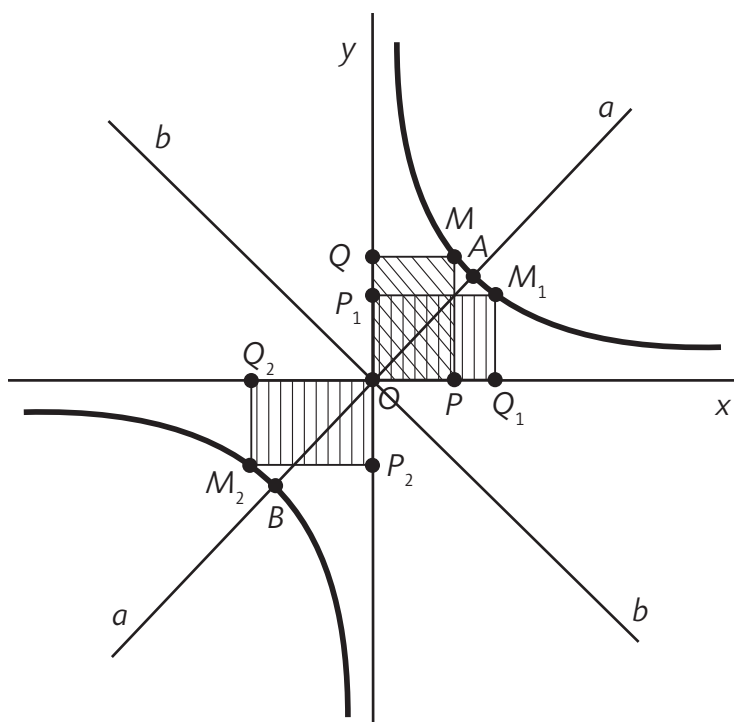
$$S_{MQOP} = OP \cdot MP = x \cdot y = a.$$

Si al rectángulo $MQOP$ le damos el nombre de *rectángulo de coordenadas del punto M* , podríamos determinar la hipérbola como lugar geométrico de los puntos (dispuestos en los cuadrantes primero y tercero del sistema de coordenadas) cuyos rectángulos de coordenadas tienen un área constante.

La hipérbola cuenta con el centro de simetría: ambas ramas de la hipérbola son simétricas con relación al origen de coordenadas O (figura siguiente). Esta afirmación se comprueba por el hecho de que los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M'Q'OP'$,

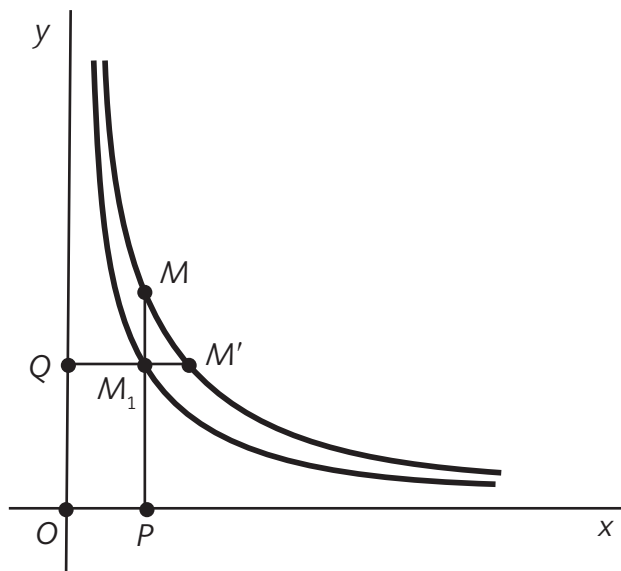


simétricos con relación a O , tienen áreas iguales. La hipérbola tiene también dos ejes de simetría que son representados por las bisectrices de los ángulos de coordenadas aa y bb , como vemos en la figura de abajo:



En efecto, los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M_1Q_1OP_1$, simétricos referidos a la bisectriz aa , tienen áreas iguales. También tienen áreas iguales los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M_2Q_2OP_2$, simétricos con relación a bb . El centro de simetría O y los ejes de simetría aa y bb se llaman, con frecuencia, *centro y ejes de la hipérbola*. Los puntos A y B , en los cuales la hipérbola corta el eje aa , reciben el nombre de *vértices de la hipérbola*.

Sea una hipérbola $xy = a$. Realicemos la contracción del plano al eje x , con el factor de contracción k . La hipérbola $xy = a$ se transformará en la hipérbola $xy = ak$, dado que la abscisa x de cada punto quedará invariable y la ordenada y se sustituirá por la $y \cdot k$.



Realicemos luego una contracción más, esta vez al eje y , con el factor de contracción igual a $\frac{1}{k}$. En esta transformación, la hipérbola $xy = ak$ se convertirá en la hipérbola $xy = \frac{ak}{k} = a$. En efecto, la ordenada y de cualquier punto queda invariable en esta última contracción, mientras que la abscisa x se convierte en $\frac{x}{k}$.

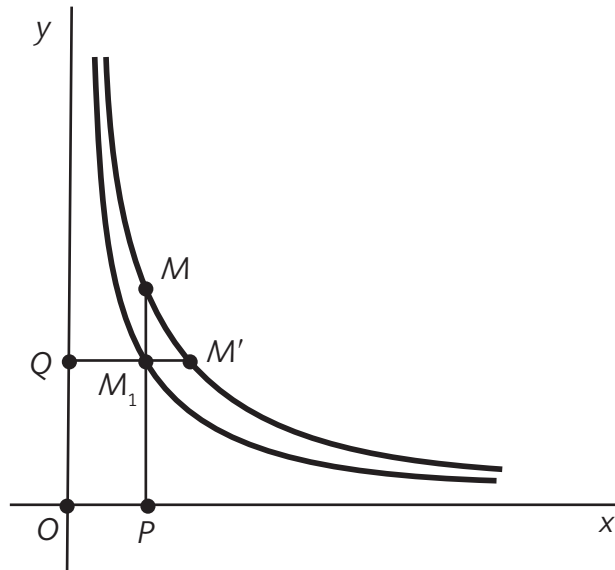
Resulta, pues, que la contracción consecutiva de un plano, primero al eje x , con el factor de contracción k , y la segunda vez al eje y , con el factor igual a $\frac{1}{k}$, transforma la hipérbola $xy = a$ en sí misma. La sucesión de estas dos contracciones de un plano a la recta constituye una transformación, llamada *giro hiperbólico*. El nombre *giro hiperbólico* se debe al género de la transformación, durante la cual todos los puntos de la hipérbola "resbalan por la curva": así, en la figura de arriba el punto M pasa, al principio, al punto M_1 y luego este último se convierte en el punto M' , y, en definitiva, el giro hiperbólico transforma el punto M de la hipérbola en el punto M' de la misma hipérbola. Este giro es análogo al giro de una circunferencia: parece que la hipérbola se diera vuelta.

Señalemos las siguientes propiedades del giro hiperbólico, en el cual:

- cada recta se transforma en la recta [corolario de la propiedad a), punto 1];
- los ejes de coordenadas (asíntotas de la hipérbola) se transforman en sí mismos (lo que se hace durante dos contracciones consecutivas que forman un giro hiperbólico);
- las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas [corolario de la propiedad b), punto 1];
- queda constante la relación entre los segmentos de una misma recta [corolario de la propiedad c), punto 1];
- las áreas de las figuras no varían su valor, dado que en la primera contracción a una recta las áreas de todas las figuras se multiplican por k , mientras que en la segunda contracción ellas se dividen por k [corolario de la propiedad d), punto 1].

Es muy importante observar que el giro hiperbólico nos permite trasladar cada punto de la hipérbola a otro punto cualquiera. En efecto, la primera contracción hace pasar el punto (x, y) de la hipérbola $xy = a$ al punto

(x, yk) de la hipérbola $xy = ak$; en la segunda contracción, el punto (x, yk) de la hipérbola $xy = ak$ pasa al punto $\left(\frac{x}{k}, xy\right)$ de la hipérbola original (véase la figura siguiente):



De este modo, como resultado del giro hiperbólico el punto (x, y) pasa al punto $\left(\frac{x}{k}, yk\right)$. Resulta, por consiguiente, que con la ayuda del giro hiperbólico adecuado el punto (x, y) de la hipérbola se transforma en cualquier otro punto (x_1, y_1) , de la misma hipérbola: es suficiente para ello escoger k de tal manera que sea $x_1 = \frac{x}{k}$ o $k = \frac{x}{x_1}$.

El cálculo diferencial



Continuación de *Leñitas Geométricas* N° 8, 5ª época

→ **5. Reglas del "cálculo integral"**. Un paso importante en el desarrollo del cálculo consistió en formular ciertas reglas generales, mediante las cuales podían reducirse problemas complicados a otros más sencillos, con lo que la solución aparecía de una manera casi mecánica. Este carácter algorítmico aparece de manera más intensa en la notación de Leibniz. Sin embargo, una atención demasiado intensa concedida a la parte puramente mecánica de la resolución de los problemas puede rebajar la enseñanza hasta convertirla en una simple disciplina vacía.



Algunas reglas simples de integración se deducen de inmediato de su definición (6) (*Leñitas Geométricas* N° 6, 5ª época, p. 33) o de su interpretación geométrica como áreas. **La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las dos funciones. La integral del producto de una constante c por una función $f(x)$ es igual a c por la integral de $f(x)$.** La fórmula siguiente combina ambas reglas:

$$\int_a^b [c f(x) + d g(x)] dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx. \quad (9)$$

La demostración se deduce inmediatamente de la definición de integral como límite de una suma finita (5), puesto que la fórmula correspondiente para la suma S_n es evidentemente cierta. La regla se extiende inmediatamente a sumas de más de dos funciones.

Como ejemplo, consideraremos un polinomio:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

cuyos coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n , son constantes. Para formar la integral de $f(x)$ desde a hasta b , procedemos término a término, de acuerdo con esta regla.

Utilizando la fórmula (7), encontramos:

$$\int_a^b f(x) dx = a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + \dots + a_n\left(\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\right).$$

Otra regla, que evidentemente puede deducirse tanto de la definición analítica como de la geométrica de la integral, es la siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. \quad (10)$$

Además, es evidente que la integral es igual a cero, si a es igual a b . La regla que vimos anteriormente en el punto 3 (*Leñitas Geométricas* N° 8, 5ª época, p. 30):

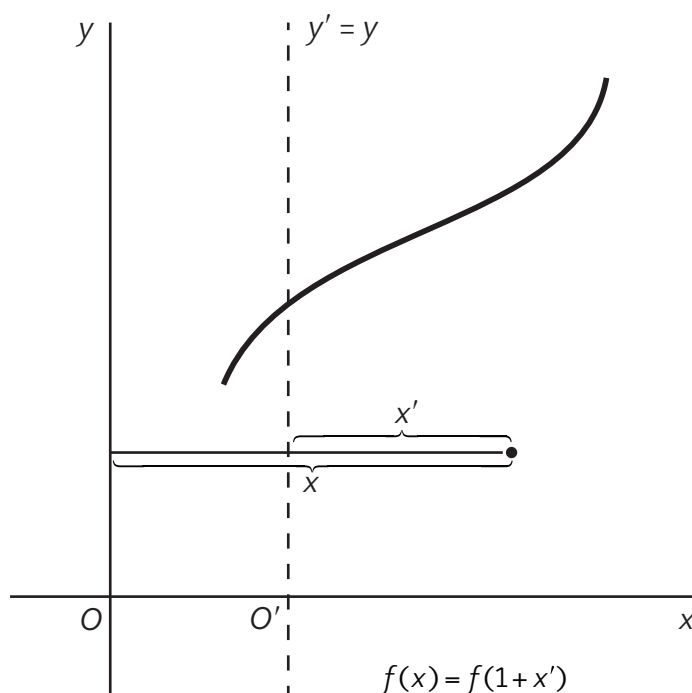
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (11)$$

está de acuerdo con las dos últimas enunciadas aquí, puesto que corresponde a (10) para $c = a$.

A veces, conviene utilizar la independencia de la integral respecto de la letra con que se designa la variable. Por ejemplo:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt, \dots$$

Pues un simple cambio del nombre de las coordenadas del sistema al cual se refiere la gráfica de la función no introduce ninguna variación en el área bajo la curva. La observación sigue siendo válida, aun si introducimos ciertos cambios en el sistema de coordenadas.



Por ejemplo, trasladamos el origen hacia la derecha en una unidad de O a O' , como en la figura anterior, con lo que x queda reemplazada por una nueva coordenada x' tal que $x = 1 + x'$. Una curva cuya ecuación sea $w = f(x)$ tendrá en el nuevo sistema de coordenadas la ecuación $y = f(1 + x')$.

Por ejemplo, $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x}$. Si la superficie dada bajo esta curva estaba limitada por $x = 1$ y $x = b$, la nueva superficie en el otro sistema quedará limitada por $x' = 0$ y $x' = b - 1$. Así se tiene:

$$\int_1^b f(x) dx = \int_0^{b-1} f(1+x') dx$$

o bien, cambiando x' por u ,

$$\int_1^b f(x) dx = \int_0^{b-1} f(1+u) du. \quad (12)$$

Por ejemplo,

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \int_0^{b-1} \frac{1}{1+u} du \quad (12a)$$

y para la función $f(x) = x^k$

$$\int_1^b x^k dx = \int_0^{b-1} (1+u)^k du. \quad (12b)$$

Análogamente,

$$\int_0^b x^k dx = \int_{-1}^{b-1} (1+u)^k du \quad (k \geq 0) \quad (12c)$$

Puesto que el primer miembro de (12c) es igual a $\frac{b^{k+1}}{k+1}$ tendremos:

$$\int_{-1}^{b-1} (1+u)^k du = \frac{b^{k+1}}{k+1}. \quad (12d)$$

Ejercicios.

1. Calcule la integral $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ desde 0 hasta b .
2. Demuestre que la integral de $(1+x)^n$ desde -1 hasta z es igual a $\frac{(1+z)^{n+1}}{n+1}$.
3. Demuestre que la integral desde 0 hasta 1 de x^n sen x es menor que $\frac{1}{n+1}$ (este último valor es el de la integral de x^n).
4. Demuestre directamente, y utilizando el teorema del binomio, que la integral desde -1 hasta z de

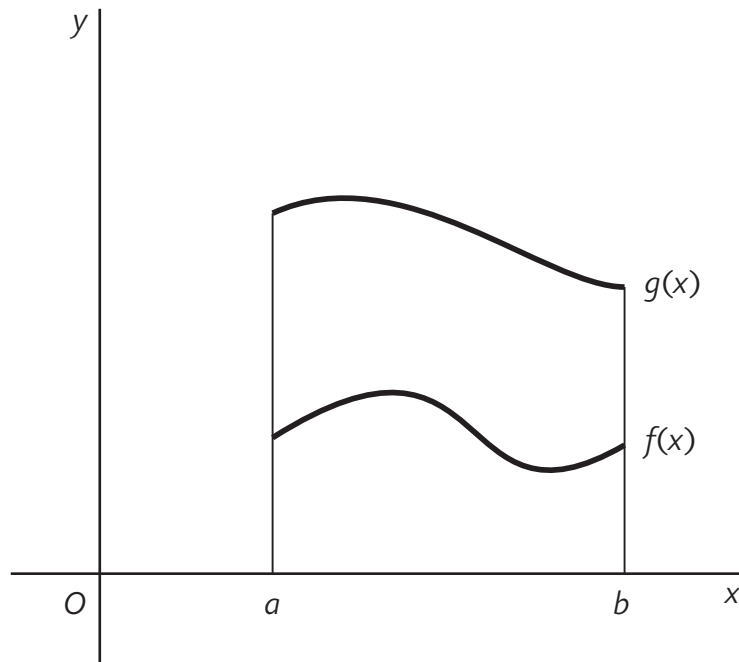
$$\frac{(1+x)^n}{n} \text{ es } \frac{(1+z)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Finalmente, mencionaremos dos reglas importantes, que aparecen en forma de desigualdades y que permiten estimar de una manera poco aproximada, pero útil, el valor de las integrales.

Supongamos que $b > a$ y que los valores de $f(x)$ en ese intervalo nunca sobrepasan los de otra función $g(x)$. Entonces, se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (13)$$

como se deduce claramente, de inmediato, de la figura siguiente o de la definición analítica de la integral.



En particular, si $g(x) = M$ es una constante tal que los valores de $f(x)$ nunca son mayores que ella, tendremos:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b M dx = M(b - a).$$

Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (14)$$

Si $f(x)$ es no negativa, será $f(x) = |f(x)|$. Si $f(x) < 0$, será $|f(x)| > f(x)$. De donde se deduce, poniendo $g(x) = |f(x)|$ en (13), que

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (15)$$

Puesto que $|-f(x)| = |f(x)|$, se deduce también que

$$-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

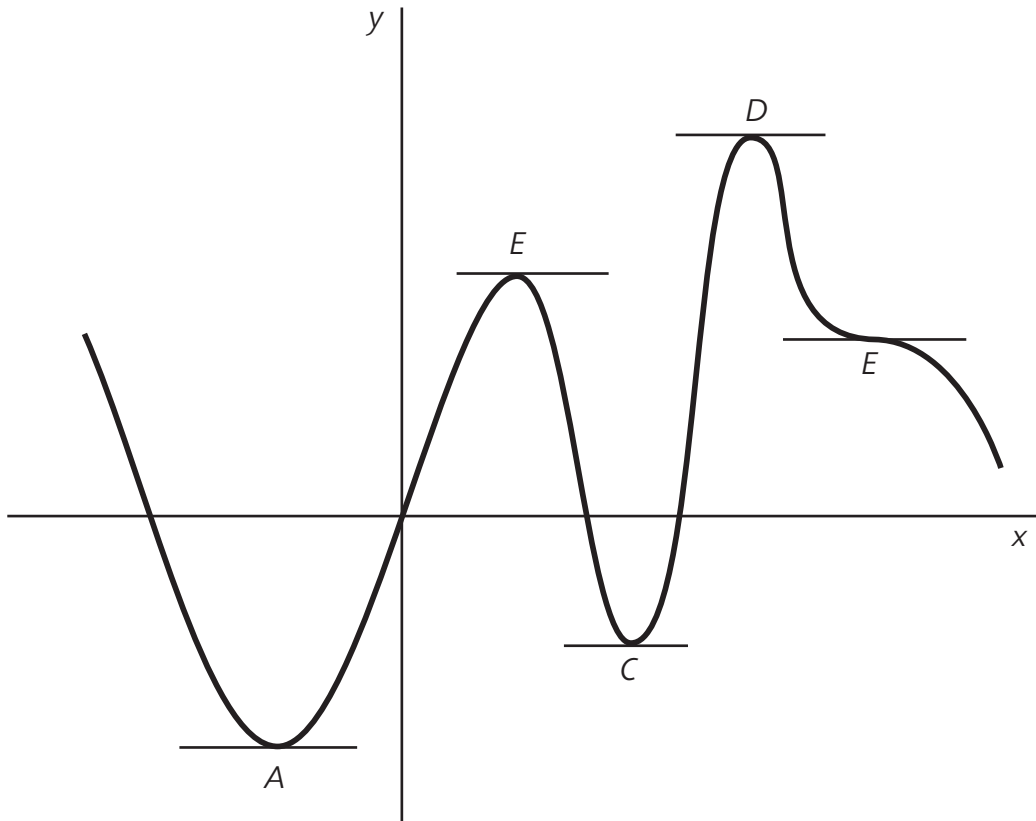
fórmula que, junto con (15), proporciona la desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (16)$$

2. La derivada

→ **1. La derivada como pendiente.** Mientras que el concepto de integral se remonta hasta la Antigüedad, la otra idea fundamental del cálculo, la derivada, recién fue formulado en el siglo XVII por Pierre de Fermat y otros. El descubrimiento efectuado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz de la relación orgánica entre estas dos ideas aparentemente tan dispares inició un desarrollo de la ciencia matemática sin parangón hasta entonces.

Fermat se interesaba por el problema de encontrar los máximos y mínimos de una función. En la gráfica siguiente, un máximo corresponde a una cumbre, más alta que todos los otros puntos vecinos, mientras que un mínimo corresponde a un valle, que se encuentra más bajo que todos los otros puntos vecinos.

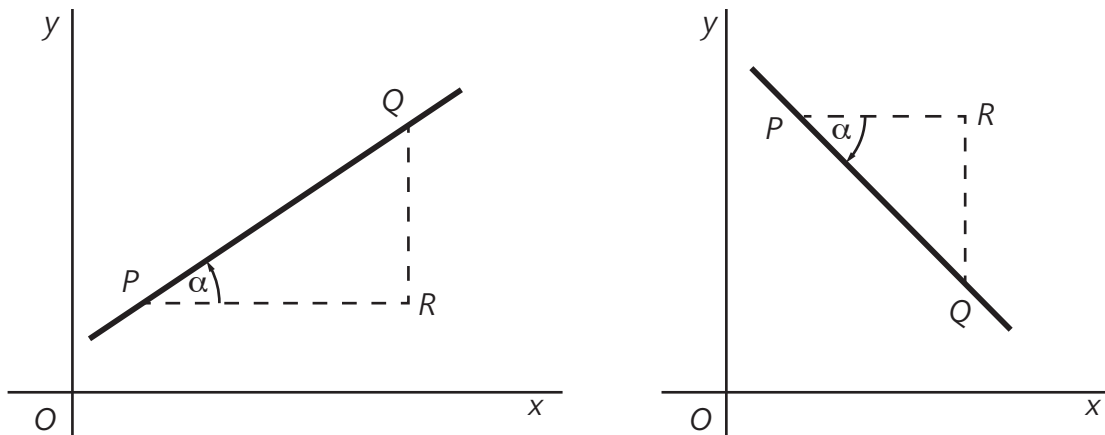


En la figura de arriba están representados los puntos de acumulación; el punto B es un máximo y el punto C , un mínimo. Para designar los puntos que son máximos o mínimos es natural utilizar el concepto de *tangente a una curva*. Supongamos que la gráfica no tiene puntos angulosos u otras singularidades y que en todo punto posee una dirección definida, que está dada por una tangente.

En los puntos de máximo o mínimo, la tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ debe ser paralela al eje de las x , puesto que, de lo contrario, la curva ascendería o descendería en esos puntos. Esta observación nos induce a considerar con toda generalidad, en cualquier punto P de la gráfica $y = f(x)$, la dirección de la tangente a la curva.

Para definir la dirección de una recta en el plano (x, y) es costumbre indicar su pendiente, que es la tangente trigonométrica del ángulo de la dirección del eje positivo de las x respecto de la recta. Si P es un punto cualquiera de la recta L , nos dirigimos hacia la derecha hasta un punto R y después hacia arriba o hacia abajo hasta otro punto Q de la recta; en esas condiciones, la pendiente de L será $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}$. La

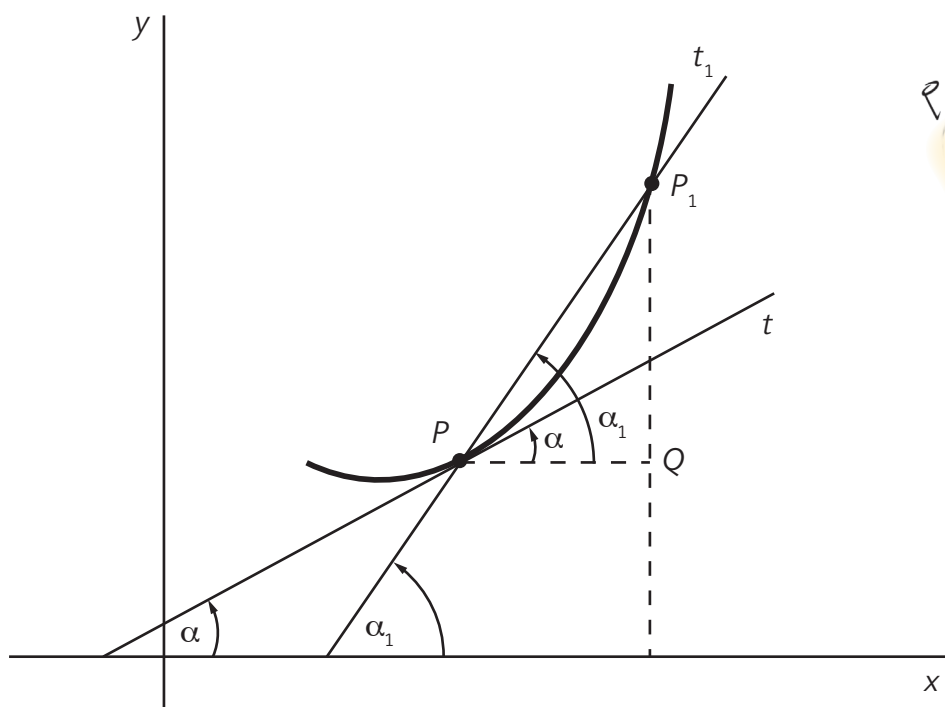
longitud \overline{PR} se toma en sentido positivo, mientras que se considera que \overline{RQ} es positivo o negativo, según haya que subir o bajar para pasar de R a Q , por lo que la pendiente proporciona la elevación o el descenso por unidad de longitud a lo largo de la horizontal, cuando pasamos sobre la recta de izquierda a derecha.



En las figuras anteriores, la pendiente de la primera recta es $\frac{2}{3}$, y la de la segunda, -1 .

Por pendiente de una curva en el punto P , entendemos la de la tangente a la curva en ese punto. Mientras aceptemos la tangente de una curva como un concepto matemático intuitivo dado, el único problema que nos queda por resolver es el de encontrar un procedimiento para calcular la pendiente. Por el momento, aceptaremos este punto de vista, dejando para más adelante un análisis más profundo del problema en cuestión.

→ **2. La derivada como límite.** La pendiente de una curva $y = f(x)$ en el punto $P(x, y)$ no puede calcularse teniendo exclusivamente en cuenta el punto. En lugar de eso, debemos recurrir a un paso al límite, que tiene muchos puntos de contacto como el que se necesita para calcular el área bajo una curva. Este paso al límite es la base del cálculo diferencial. Consideremos en la curva otro punto P_1 cercano a P y cuyas coordenadas sean x_1, y_1 (figura siguiente).



Llamaremos t_1 a la recta que une P con P_1 . Es una secante de la curva que se aproxima a la tangente a la curva en P_1 cuando el punto P_1 está muy cerca de P . Llamaremos α_1 al ángulo que forma t_1 con el eje de las x .

Si hacemos tender ahora x_1 a x , P_1 , se moverá a lo largo de la curva hacia P y la secante t_1 se acercará, como posición límite, a la tangente t en el punto P de la curva. Si se designa por α el ángulo que forma t con el eje de las x , al tender x_1 hacia x resulta:

La tangente es el límite de la secante, y la pendiente de la tangente es el límite de la pendiente de la secante.

Aunque no tenemos una expresión explícita de la pendiente de la tangente, sabemos que la pendiente de la secante está dada por la fórmula

$$\text{pendiente de } t_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

o bien, si designamos nuevamente la operación de formar una diferencia mediante el símbolo Δ , tendremos:

$$\text{pendiente de } t_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

La pendiente de una secante t_1 es un *cociente de diferencias*, o sea, la diferencia Δy de los valores de la función dividida por la diferencia Δx de los valores de la variable independiente. Además,

$$\text{pendiente de } t = \lim \text{ de la pendiente de } t_1 = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

donde los límites se toman suponiendo que $x_1 \rightarrow x$, es decir que $\Delta x = x_1 - x = 0$.

La pendiente de la tangente t de la curva es el límite del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: cuando $\Delta x = x_1 - x$ tiende a cero.

La función original $f(x)$ proporcionaba la altura de la curva $y = f(x)$ para el valor x . Podemos considerar ahora la pendiente de la curva para un punto variable P , cuyas coordenadas sean x, y , como una nueva función de x que indicaremos mediante $f'(x)$ y que llamaremos *derivada de la función $f(x)$* . Se llama *derivación de $f(x)$* al paso al límite mediante el cual se ha obtenido.

Este procedimiento es una operación que asocia una función dada $f(x)$ a otra $f'(x)$, de acuerdo con una regla bien definida, así como la función $f(x)$ está definida por un procedimiento de cálculo que atribuye a un valor cualquiera de la variable x el valor $f(x)$:

$f(x)$ = altura de la curva $y = f(x)$ en el punto x ,

$f'(x)$ = pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto x .

La derivada $f'(x)$, pues, es el límite de la diferencia $f(x_1) - f(x)$ dividida por la diferencia $x_1 - x$:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \quad \text{cuando } x_1 \rightarrow x. \quad (1)$$

Otra notación a menudo muy útil es:

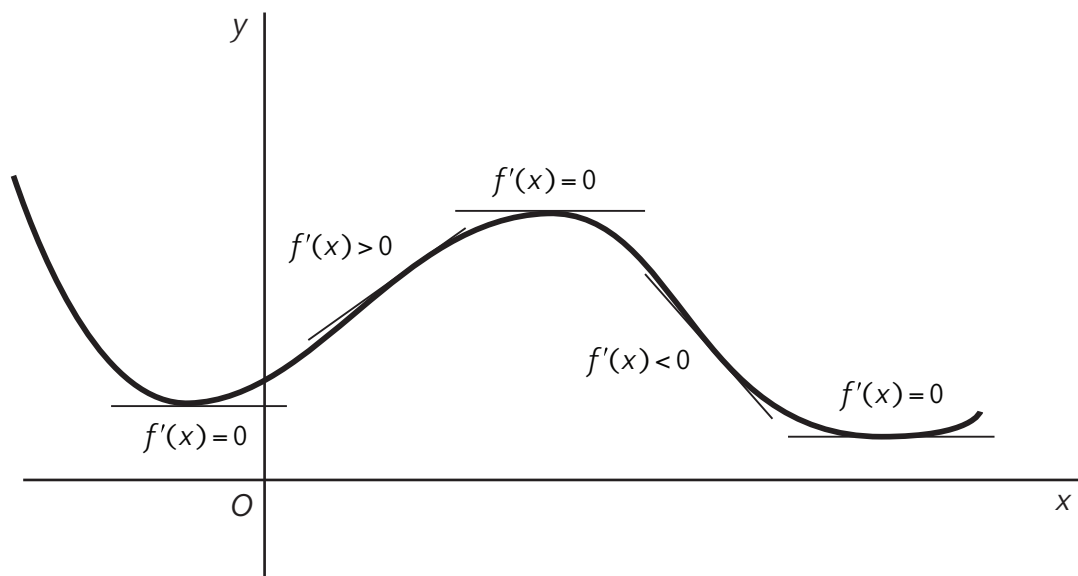
$$f'(x) = Df(x),$$

donde la D es una simple abreviatura de "derivada de". Otra notación distinta es la de Leibniz para designar la derivada de $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{df(x)}{dx},$$

que discutiremos más adelante cuando tratemos "la notación de Leibniz y los infinitésimos", y que indica el carácter de la derivada como límite del cociente de diferencias o incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Si recorremos la curva $y = f(x)$ en una dirección tal que crezca el valor de x , entonces, la derivada positiva $f'(x) > 0$ en un punto significa que la curva se eleva (el valor de y aumenta); y al contrario, la derivada negativa $f'(x) < 0$ significa que la curva desciende, mientras que $f'(x) = 0$ significa que para ese valor de x la curva tiene una dirección horizontal. Para un máximo o un mínimo, la pendiente debe ser igual a cero (figura de abajo).



De ahí que resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ respecto de x se pueda encontrar la posición de los máximos y de los mínimos, como lo hizo Fermat por primera vez.

➔ **3. Ejemplos.** Podría parecer que las observaciones que nos condujeron a la definición (1) carecen de valor práctico. Se ha reemplazado un problema por otro; en lugar de preguntar cuál es la pendiente de la tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto, se nos pide que establezcamos el valor de un límite (1), lo que, a primera vista, parece igualmente difícil. Pero en cuanto abandonemos el dominio de las generalidades y consideremos funciones especiales, obtendremos resultados tangibles.



La función más simple es $f(x) = c$, donde c es una constante. La gráfica de la función $y = f(x) = 0$ es una línea horizontal que coincide con todas sus tangentes, y es evidente que $f'(x) = 0$ para todos los valores de x . Esto se deduce también de la definición (1), pues

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{c - c}{x_1 - x} = \frac{0}{x_1 - x} = 0,$$

por lo que es trivial que

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 0 \text{ cuando } x_1 \rightarrow x.$$

Como segundo caso, consideraremos la función $y = f(x) = x$, cuya gráfica es una recta que pasa por el origen y es bisectriz del primer cuadrante. Geométricamente, es claro que $f'(x) = 1$, para todos los valores de x . La definición analítica (1) proporciona también ese mismo resultado, pues

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1.$$

De modo que

$$\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = 1 \text{ para } x_1 \rightarrow x.$$

El ejemplo más sencillo, pero que ya no es trivial como los anteriores, es el que proporciona la función

$$y = f(x) = x^2,$$

lo que equivale a encontrar la pendiente de la parábola. Este es el caso más simple que nos enseña a efectuar el paso al límite cuando el resultado no es evidente de antemano. Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x}.$$

Si intentáramos efectuar directamente el paso al límite en el numerador y el denominador, obtendríamos la expresión sin sentido $\frac{0}{0}$. Pero podemos evitar este escollo eliminando, antes de pasar al límite, el factor perturbador $x_1 - x$, causa de nuestras dificultades. Al evaluar el límite del cociente de las diferencias, consideramos exclusivamente valores tales que $x_1 \neq x$, por lo que está permitido efectuar esa simplificación. Como vimos anteriormente estudiando el paso al límite, pues cuando x tiende a x_1 , $f(x)$ puede aproximarse al punto a de tal manera que existan valores $x \neq x_1$ para los cuales $f(x) = a$. Por ejemplo, al considerar la función $f(x) = \frac{x}{x}$ cuando x tiende a cero, no permitimos nunca que x sea igual a cero, pero $f(x) = 1$, para todo $x \neq 0$, y el límite a existe y es igual a 1, de acuerdo con nuestra definición de límite.

Por todo esto, obtenemos la expresión:

$$\frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{x_1 - x} = x_1 + x.$$

Después de la simplificación, no existe ninguna dificultad con el límite, al hacer $x_1 \rightarrow x$. Este se obtiene *por sustitución*, pues en la nueva forma $x_1 + x$ el cociente de las diferencias es función continua y el límite de una función continua para $x_1 \rightarrow x$ es simplemente el valor de la función para $x_1 = x$, o sea, en nuestro caso $x + x = 2x$, por lo que

$$f'(x) = 2x \text{ para } f(x) = x^2.$$

De una manera similar, podemos demostrar que para $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Pues el cociente de diferencias:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x},$$

puede simplificarse mediante la fórmula

$$x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2).$$

eliminándose el denominador $\Delta x = x_1 - x$, con lo que se obtiene la expresión continua:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1x + x^2.$$

Si ahora se hace tender x_1 a x , esta expresión se convierte en $x^2 + x^2 + x^2$, por lo que resulta ser

$$f'(x) = 3x^2.$$

En general, para $f(x) = x^n$, siendo n un número entero y positivo cualquiera, se obtiene la derivada

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Ejercicio. Demuéstrese ese resultado. [Utilícese la fórmula algebraica

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1})].$$

Como un ejemplo más de los sencillos procedimientos que permiten determinar explícitamente la derivada, consideraremos la función:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}.$$

Tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x_1 - x} = \frac{x - x_1}{x_1 x} \cdot \frac{1}{x_1 - x}.$$

Aquí también podemos simplificar y encontramos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x}$, que es continua para $x_1 = x$, por lo que el límite resulta ser

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Naturalmente, ni la derivada ni la función misma están definidas para $x = 0$.

Ejercicio. Demuéstrese de manera similar que para $f(x) = \frac{1}{x^2}$, es $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, para $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$; en general, para $f(x) = (1+x)^n$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$.

Vamos a derivar ahora la función $y = f(x) = \sqrt{x}$. En este caso, el cociente de diferencias resulta ser:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x}.$$

Mediante la fórmula $x_1 - x = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x})$, podemos eliminar un factor y obtener la expresión continua

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

Pasando al límite, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejercicio. Demuéstrese que para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es $f'(x) = -\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}$; para $f(x) = \sqrt[3]{x}$, es $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

para $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, es $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; para $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es $f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

→ **4. Derivadas de las funciones trigonométricas.** Trataremos ahora una cuestión esencial: la diferenciación de las funciones trigonométricas, usando solo la medida de los ángulos en radianes. Para diferenciar la función $y = f(x) = \sin x$, ponemos $x_1 - x = h$, con lo que resulta $x_1 = x + h$ y $f(x_1) = \sin x_1 = \sin(x + h)$. Mediante la fórmula trigonométrica para el seno de la suma, se tiene:

$$f(x_1) = \sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

De donde se deduce

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right). \quad (2)$$



Si hacemos tender ahora x_1 a x , h tiende a cero; $\text{sen } h$, a cero; $\text{cos } h$, a 1. Además, de acuerdo con los resultados obtenidos anteriormente, se tiene:

$$\lim \frac{\text{sen } h}{h} = 1, \lim \frac{\text{cos } h - 1}{h} = 0.$$

El primer miembro de (2) tiende a $\text{cos } x$, proporcionando el resultado que se buscaba.

La función $f(x) = \text{sen } x$ tiene la derivada $f'(x) = \text{cos } x$, o, más brevemente: $D \text{ sen } x = \text{cos } x$.

Ejercicio. Demuestre que $D \text{ cos } x = -\text{sen } x$.

Para derivar la función $f(x) = \text{tg } x$, escribimos $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \left(\frac{\text{sen}(x+h)}{\text{cos}(x+h)} - \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \right) \frac{1}{h} = \\ &= \frac{\text{sen}(x+h)\text{cos } x - \text{cos}(x+h)\text{sen } x}{h} \frac{1}{\text{cos}(x+h)\text{cos } x} = \frac{\text{sen } h}{h} \frac{1}{\text{cos}(x+h)\text{cos } x}. \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de la fórmula $\text{sen}(A - B) = \text{sen } A \text{cos } B - \text{cos } A \text{sen } B$, para $A = x + h$ y $B = h$.

Si hacemos tender ahora h a cero, $\frac{\text{sen } h}{h}$ tiende a 1, $\text{cos}(x+h)$ tiende a $\text{cos } x$, de donde deducimos:

la derivada de la función $f(x) = \text{tg } x$ es $f'(x) = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$, o sea, $D \text{ tg } x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$.

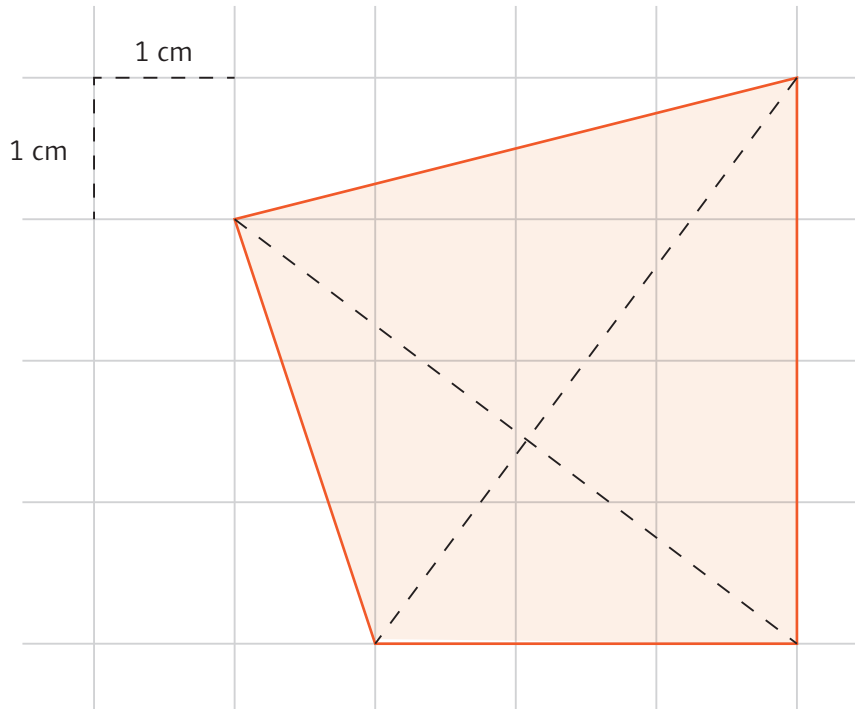
Ejercicio. Demuestre que $D \text{ ctg } x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}$.

- **5. Derivación y continuidad.** De la derivabilidad de una función se deduce su continuidad. Si existe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ al tender Δx a cero, es fácil ver que la variación Δy de la función $f(x)$ debe llegar a ser tan pequeña como se quiera, al tender a cero la diferencia Δx . De ahí que siempre que pueda derivarse una función, su continuidad esté automáticamente asegurada; por consiguiente, prescindiremos de mencionar explícitamente o de demostrar la continuidad de las funciones derivables que aparezcan en este punto, a no ser que exista una razón particular para ello.



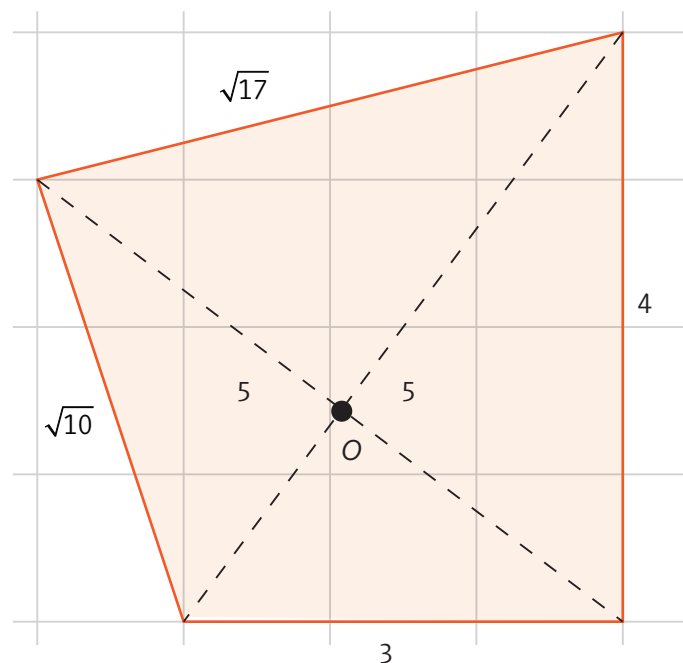


Con datos de la figura, hallar los perímetros de los cuatro triángulos que se forman al trazar las diagonales del cuadrilátero.



Soluciones

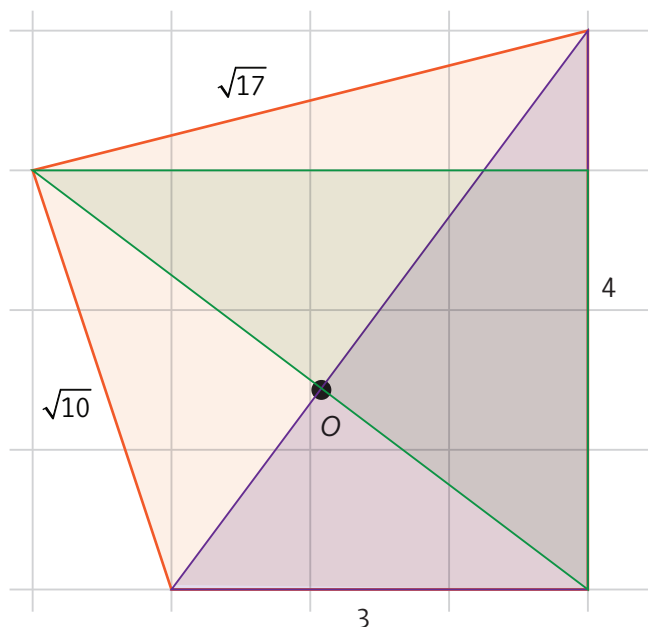
Usando la cuadrícula y el teorema de Pitágoras, podemos conocer las medidas de los lados y las diagonales del triángulo. En la siguiente figura se han colocado las partes numéricas de dichas medidas.



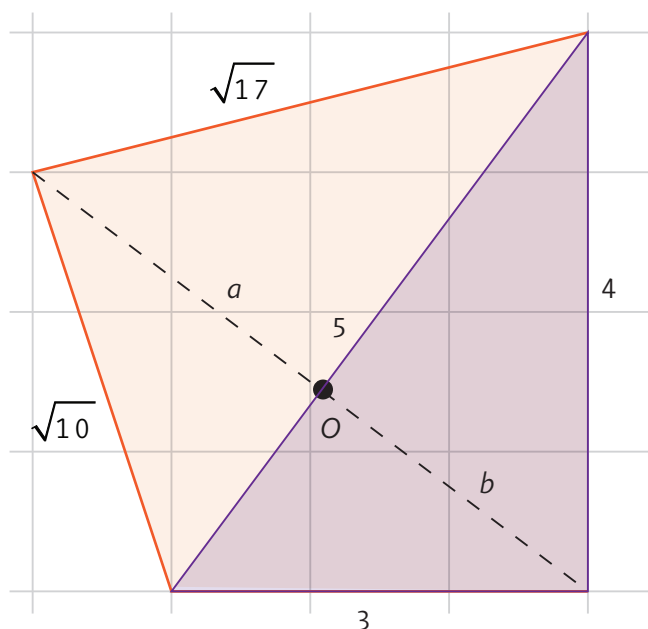


Restaría saber las medidas de los segmentos en los que se descomponen las diagonales por el punto de intersección O .

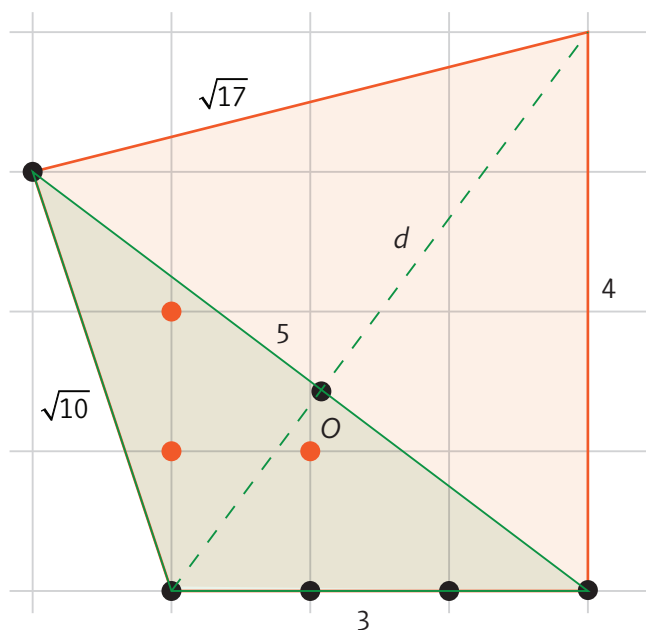
Los triángulos rectángulos sombreados que muestra la siguiente figura son idénticos y tienen sus pares de catetos correspondientes perpendiculares entre sí, entonces sus hipotenusas también son perpendiculares entre sí.



Dividimos el cuadrilátero en dos triángulos y trazamos sus alturas a y b .



Podemos calcular las áreas de estos triángulos de dos maneras distintas. En el triángulo de la parte inferior, el área es $\frac{5 \times b}{2}$ y también es $\frac{3 \times 4}{2} = 6$, entonces debe ser $b = \frac{12}{5}$. Como $a + b = 5$, resulta $a = \frac{13}{5}$. En forma análoga procedemos para averiguar las medidas de los segmentos en la otra diagonal, pero aquí usaremos la fórmula de Pick.



En el triángulo de la parte inferior, el área es $\frac{5 \times c}{2}$ y también es $3 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{9}{2}$, entonces debe ser $c = \frac{9}{5}$. Como $c + d = 5$, resulta $d = \frac{14}{5}$.

Con los valores encontrados, los perímetros son:

$$3 + \frac{12}{5} + \frac{9}{5} = \frac{36}{5}$$

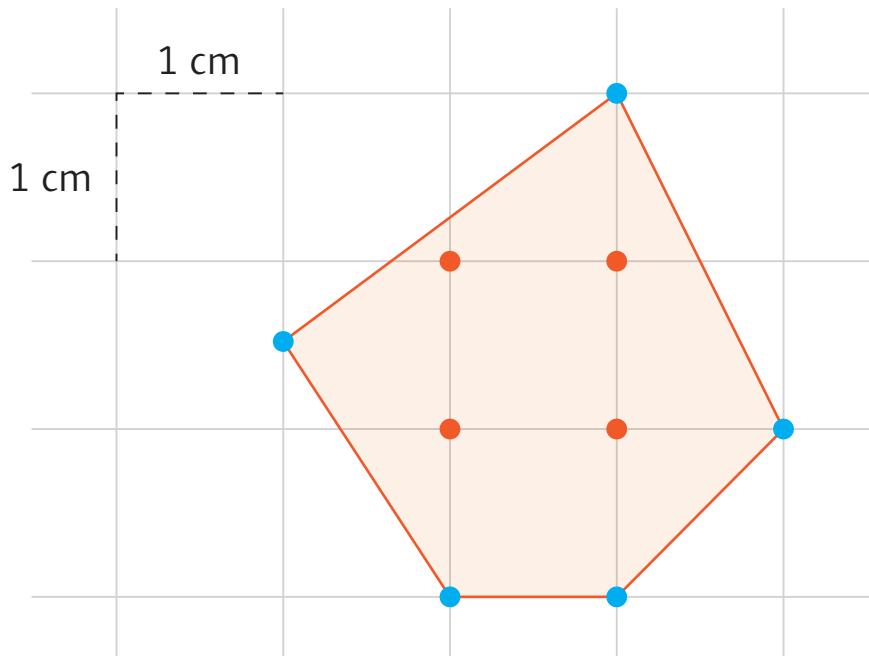
$$4 + \frac{14}{5} + \frac{12}{5} = \frac{46}{5}$$

$$\sqrt{17} + \frac{13}{5} + \frac{14}{5} = \sqrt{17} + \frac{27}{5}$$

$$\sqrt{10} + \frac{9}{5} + \frac{13}{5} = \sqrt{10} + \frac{22}{5}$$



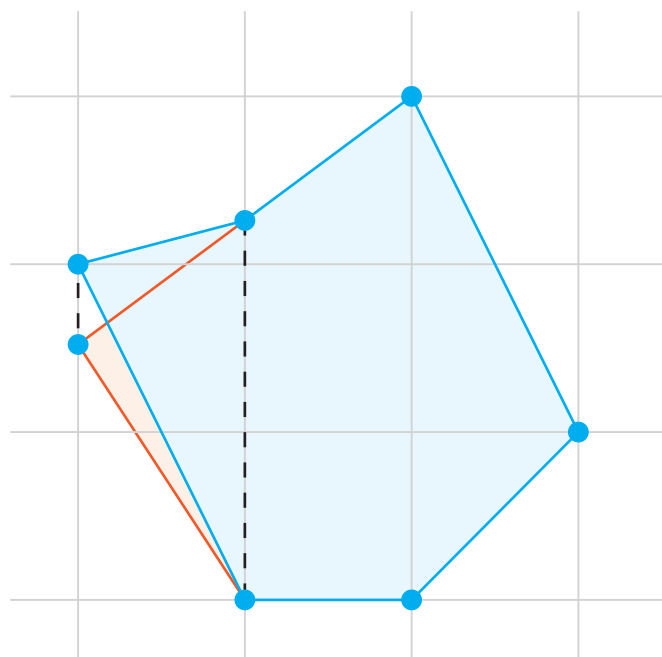
Según el GeoGebra, el área del pentágono de la figura es $5,25 \text{ cm}^2$ y según la fórmula de Pick, el área es $5,5 \text{ cm}^2$. ¿Cuál de estos valores es incorrecto?



Solución

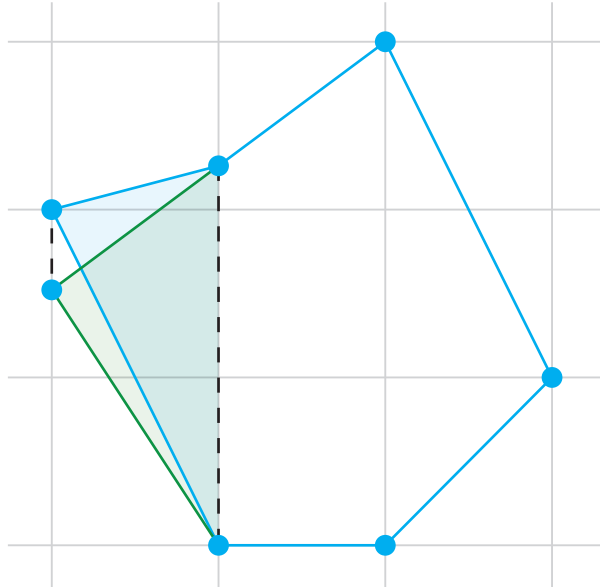
El valor $5,5 \text{ cm}^2$ es incorrecto. La fórmula de Pick no tiene por qué ser válida, dado que el pentágono no tiene todos sus vértices en nodos de la cuadrícula.

El área del pentágono es igual al área del hexágono dado en la siguiente figura en color celeste.

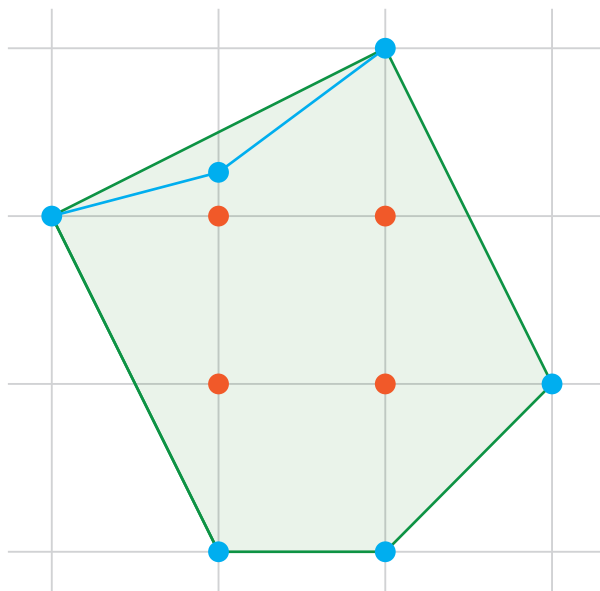




Esto es así porque los dos polígonos difieren en triángulos que comparten la base, marcada en línea de puntos, y cada uno de estos triángulos tiene un vértice sobre una paralela a la base compartida, es decir, los dos triángulos destacados en la figura a continuación tienen la misma área.



Por otra parte, el área del hexágono es menor que el área del pentágono que se muestra a continuación.



Pero para este pentágono sí es válida la fórmula de Pick, siendo su área:

$$\left(4 + \frac{5}{2} - 1\right) \text{ cm}^2 = 5,5 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área del pentágono inicial es menor que $5,5 \text{ cm}^2$.